MAT-KOL (Banja Luka)
ISSN 0354-6969 (p), ISSN 1986-5228 (o)
Vol. XX (1)(2014), 5-14

Osnove matematike

JEDNA NOVA KLASA RELACIJA

Daniel A. Romano[1]

Sažak: U ovom tekstu, slijedeći koncepte izložene u radovima [5]-[7], [9]-[10], uveden je i analiziran je koncept kvazi-normalnih relacija i dualno kvazi-normalnih relacija na skupovima. Data je i jedna karakterizacija ovog pojma. Dati su potrebni i dovoljni uslovi da relacija anti-uredjenja $\nleqslant$ bude (dualno) kvazi-normalna relacija.

Ključne riječi fraze: : relacije, kvazi-normalna relacije, kvazi-regularne relacije, normalno konjugovane relacije, konačno proširenje relacija

Abstract. In this paper, following concepts introduced in articles [5]-[7] and [9]-[10], the concept of quasi-normal and dually quasi-normal relations are introduced and analyzed. A characterizations of quasi-normal relations are obtained. In addition, particulary we show when the anti-order relation $\nleqslant$ is a (dually) quasi-normal relation.

Math. Subject Classification (2010): 03E20, 06B11, 20M20
ZDM Subject Classification (2010): E20, B11

Key words and phrases: relation, quasi-normal relation, dually quasi-normal relation

1 Uvod

Prvu karakterizaciju regularnih relacija dao je Zareckiĭ ([12], [13]). Ovu klasa relacija izučavali su i Markowskiy ([8]), Schein ([11]) i Xu Xiao-quan i Liu Yingming ([14]) (pogledati na primjer, i tekstove [1] i [2]). Karakterizaciju konjugativnih, dualno konjugativnih kao i dualno normalnih relacija dali su Jiang Guanghao i Xu Luoshan ([5], [6]), a karakterizaciju normalnih relacija dali su Jiang Guanghao, Xu Luoshan, Cai Jin i Han Guiwen ([7]), a kvazi-regularnih (i dualno kvazi-regularnih) i kvazi-konjugativnih (i dualno kvazi-konjugativnih) relacijama dao je ovaj autor u radovima [9] i [10]. U ovom radu uvodimo koncept kvazi-normalnih relacija (i dualno kvazi-normalnih relacija) na skupovima slijedeći koncepte izložene u radovima [5]-[7] i [9]-[10].

[1]Mašinski fakultet, Univerzitet u Banjoj Luci, Bosna i Hercegovina, Vojvoda Stepa Stepanović 71, 78000 Banja Luka, e-mail: bato49@hotmail.com

Neka je X neprazan skup. Svaki podskup $\rho \subseteq X \times X$ je relacija na skupu X. Sa $\mathcal{B}(X)$ označavamo skup svih binarnih relacija na skupu X. Za $\alpha, \beta \in \mathcal{B}(X)$ definišemo

$$\beta \circ \alpha = \{(x,z) \in X \times X : (\exists y \in X)((x,y) \in \alpha \wedge (y,z) \in \beta)\}.$$

Relacija $\beta \circ \alpha$ je komponat relacija α i β. Sem toga, definišemo,

$$\alpha^{-1} = \{(x,y) \in X \times X : (y,x) \in \alpha\}, \quad \alpha^C = X \times X \setminus \alpha.$$

Za $A \subseteq X$ i $B \subseteq X$ i $\alpha \subseteq X \times X$ determinišemo

$$A\alpha = \{y \in X : (\exists x \in A)((x,y) \in \alpha)\}, \;\; \alpha B = \{x \in X : (\exists y \in X)((x,y) \in \alpha)\}.$$

Specijalno, za $A = \{a\}$ i $B = \{b\}$ umjesto $\{a\}\alpha$ pisaćemo $a\alpha$, odnosno, umjesto $\alpha\{b\}$ pisaćemo αb.

Nedefinisani pojmovi i oznake korišteni u ovom tekstu mogu se naći u bilo kojoj knjizi o teoriji skupova ili teoriji polugrupa.

Neka je X neprazan skup. Poznato je da je $\mathcal{B}(X)$ polugrupa. U toj polugrupo, element $Id_X = \{(x,x) : x \in X\}$ je neutralni element. Neke od poznatih elemenata te polugrupe dati su u slijedećoj deskripciji:

