MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XX(1)(2014), 51-58 **ISSN 1986-5828 (o)**

JEDNA INTERESANTNA METODA DOKAZIVANJA NEJEDNAKOSTI

(An Interesting Method for Proving Inequalities)

Šefket Arslanagić
Sarajevo, Bosna i Hercegovina
asefket@pmf.unsa.ba

Sažetak: U ovom radu je data jedna interesantna metoda za dokazivanje algebarskih nejednakosti. Ona se sastoji u sljedećem za slučaj nejednakosti od tri promjenljive $f(x,y,z)\geq 0$; $(x,y,z>0)$: Dokažemo najprije da vrijedi nejednakost

$$f(x,y,z)\geq f(t,t,z),$$

gdje je npr. $t=\frac{x+y}{2}$. Zatim dokažemo da vrijedi nejednakost

$$f(t,t,z)\geq 0.$$

Ključne riječi i izrazi: metoda dokazivanja, algebarska nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine, Nesbitova nejednakost.

Abstract: In this paper is gived one interesting method for proving algebraic inequalities. This method for the case of algebraic inequality for three variables $f(x,y,z)\geq 0$; $(x,y,z>0)$ says: We prove first that is valid the inequality

$$f(x,y,z)\geq f(t,t,z)$$

where is for example $t=\frac{x+y}{2}$.
Then we prove that holds the inequality

$$f(t,t,z)\geq 0.$$

Key words and phrases: method for proving, algebraic inequality between arithmetic and geometric means, Nesbitt's inequality.

AMS Subject Classification (2010): 97 F 50
ZDM Subject Classification (2010): F 50, N 50

Dobro nam je poznata nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja x,y,z koja glasi:

$$\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}, \qquad (1)$$

gdje jednakost vrijedi u slučaju kada je $x=y=z$.

U [1] je dato šest raznih dokaza nejednakosti (1). Sada ćemo dati jednu interesantnu metodu pomoću koje ćemo dokazati nejednakost (1). Ova metoda se inače može uspješno koristiti za dokazivanje raznih algebarskih nejednakosti.

Dokaz 1. Nejednakost (1) ekvivalentna sa nejednakošću:

$$f(x,y,z)=x+y+z-3\sqrt[3]{xyz}\geq 0;\ (x,y,z>0). \qquad (1')$$

U prvom koraku ćemo dokazati da vrijedi nejednakost:

$$f(x,y,z)\geq f(t,t,z), \qquad (2)$$

gdje je $t=\dfrac{x+y}{2}$.

Zbog poznate nejednakosti $\dfrac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ slijedi da je $t^2\geq xy$.

Imamo sada

$$f(x,y,z)-f(t,t,z)=x+y+z-3\sqrt[3]{xyz}-\left(2t+z-3\sqrt[3]{t^2z}\right)=3\left(\sqrt[3]{t^2z}-\sqrt[3]{xyz}\right)\geq 0,$$

a odavde slijedi da je nejednakost (2) tačna.

Dokazaćemo sada da vrijedi nejednakost:

$$f(t,t,z)=2t+z-3\sqrt[3]{t^2z}\geq 0. \qquad (3)$$

Imamo

$$f(t,t,z)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2t+z\geq 3\sqrt[3]{t^2z}$$

$$\Leftrightarrow (2t+z)^3\geq 27t^2z$$

$$\Leftrightarrow 8t^3+12t^2z+6tz^2+z^3-27t^2z\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 8t^3-15t^2z+6tz^2+z^3\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 8t^3-8t^2z-6t^2z+6tz^2-t^2z+z^3\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 8t^2(t-z)-6tz(t-z)-z\left(t^2-z^2\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-z)\left[8t^2-6tz-z(t+z)\right]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-z)\left(8t^2-8tz+tz-z^2\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-z)\left[8t(t-z)+z(t-z)\right]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-z)^2(8t+z)\geq 0,$$

što znači da je nejednakost (3) tačna.

Sada iz (2) i (3) dobijamo nejednakost (1'), odnosno nejednakost (1). □

Dokaz 2. Sada ćemo dokazati da vrijedi nejednakost:

$$f(x,y,z) \geq f(t,t,z), \qquad (4)$$

gdje je $t = \sqrt{xy}$.