Definicija 1.1 . *Za relaciju $\alpha \in \mathcal{B}(X)$ kažemo da je:*
– ***regularna*** *ako postoji relacija $\beta \in \mathcal{B}(X)$ takva da je*

$$\alpha = \alpha \circ \beta \circ \alpha.$$

– ***normalna*** ([6]) *ako postoji relacija $\beta \in \mathcal{B}(X)$ takva da je*

$$\alpha = \alpha \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1}.$$

– ***dualno normalna*** ([5]) *ako postoji relacija $\beta \in \mathcal{B}(X)$ takva da je*

$$\alpha = (\alpha^C)^{-1} \circ \beta \circ \alpha.$$

– ***konjugativna*** ([4]) *ako postoji relacija $\beta \in \mathcal{B}(X)$ takva da je*

$$\alpha = \alpha^{-1} \circ \beta \circ \alpha.$$

– ***dualno konjugativna*** ([4]) *ako postoji relacija $\beta \in \mathcal{B}(X)$ takva da je*

$$\alpha = \alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1}.$$

– ***kvazi-konjugativna*** ([9]) *ako postoji relacija $\beta \in \mathcal{B}(X)$ takva da je*

$$\alpha = \alpha^{-1} \circ \beta \circ \alpha^C.$$

– ***dualno kvazi-konjugativna*** ([9]) *ako postoji relacija $\beta \in \mathcal{B}(X)$ takva da je*

$$\alpha = \alpha^C \circ \beta \circ \alpha^{-1}.$$

– ***kvazi-regularna*** ([10]) *ako postoji relacija $\beta \in \mathcal{B}(X)$ takva da je*

$$\alpha = \alpha^C \circ \beta \circ \alpha.$$

– ***dualno kvazi-regularna*** ([10]) *ako postoji relacija* $\beta \in \mathcal{B}(X)$ *takva da je*

$$\alpha = \alpha \circ \beta \circ \alpha^C.$$

Uvedimo pokratu: $\alpha^1 = \alpha$. Prema izloženom u Definiciji 1.1, ideja je slijedeći: Posmatramo relaciju α na X za koju postoji relacija β na X takva da je

$$\alpha = (\alpha^a)^b \circ \beta \circ (\alpha^c)^d,$$

pri čemu je $a, c \in \{-1, 1\}$ i $b, d \in \{C, 1\}$. Podsjetimo se da vrijedi $(\alpha^{-1})^C = (\alpha^C)^{-1}$. Osim već iskorištenih opcija, izloženih u Definiciji 1.1, postoje i slijedeće mogućnosti:

(10) $\alpha = \alpha^C \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1}$, i dualno $\alpha = (\alpha^C)^{-1} \circ \beta \circ \alpha^C$;

(11) $\alpha = \alpha^{-1} \circ \beta \circ \alpha^{-1}$

(12) $\alpha = \alpha^C \circ \beta \circ \alpha^C$

(13) $\alpha = (\alpha^{-1})^C \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1}$

(14) $\alpha = \alpha^{-1} \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1}$, i dualno $\alpha = (\alpha^C)^{-1} \circ \beta \circ \alpha^{-1}$.

U tekstovima [9] i [10] analizirali smo kvazi-konjugativne (i dualno kvazi-konjugativne) relacije i kvazi-regularne (i dualno kvazi-regularne) relacije. U ovom tekstu, nastavljajući analiziranje ovakvih relacija, analiziraćemo, u slijedećoj sekciji, klase relacije opisane jednakostima (10). Procijenjujući da ova analiza predstavlja novitet u matematici, ovaj tekst, u nešto izmijenjenom obliku, biće ponudjen (na engleskom jeziku) nekom od medjunarodnih matematičkih časopisa. Tekst će se pojaviti pod naslovom: *Quasi-normal relations on sets* ([3]). Takodje, u pripremi je tekst u kojem će biti analizirane relacije koje zadovoljavaju uslov opisan jednakoşću (11). Takva relacija je, očigledno sama sebi dual.

Ovdje izloženi materijal može korisno poslužiti kao osvježenje kursa 'Osnove matematike' na raznim studijskim grupama drugog ciklusa na kojima se osnove matematike izučavaju. Ovaj tekst, čini se, lijepo ilustruje ne samo proces uopštavanje već i matematički proces uvodjenja novih pojmova neznatnim izmjenama već postojećih matematičkih koncepata.

2 Kvazi-normalne relacije

U slijedećim definicijiama uvodimo dvije nove klase relacija na skupu X:

Definicija 2.1 *Za relaciju α na skupu X kažemo da je* ***kvazi-normalna*** *relacija na X ako postoji relacija $\beta \in \mathcal{B}(X)$ takva da je*

$$\alpha = \alpha^C \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1}.$$

Definicija 2.2 *Za relaciju α na skupu X kažemo da je* ***dualno kvazi-normalna*** *relacija na X ako postoji relacija $\beta \in \mathcal{B}(X)$ takva da je*

$$\alpha = (\alpha^C)^{-1} \circ \beta \circ \alpha^C.$$

Da familija kvazi-normalnih relacija nije prazna vidi se iz slijedeće analize: Ako je relacija $\alpha \subseteq X \times X$ takva da je $\alpha^C \circ (\alpha^C)^{-1} = Id_X$, tada imamo

$$\begin{aligned}\alpha &= Id_X \circ \alpha \circ Id_X = (\alpha^C \circ (\alpha^C)^{-1}) \circ \alpha \circ (\alpha^C \circ (\alpha^C)^{-1}) \\ &= \alpha^C \circ ((\alpha^C)^{-1} \circ \alpha \circ \alpha^C) \circ (\alpha^C)^{-1} \\ &= \alpha^C \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1}.\end{aligned}$$