Zbog poznate nejednakosti $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ slijedi da je $2t \leq x+y$, tj. $x+y-2t \geq 0$.

Imamo sada

$$f(x,y,z) - f(t,t,z) = x+y+z-3\sqrt[3]{xyz} - \left(2t+z-3\sqrt[3]{xyz}\right) = x+y-2t \geq 0,$$

a odavde slijedi da je nejednakost (4) tačna.

Dokazaćemo sada da vrijedi nejednakost:

$$f(t,t,z) = 2t+z-3\sqrt[3]{t^2z} \geq 0. \qquad (5)$$

Imamo

$$f(t,t,z) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2t+z \geq 3\sqrt[3]{t^2z}$$

$$\Leftrightarrow (2t+z)^3 \geq 27t^2z$$

$$\Leftrightarrow 8t^3+12t^2z+6tz^2+z^3-27t^2z \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 8t^3-15t^2z+6tz^2+z^3 \geq 0$$

(pokazano u Dokazu 1.)

$$\Leftrightarrow (t-z)^2(8t+z) \geq 0,$$

što znači da je nejednakost (5) tačna.

Iz nejednakosti (4) i (5) slijedi nejednakost (1'), odnosno nejednakost (1). □

Sada ćemo koristeći ovu metodu dokazati poznatu **Nesbittovu nejednakost** čijih se deset dokaza nalazi u [2], još jedanaest u [3] i jedan u [4]. Riječ je o sljedećoj nejednakosti:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2};\ (a,b,c>0). \qquad (6)$$

Dokaz: U prvom koraku ćemo dokazati nejednakost:

$$f(a,b,c) \geq f(t,t,c), \qquad (7)$$

gdje je $f(a,b,c) = \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ i $t = \frac{a+b}{2}$.

Imamo

$$f\left(a,b,c\right)-f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\left(\frac{a+b}{a+b+2c}+\frac{a+b}{a+b+2c}+\frac{c}{a+b}\right)$$

$$=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}-\frac{2\left(a+b\right)}{a+b+2c}=\frac{a^3+ca^2+cb^2+b^3-2abc-ab^2-a^2b}{\left(b+c\right)\left(c+a\right)\left(a+b+2c\right)}. \qquad (8)$$

Na osnovu $AM-GM$ nejednakosti za $n=3$ i $n=2$ imamo:

$$a^3+ca^2+cb^2+b^3=\frac{a^3+a^3+b^3}{3}+\frac{a^3+b^3+b^3}{3}+ca^2+cb^2\geq a^2b+ab^2+2abc. \qquad (9)$$

Sada iz (8) i (9) slijedi:

$$f\left(a,b,c\right)-f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)\geq 0\text{, tj.}$$

$$f\left(a,b,c\right)\geq f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right),$$

a ovo je nejednakost (7).

Preostaje nam još da dokažemo nejednakost:

$$f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)=f\left(t,t,c\right)\geq\frac{3}{2}. \qquad (10)$$

Imamo

$$f\left(t,t,c\right)\geq\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{t}{t+c}+\frac{t}{t+c}+\frac{c}{2t}\geq\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2t}{t+c}+\frac{c}{2t}-\frac{3}{2}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4t^2+c\left(t+c\right)-3t\left(t+c\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow t^2-2tc+c^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(t-c\right)^2\geq 0,$$

što je svakako tačno, pa je i nejednakost (10) tačna.

Sada iz nejednakosti (7) i (10) slijedi nejednakost $f\left(a,b,c\right)\geq\frac{3}{2}$, tj. nejednakost (6).

Vrijedi jednakost u (6) ako i samo ako je $a=b=c$. □

Sada ćemo koristeći ovu metodu dokazati jednu algebarsku nejednakost sa četiri promjenljive koja glasi:

$$a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2+a^2c^2+b^2d^2\,, \qquad (11)$$

gdje su $a,b,c,d \geq 0$.

Dokaz: Data nejednakost je simetrična pa ne umanjujući opštost možemo pretpostaviti da je $a \geq b \geq c \geq d$. Neka je

$$f(a,b,c,d)=a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd-a^2b^2-b^2c^2-c^2d^2-d^2a^2-a^2c^2-b^2d^2\,,$$

odnosno

$$f(a,b,c,d)=a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd-a^2c^2-b^2d^2-\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right).$$

Imamo sada

$$f(a,b,c,d)-f\left(\sqrt{ac},b,\sqrt{ac},d\right)=a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd-a^2c^2-b^2d^2-\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right)-$$

$$\left[a^2c^2+b^4+a^2c^2+d^4+2abcd-a^2c^2-b^2d^2-2ac\left(b^2+d^2\right)\right]=$$

$$=a^4+c^4-2a^2c^2-\left(b^2+d^2\right)\left(a^2+c^2-2ac\right)=$$

$$=\left(a^2-c^2\right)^2-\left(b^2+d^2\right)(a-c)^2=(a-c)^2\left[(a+c)^2-\left(b^2+d^2\right)\right]=$$

$$=(a-c)^2\left[\left(a^2-b^2\right)+\left(c^2-d^2\right)+2ac\right]\geq 0\,,$$

jer je $a \geq b \geq c \geq d$. Dakle, imamo:

$$f(a,b,c,d)\geq f\left(\sqrt{ac},b,\sqrt{ac},d\right). \qquad (12)$$

Dokazaćemo sada da je

$$f\left(\sqrt{ac},b,\sqrt{ac},d\right)\geq 0\,, \qquad (13)$$

odnosno stavljajući da je $a=b=c=t\geq d$:

$$f(t,t,t,d)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3t^4+d^4+2t^3d \geq 3t^4+3t^2d^2$$

$$\Leftrightarrow d^4+2t^3d \geq 3t^2d^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^4+t^3d+t^3d}{3}\geq \sqrt[3]{d^4\cdot t^3d\cdot t^3d}\,,$$

a ovo je $AM-GM$ nejednakost za $n=3$ koja je tačna pa je i nejednakost (13) tačna.

Sada iz (12) i (13) slijedi data nejednakost (11).

Vrijedi jednakost u (11) ako i samo ako je $a=b=c=d$ ili $a=b=c,\, d=0$, te $a=b=d,\, c=0$, odnosno $a=c=d,\, b=0$ i $b=c=d,\, a=0$. □

Na kraju ćemo dati dva dokaza jedne nejednakosti i to koristeći prezentiranu metodu a zatim dati dokaz na drugi način ne koristeći ovu metodu. Riječ je o sljedećoj nejednakosti:

$$a^4+b^4+c^4-3abc\geq\frac{3}{8}, \qquad (14)$$

gdje su a,b,c realni brojevi takvi da je $a+b+c=0$ i $c\geq 1$.

Dokaz 1. Iz datog uslova $a+b+c=0$ slijedi:

$$a^4+b^4+c^4=2\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right),$$

pa je sada dovoljno dokazati da vrijedi nejednakost:

$$f(a,b,c)\geq\frac{3}{8},$$

gdje je $f(a,b,c)=2\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)-3abc$.

Imamo sada

$$f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)=f\left(-\frac{c}{2},-\frac{c}{2},c\right)=2\left(\frac{c^4}{16}+\frac{c^4}{4}+\frac{c^4}{4}\right)-\frac{3c^3}{4}=$$

$$=\frac{c^3}{4}\left(\frac{9c}{2}-3\right)\geq\frac{1}{4}\left(\frac{9}{2}-3\right)=\frac{3}{8}\ \text{(zbog } c\geq 1\text{)}. \qquad (15)$$

Dalje slijedi

$$f(a,b,c)-f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)=$$

$$=2\left[a^2b^2-\left(\frac{a+b}{2}\right)^4\right]+2c^2\left[a^2+b^2-2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]-3c\left[ab-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]=$$

$$=2\left[ab-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\left[ab+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]+2c^2\cdot\frac{2a^2+2b^2-a^2-b^2-2ab}{2}-3c\cdot\frac{4ab-a^2-b^2-2ab}{4}=$$

$$=\frac{(a-b)^2}{4}\left[-2\left(ab+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)+4c^2+3c\right]=$$

$$=\frac{(a-b)^2}{4}\left(4c^2+3c-2ab-\frac{c^2}{2}\right)=\frac{(a-b)^2}{4}\left(\frac{5}{2}c^2+3c+a^2+b^2\right)\geq 0,$$

odnosno

$$f(a,b,c)\geq f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right). \qquad (16)$$