Vidimo da je u ovom slučaju relacija α kvazi-normalna relacija. Analogno, ako za relaciju $\alpha \subseteq X \times X$ vrijedi $(\alpha^C)^{-1} \circ \alpha^C = Id_X$, tada imamo

$$\begin{aligned}\alpha &= Id_X \circ \alpha \circ Id_X = ((\alpha^C)^{-1} \circ \alpha^C) \circ \alpha \circ ((\alpha^C)^{-1} \circ \alpha^C) \\ &= (\alpha^C)^{-1} \circ (\alpha^C \circ \alpha \circ (\alpha^C)^{-1}) \circ \alpha^C \\ &= (\alpha^C)^{-1} \circ \beta \circ \alpha^C.\end{aligned}$$

Prema tome, takva relacija α je dualno kvazi-normalna relacija.

Ovdje izloženi koncepti mogu se reprezentovati korištenjem i nekih drugih kategorijalnog koncepta. Na primjer, korištenjem koncepta 'box relation'[2]: Neka su α i β relacije na skupu X. Za elemente $x, y \in X$ determinišemo 'box proizvod' relacije α i relacije β na slijedeći način:

$$\begin{aligned}(\alpha \,\square\, \beta)(x, y) &= \alpha x \times \beta y \\ &= \{(u, v) \in X \times X : u \in \alpha x \wedge v \in \beta y\}.\end{aligned}$$

Ako su $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{B}(X)$ proizvoljne relacije na skupu X, tada vrijedi

$$\gamma \circ \beta \circ \alpha = (\alpha \,\square\, \gamma^{-1})(\beta).$$

Zaista, imamo:

$$\begin{aligned}(u, v) \in \gamma \circ \beta \circ \alpha &\Longleftrightarrow (\exists a, b \in X)((u, a) \in \alpha \wedge (a, b) \in \beta \wedge (b, v) \in \gamma) \\ &\Longleftrightarrow (\exists (a, b) \in \beta)(u \in \alpha a \wedge v \in \gamma^{-1} b) \\ &\Longleftrightarrow (\exists (a, b) \in \beta)((u, v) \in \alpha a \times \gamma^{-1} b) \\ &\Longleftrightarrow (\exists (a, b) \in \beta)((u, v) \in (\alpha \,\square\, \gamma^{-1})(a, b)) \\ &\Longleftrightarrow (u, v) \in (\alpha \,\square\, \gamma^{-1})(\beta).\end{aligned}$$

Koristeći se ovim alatom, kvazi-normalne relacje opisujemo jednačinom

$$\alpha = ((\alpha^C)^{-1} \,\square\, (\alpha^C)^{-1})(\beta),$$

a dualno kvazi-normalne relacije jednačinom

$$\alpha = (\alpha^C \,\square\, \alpha^C)(\beta).$$

U slijedećoj propoziciji dajemo vezu izmedju ove dvije klase relacija.

Propozicija 2.1 *Neka je α relacija na skupu X. Vrijedi:*
α^{-1} je dualno kvazi-normalna relacija ako i samo ako je α kvazi-normalna.
α je dualno kvazi-normalna ako i samo ako je relacija α^{-1} kvazi-normalna.

[2]Koncept 'box relacije' nedavno sam dobio od kolege Arpada Szaza iz Debrecina.

Dolaz. Za kvazi-normalnu relaciju $\alpha = \alpha^C \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1}$ imamo

$$\alpha^{-1} = (\alpha^C \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1})^{-1} = ((\alpha^{-1})^C)^{-1} \circ \beta^{-1} \circ (\alpha^{-1})^C.$$

Dakle, relacija α^{-1} je dualno kvazi-normalna relacija ako je α kvazi-normalna relacija. Druga tvrdnja se dokazuje analogno. □

Specijalno, za relaciju $\nabla = (Id_X)^C$ na X, budući da imamo $(\nabla^C)^{-1} \circ \nabla^C = Id_X \circ Id_X = Id_X$, zaključujemo da je to (dualno) kvazi-normalna relacija na X.

Naša druga tvrdnja je adaptacija Schein-ovog koncepta izloženog u radu [11], Theorem 1 (ili, [2], Lemma 1.) za naše potrebe. (Radi komparacije, pogledati adaptacije ovog koncepta u radovima [5]-[7], [9] i [10]] za potrebe tih radova.):

Lema 2.1 *Za zadanu relaciju $\alpha \in \mathcal{B}(X)$, relacija $\alpha^* = ((\alpha^C)^{-1} \circ \alpha^C \circ \alpha^C)^C$ je maksimalan element u skupu relacija $\beta \in \mathcal{B}(X)$ takvih da je $\alpha^C \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha$.*

Dokaz: Prvo, podsjetimo se da je $max\{\beta \in \mathcal{B}(X) : \alpha^C \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha\} = \bigcup\{\beta \in \mathcal{B}(X) : \alpha^C \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha\}$. Neka je $\beta \in \mathcal{B}(X)$ uzeto po volji tako da je $\alpha^C \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha$. Dokažimo da vrijedi $\beta \subseteq \alpha^*$. Ako to ne bi bilo tačno, postojao bi par $(x, y) \in \beta$ takav da je $\neg((x, y) \in \alpha^*)$. Ovo posljednje daje:
$(x, y) \in (\alpha^C)^{-1} \circ \alpha^C \circ \alpha^C$
$\iff (\exists u, v \in X)((x, u) \in \alpha^C \wedge (u, v) \in \alpha^C \wedge (v, y) \in (\alpha^C)^{-1})$
$\iff (\exists u, v \in X)((u, x) \in (\alpha^C)^{-1} \wedge (u, v) \in \alpha^C \wedge (y, v) \in \alpha^C)$
$\implies (\exists u, v \in X)((u, x) \in (\alpha^C)^{-1} \wedge (x, y) \in \beta \wedge (y, v) \in \alpha^C \wedge (u, v) \in \alpha^C)$
$\implies (\exists u, v \in X)((u, v) \in \alpha^C \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha \wedge (u, v) \in \alpha^C)$.
Dobili smo kontradikciju. Dakle, mora biti $\beta \subseteq \alpha^*$.

S druge strane, treba dokazati da relacija α^* zadovoljava inkluziju $\alpha^C \circ \alpha^* \circ ({}^{\alpha C})^{-1} \subseteq \alpha$. Uzmimo $(x, y) \in \alpha^C \circ \alpha^* \circ (\alpha^C)^{-1}$ po volji. To znači da postoje elementi u, v u X takvi da je $(x, u) \in (\alpha^C)^{-1}$, $(u, v) \in \alpha^*$ i $(v, y) \in \alpha^C$. Dakle, iz $(x, u) \in (\alpha^C)^{-1}$, $\neg((u, v) \in (\alpha^C)^{-1} \circ \alpha^C \circ \alpha^C)$, $(v, y) \in \alpha^C$, imamo $\neg((x, y) \in \alpha^C)$. Zaista, kad bi bilo $(x, y) \in \alpha^C$ imali bi $(u, v) \in (\alpha^C)^{-1} \circ \alpha^C \circ \alpha^C$ što je nemoguće. Imamo, prema tome, $(x, y) \in \alpha$ i, znači, $\alpha^C \circ \alpha^* \circ (\alpha^C)^{-1}$.

Na osnovu izloženog, zaključujemo da je α^* maksimalan element u familiji relacija $\beta \in \mathcal{B}(X)$ takvih da je $\alpha^C \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha$. □

Lema 2.2 *Za zadanu relaciju $\alpha \in \mathcal{B}(X)$, relacija $\alpha_* = (\alpha^C \circ \alpha^C \circ (\alpha^C)^{-1})^C$ je maksimalan element u skupu relacija $\beta \in \mathcal{B}(X)$ takvih da je $(\alpha^C)^{-1} \circ \beta \circ \alpha^C \subseteq \alpha$.*

U slijedećoj propoziciji opisujemo neke osobine relacija α^* i α_* :

Propozicija 2.2 *Za $\alpha \in \mathcal{B}(X)$ imamo*
(a) $\alpha^* = \{(x, y) \in X \times X : \alpha^C \circ \{(x, y)\} \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha\}$
$\quad = \{(x, y) \in X \times X : x\alpha^C \times y\alpha^C \subseteq \alpha\}$
(b) $\alpha_* = \{(x, y) \in X \times X : (\alpha^C)^{-1} \circ \{(x, y)\} \circ \alpha^C \subseteq \alpha\}$

$= \{(x,y) \in X \times X : \alpha^C x \times \alpha^C y \subseteq \alpha\}$.

(c) $(\alpha^*)^{-1} = (\alpha^{-1})_*$.

(d) $(\alpha_*)^{-1} = (\alpha^{-1})^*$.

Dokaz. (a) Lako se provijerava da je

$\alpha^* = \{(x,y) \in X \times X : \alpha^C \circ \{(x,y)\} \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha\}$
$= \{(x,y) \in X \times X : x\alpha^C \times y\alpha^C \subseteq \alpha\}$.

Ako za elemente x, y iz X vrijedi $\alpha^C \circ \{(x,y)\} \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha$, tada imamo $\{(x,y)\} \subseteq \alpha^*$. Obrnuto, uzmimo po volji $(x,y) \in \alpha^*$. Tada postoji relacija $\beta \in \mathcal{B}(X)$ takva da je $(x,y) \in \beta$ i takva da je $\alpha^C \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha$. Budući da vrijedi

$$\alpha^C \circ \{(x,y)\} \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha^C \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha,$$

zaključujemo da vrijedi $\alpha^* = \{(x,y) \in X \times X : \alpha^C \circ \{(x,y)\} \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha\}$.

S druge strane, jednakost $\alpha^C \circ \{(x,y)\} \circ (\alpha^C)^{-1} = x\alpha^C \times y\alpha^C$ se provjerava direktno. Imamo:

$$\begin{aligned}
(u,v) \in \alpha^C \circ \{(x,y)\} \circ (\alpha^C)^{-1} &\Longleftrightarrow (u,x) \in (\alpha^C)^{-1} \wedge (y,v) \in \alpha^C \\
&\Longleftrightarrow (x,u) \in \alpha^C \wedge (y,v) \in \alpha^C \\
&\Longleftrightarrow u \in x\alpha^C \wedge v \in y\alpha^C \\
&\Longleftrightarrow (u,v) \in x\alpha^C \times y\alpha^C.
\end{aligned}$$

(b) Analogno, lako se provijerava da je

$\alpha_* = \{(x,y) \in X \times X : (\alpha^C)^{-1} \circ \{(x,y)\} \circ \alpha^C \subseteq \alpha\}$
$= \{(x,y) \in X \times X : \alpha^C x \times \alpha^C y \subseteq \alpha\}$.

(c)
$$\begin{aligned}
(\alpha^*)^{-1} &= \{(x,y) \in X \times X : x\alpha^C \times y\alpha^C \subseteq \alpha\}^{-1} \\
&= \{(y,x) \in X \times X : x\alpha^C \times y\alpha^C \subseteq \alpha\} \\
&= \{(x,y) \in X \times X : y\alpha^C \times x\alpha^C \subseteq \alpha\} \\
&= \{(x,y) \in X \times X : x\alpha^C \times y\alpha^C \subseteq \alpha^{-1}\} \\
&= \{(x,y) \in X \times X : (\alpha^C)^{-1}x \times (\alpha^C)^{-1}y \subseteq \alpha^{-1}\} \\
&= \{(x,y) \in X \times X : (\alpha^{-1})^C x \times (\alpha^{-1})^C y \subseteq \alpha^{-1}\} \\
&= (\alpha^{-1})_* \,.
\end{aligned}$$

(d) Dokaz tvrdnje (d) je analogan dokazu tvrdnje (c). □

U sljedećoj tvrdnji dajemo jednu karakterizaciju dualno kvazi-normalnih relacija. To je naša adaptacija koncepta izloženog u [4], Theorem 7.2. (Takodje, na ovu tvrdnju možemo gledati i kao našu adaptaciju slijedećih teorama: Theorem 2.3 u [7], Theorem 2.4 u [6] i Theorem 2.3 u [5], zatim Theorem 2.1. u [10], odnosno Theorem 2.1 u [9]).

Teorem 2.1 *Za relaciju α na skupu X sljedeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) *α je dualno kvazi-normalna relacija.*

(2) *Za $(x,y) \in \alpha$ postoje elementi $u, v \in X$ takvi da vrijedi:*

(a) $(x,u) \in \alpha^C$ *i* $(y,v) \in \alpha^C$

(b) $(\forall s,t \in X)((s,u) \in \alpha^C (t,v) \in \alpha^C \Longrightarrow (s,t) \in \alpha)$;

(3) $\alpha \subseteq (\alpha^C)^{-1} \circ \alpha_* \circ \alpha^C$.

Dokaz. (1) $\Longrightarrow$ (2). Neka je α dualno kvazi-normalna relacija, tj. neka postoji relacija β takva da vrijedi $\alpha = (\alpha^C)^{-1} \circ \beta \circ \alpha^C$. Neka je $(x,y) \in \alpha$. Tada postoje elementi $u, v \in X$ takvi da je $(x,u) \in \alpha^C$, $(u,v) \in \beta$, $(v,y) \in (\alpha^C)^{-1}$. Odavde slijedi da postoje elementi $u, v \in X$ takvi da je $(x,u) \in \alpha^C$ i $(y,v) \in \alpha^C$. Ovim je uslov (a) dokazan. Preostaje da provjerimo uslov (b). Neka su elementi $s, t \in X$ uzeti po volji takvi da je $(s,u) \in \alpha^C$ i $(t,v) \in \alpha^C$. Sada, iz $(s,u) \in \alpha^C$, $(u,v) \in \beta$, $(v,t) \in (\alpha^C)^{-1}$ slijedi $(s,t) \in (\alpha^C)^{-1} \circ \beta \circ \alpha^C = \alpha$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Uzmimo relaciju

$$\alpha' = \{(u,v) \in X \times X : (\forall s,t \in X)((s,u) \in \alpha^C (v,t) \in \alpha^C \Longrightarrow (s,t) \in \alpha)\}$$

i pokažimo da vrijedi $(\alpha^C)^{-1} \circ \alpha' \circ \alpha^C = \alpha$. Uzmimo $(x,y) \in \alpha$. Tada postoje elementi $u, v \in X$ takvi da vrijede iskazi (a) i (b). Imamo $(u,v) \in \alpha'$, prema definiciji relacije α'. Dalje, iz $(x,u) \in \alpha^C$, $(u,v) \in \alpha'$ i $(v,y) \in (\alpha^C)^{-1}$ slijedi $(x,y) \in (\alpha^C)^{-1} \circ \alpha' \circ \alpha^C$. Ovim je pokazano da vrijedi $\alpha \subseteq (\alpha^C)^{-1} \circ \alpha' \circ \alpha^C$. Obrnuto, neka je par $(x,y) \in (\alpha^C)^{-1} \circ \alpha' \circ \alpha^C$ uzet po volji. Dakle, postoje elementi $u, v \in X$ takvi da je $(x,u) \in \alpha^C$, $(u,v) \in \alpha'$ i $(v,y) \in (\alpha^C)^{-1}$, odnosno takvi da je $(x,u) \in \alpha^C$ i $(y,v) \in \alpha^C$. Odavde, prema definiciji relacije α', slijedi da je $(x,y) \in \alpha$ obzirom da je $(u,v) \in \alpha'$. Dakle, $(\alpha^C)^{-1} \circ \alpha' \circ \alpha^C \subseteq \alpha$. Ovim je pokazano da je relacija α dualno kvazi-normalna relacija na skupu X jer postoji relacija α' takva da je $(\alpha^C)^{-1} \circ \alpha' \circ \alpha^C = \alpha$.

(1) $\Longleftrightarrow$ (3). Neka je α dualno kvazi-normalna relacija na X. Tada postoji namjenje jedna relacija β takva da je $\alpha = (\alpha^C)^{-1} \circ \beta \circ \alpha^C$. Budući da je $\alpha_* = \bigcup\{\beta \in \mathcal{B}(X) : (\alpha^C)^{-1} \circ \beta \circ \alpha^C \subseteq \alpha\}$, imamo $\beta \subseteq \alpha_*$ pa time i $\alpha = (\alpha^C)^{-1} \circ \beta \circ \alpha^C \subseteq (\alpha^C)^{-1} \circ \alpha_* \circ \alpha^C$. Obrnuto, neka za relaciju α vrijedi $\alpha \subseteq (\alpha^C)^{-1} \circ \alpha_* \circ \alpha^C$. Kako je α_* maksimalna relacija medju relacijama β za koje vrijedi $(\alpha^C)^{-1} \circ \beta \circ \alpha^C \subseteq \alpha$, zaključujemo da je $\alpha \subseteq (\alpha^C)^{-1} \circ \alpha \circ \alpha^C \subseteq \alpha$, odakle slijedi da je $\alpha = (\alpha^C)^{-1} \circ \alpha_* \circ \alpha^C$, tj. relacija α je dualno kvazi-normalna relacija. □

U slijedećoj tvrdnji, kao podlijedici prethodne, pokazujmeo potrebne i dovoljne uslove da relacija anti-uredjenja $\nleqslant$ bude dualno kvazi-normalna relacija.

Posledica 2.1 *Neka je $(X, \leqslant)$ parcijalno uredjen skup. Relacija $\nleqslant$ je dualno kvazi-normalna relacija na X ako i samo ako za svako $x, y \in X$ takve da je $x \nleqslant y$ postoje $u, v \in X$ takvi da vrijedi:*

(a') $x \leq u \wedge y \leq v$, *i*

(b') $(\forall z \in X)(z \nleqslant u \vee z \nleqslant v)$.

Dokaz. Neka je relacija $\nleqslant$ dualno kvazi-normalna relacija na X i neka za elemente $x, y \in X$ vrijedi $x \nleqslant y$. Tada, prema prethodnom teoremu, postoje elementi $u, v \in X$ takvi da vrijedi

(a) $x \leq u \wedge y \leq v$, i

(b) $(\forall s,t \in X)((s \leq u \wedge t \leq v) \Longrightarrow s \nleqslant t)$,

Neka je element z uzet po volji i ako u prethodnu formulu (b) stavimo $z = s = t$

dobićemo

$$(z \leq u \,\wedge\, z \leq v) \Longrightarrow z \nleq z$$

što je kontradikcija. Dakle, $\neg(z \leq u \wedge z \leq v)$. Odavde slijedi $z \leq^C u \,\vee\, z \nleq v$. Obrnuto, uzmimo po volji elemente $x, y \in X$ za koje je $x \leq^C y$. Postoje elementi $u, v \in X$ takvi da relacija $\nleq$ zadovoljava formule (a') i (b') u iskazu teorema:

(a') $x \leq u \wedge y \leq v$, i

(b') $(\forall z \in X)(z \nleq u \,\vee\, z \nleq v)$.

Uzmimo elemente $s, t \in X$, po volji, takve da je $s \leq u \wedge t \leq v$. S druge strane, iz tvrdnje (b'), za $z = s$, u ovom slučaju, $s \nleq u \vee s \leq^C v$, budući da je druga opcija $s \nleq u$, zbog $s \leq u$, nemoguća, slijedi $s \nleq v$. Obavde imamo $s \nleq t \vee t \nleq v$. Kako je druga opcija, zbog $t \leq v$, nemoguća, preostaje da je $s \nleq t$. Dakle, elementi u i v zadovoljavaju uslov (b) prethodnog teorema. Prema tome, relacija $\nleq$ je dualno kvazi-normalna relacija. □

Tvrdnje, analogne tvrdnjama iskazanim u Teoremu 2.1 i Posledici 2.1, koje se odnose na kvazi-normalne relacije, iskazane su u slijedeće dvije propozicije.

Teorem 2.2 . *Za relaciju α na skupu X sljedeći uslovi su ekvivalentni:*
(1) *α je kvazi-normalna relacija.*
(2) *Za $(x, y) \in \alpha$ postoje elementi $u, v \in X$ takvi da vrijedi:*
  (a) $(u, x) \in \alpha^C$ *i* $(v, y) \in \alpha^C$
  (b) $(\forall s, t \in X)((u, s) \in \alpha^C (v, t) \in \alpha^C \Longrightarrow (s, t) \in \alpha)$*;*
(3) $\alpha \subseteq \alpha^C \circ \alpha^* \circ (\alpha^C)^{-1}$.

Posledica 2.2 *Neka je $(X, \leq)$ parcijalno uredjen skup. Relacija $\nleq$ je kvazi-normalna relacija na X ako i samo ako za svako $x, y \in X$ takve da je $x \nleq y$ postoje $u, v \in X$ takvi da vrijedi:*
(a') $u \leq x \wedge v \leq y$*, i*
(b') $(\forall z \in X)(u \nleq z \vee v \nleq z)$.

Primjer. Neka α je dualno kvazi-normalna relacija. Tada postoji relacija β na X takva da je $\alpha = (\alpha^C)^{-1} \circ \beta \circ \alpha^C$. Ako je θ relacija ekvivalencije na X, definišimo relaciju α/θ na slijedeći način

$$\alpha/\theta = \{(a\theta, b\theta) \in X/\theta \times X/\theta : (a, b) \in \alpha\}.$$

Za ovako konstruisanu relaciju α/θ na X/θ imamo

$$\alpha/\theta = ((\alpha/\theta)^C)^{-1} \circ \beta/\theta \circ (\alpha/\theta)^C.$$

Naime, vrijedi

$(a\theta, b\theta) \in \alpha/\theta \Longleftrightarrow (a, b) \in \alpha = (\alpha^C)^{-1} \circ \beta \circ \alpha^C$

$\Longleftrightarrow (\exists x, y \in X)((a, x) \in \alpha^C \wedge (x, y) \in \beta \wedge (y, b) \in (\alpha^C)^{-1})$

$\Longleftrightarrow (\exists x, y \in X)(\neg((a, x) \in \alpha) \wedge (x, y) \in \beta \wedge \neg((b, y) \in \alpha))$

$\Longleftrightarrow (\exists x, y \in X/)(\neg((a\theta, x\theta) \in \alpha/\theta) \wedge (x\theta, y\theta) \in \alpha/\theta \wedge \neg((b\theta, y\theta) \in \alpha/\theta))$

$\Longleftrightarrow (\exists x, y \in X)((a\theta, x\theta) \in (\alpha/\theta)^C \wedge (x, y) \in \beta/\theta \wedge (y, b) \in ((\alpha/\theta)^C)^{-1})$
$\Longleftrightarrow (a/\theta, b/\theta)\alpha/\theta = ((\alpha/\theta)^C)^{-1} \circ \beta/\theta \circ (\alpha/\theta)^C.$

Dakle, relacija α/θ je dualno kvazi-normalna relacija na X/θ.

Budući da je $\pi : X \longrightarrow X/\theta$ surjektivna funkcija, tada je i relacija $\pi^{-1}(\alpha/\theta)$, definisana sa

$$(a, b) \in \pi^{-1}(\alpha/\theta) \Longleftrightarrow (\pi(a), \pi(b)) \in \alpha/\theta,$$

takodje dualno kvazi-normalna relacija na X. Zaista, imamo:
$(a, b) \in \pi^{-1}(\alpha/\theta) \Longleftrightarrow (\pi(a), \pi(b)) \in \alpha/\theta = ((\alpha/\theta)^C)^{-1} \circ \beta/\theta \circ (\alpha/\theta)^C \Longleftrightarrow$
$(\exists u\theta, v\theta \in X/\theta)((\pi(a), u\theta) \in (\alpha/\theta)^C \wedge (u\theta, v\theta) \in \alpha/\beta \wedge (u\theta, \pi(b)) \in ((\alpha/\theta)^C)^{-1})$
$\Longleftrightarrow (\exists u\theta, v\theta \in X/\theta)(\neg((\pi(a), u\theta) \in \alpha/\theta) \wedge (u\theta, v\theta) \in \beta/\theta \wedge \neg(\pi(b), v\theta) \in \alpha/\theta))$
$\Longleftrightarrow (\exists u, v \in X)(\neg((a, u) \in \pi^{-1}(\alpha/\theta)) \wedge (u, v) \in \pi^{-1}(\alpha/\theta) \wedge \neg((b, v) \in \pi^{-1}(\alpha/\theta)))$
$\Longleftrightarrow (\exists u, v \in X)((a, u) \in (\pi^{-1}(\alpha/\theta))^C \wedge (u, v) \in \pi^{-1}(\alpha/\theta) \wedge (v, b) \in ((\pi^{-1}(\alpha/\theta))^C)^{-1})$
$\Longleftrightarrow (a, b) \in ((\pi^{-1}(\alpha/\theta))^C)^{-1} \circ \pi^{-1}(\beta/\theta) \circ (\pi^{-1}(\alpha/\theta))^C.$

Ovim je kokazano da je $\pi^{-1}(\alpha/\theta)$ takodje dualno kvazi-normalna relacija na skupu X.

Sa $\mathcal{E}(X)$ označimo familiju relacija ekvivalencije na skupu X. Uočimo da dualno kvazi-normalna relacija α na skupu X formira podfamiliju $\mathcal{N}(\alpha) = \{\pi^{-1}(\alpha/\theta) : \theta \in \mathcal{E}(X)\}$ dualno kvazi-normalnih relacija u $\mathcal{B}(X)$. Specijalno, podfamilija $\mathcal{N}(\nabla) = \{\pi^{-1}(\nabla/\theta) : \mathcal{E}(X)\}$ je jedna takva familija.

Napomene. Sasvim opravdano je postaviti pitanja:
1. Da li ima kvazi-normalnih (dualno kvazi-normalnih) relacija na skupu X osim ovdje pomenutih?
2. Da li ima relacija na X koje su jednog tipa a nisu ostalih tipova, tj. koliko se gore pomenute familije relacija medjusobno razlikuju?

References

[1] H.J.Bandelt: *Regularity and complete distributivity.* Semigroup Forum, 19(1980), 123-126

[2] H.J.Bandelt: *On regularity classes of binary relations.* In: *Universal Algebra and Applications.* Banach Center Publications, vol. 9(1982), 329-333

[3] S.Crvenković and D.A.Romano: *Quasi-normal relation on sets*; (To appear)

[4] D.Hardy and M.Petrich: *Binary relations as lattice isomorphisms*; Ann. Mat. Pura Appl, 177(1)(1999), 195-224

[5] Jiang Guanghao and Xu Luoshan: *Conjugative relations and applications.* Semigroup Forum, 80(1)(2010), 85-91.

[6] Jiang Guanghao and Xu Luoshan: *Dually normal relations on sets*; Semigroup Forum, 85(1)(2012), 75-80

[7] Jiang Guanghao, Xu Luoshan, Cai Jin and Han Guiwen: *Normal relations on sets and applications*; Int. J. Contemp. Math. Sciences, 6(15)(2011), 721 - 726

[8] G.Markowsky: *Idempotents and product representations with applications to the semigroup of binary relations*. Semigroup Forum, 5(1972), 95-119

[9] D.A.Romano: *Quasi-conjugative relations on sets*; MAT-KOL, XIX (3)(2013), 5-10

[10] D.A.Romano: *Quasi-regular relations - A new class of relations on sets*; Publications de l'Institut Mathmatique, (To appear in 2013)

[11] B.M.Schein: *Regular elements of the semigroup of all binary relations*. Semigroup Forum, 13(1976), 95-102

[12] K.A.Zaretskiĭ: *Regular elements of the semigroup of binary relations*, Uspehi Matem. Nauk, 3(105)(1962), 177-179 (in Russian).

[13] K.A. Zareckiĭ: *The semigroup of binary relations*. Mat. Sbornik, 61(196), 291-305 (in Russian).

[14] Xu Xiao-quan and Liu Yingming. *Relational representations of hypercontinuous lattices*, in: *Domain Theory, Logic, and Computation*, Kluwer Academic Publisher, 2003, 65-74.

Primljeno u redakciju 10.12.2012; revidirana verzija 10.02.2013;
dostupno na internetu od 18.02.2013