Sada, iz (15) i (16), dobijamo:

$$f(a,b,c)\geq f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)\geq\frac{3}{8}.$$

Vrijedi jednakost u (14) tj. $f(a,b,c)=\frac{3}{8}$ ako i samo ako je $a=b=-\frac{1}{2}$ i $c=1$. □

Dokaz 2. Iz uslova $a+b+c=0$, slijedi $a+b=-c\le -1$ (zbog uslova $c\ge 1$). Razlikovaćemo dva slučaja:

1^0 Jedan od brojeva a ili b je nenegativan. Ne umanjujući opštost pretpostavićemo da je $a\ge 0$. Tada je $b\le 0$ i imamo sada da je $-abc\ge 0$. Slijedi sada

$$a^4+b^4+c^4-3abc\ge c^4\ge 1>\frac{3}{8},$$

što znači da je data nejednakost (14) tačna.

2^0 Oba broja a i b su nepozitivna, tj. $a,b\le 0$. Tada je $-a=m>0$ i $-b=n>0$, tj. $m+n=c\ge 1$ te je sada potrebno dokazati da vrijedi nejednakost:

$$m^4+n^4+c^4-3mnc\ge\frac{3}{8}. \qquad (17)$$

Imamo sada

$$m^4+n^4+c^4-3mnc=m^4+n^4+(m+n)^4-3mn(m+n)=$$

$$=m^4+n^4+m^4+4m^3n+6m^2n^2+4mn^3+n^4-3m^2n-3mn^2=$$

$$=2m^4+2n^4+m^3n+mn^3+\left(3m^3n+3m^2n^2+3m^2n^2+3mn^3\right)-\left(3m^2n+3mn^2\right)=$$

$$=2m^4+2n^4+m^3n+mn^3+(m+n)\left(3m^2n+3mn^2\right)-\left(3m^2n+3mn^2\right)=$$

$$=2m^4+2n^4+m^3n+mn^3+(m+n-1)\left(3m^2n+3mn^2\right)\ge$$

$$\ge 2m^4+2n^4+m^3n+mn^3=m^4+n^4+m^3(m+n)+n^3(m+n)=$$

$$=\left(m^4+n^4\right)+(m+n)\left(m^3+n^3\right)\ge\frac{1}{8}+1\cdot\frac{2}{8}=\frac{3}{8},$$

jer je $m+n=c\ge 1$ i također:

$$\sqrt[4]{\frac{m^4+n^4}{2}}\ge\frac{m+n}{2}\ge\frac{1}{2} \text{ i } \sqrt[3]{\frac{m^3+n^3}{2}}\ge\frac{m+n}{2}\ge\frac{1}{2},$$

te odavde

$$m^4+n^4\ge\frac{1}{8} \text{ i } m^3+n^3\ge\frac{2}{8}.$$

Ovim je dokazana nejednakost (17), odnosno data nejednakost (14).

Vrijedi jednakost u (17) i (14) ako i samo ako je $m+n-1=0$ i $m=n$, tj. $m=n=\frac{1}{2}$ te $a=b=-\frac{1}{2}$ i $c=1$. □

Svakako je Dokaz 1. kraći i elegantniji od Dokaza 2., što ide u prilog tvrdnji da je izložena metoda dokazivanja nejednakosti veoma efikasna i značajna.

Dobro bi bilo da budući čitaoci ovog članka pokušaju primjeniti ovu metodu kod dokazivanja nekih algebarskih nejednakosti sa tri, četiri i više promjenljivih.

Inače, ova metoda dokazivanja nejednakosti je u matematičkoj literaturi na engleskom jeziku poznata pod nazivom **Method Mixing Variables (MMV)** ili u prevodu **Metoda zamjene (mješanja) promjenljivih**.

LITERATURA

[1] Arslanagić, Š., *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.
[2] Arslanagić, Š., *Matematička čitanka 1*, Grafičar promet, d.o.o., Sarajevo, 2009.
[3] Arslanagić, Š., *Matematička čitanka 2*, Grafičar promet, d.o.o., Sarajevo, 2010.
[4] Arslanagić, Š., *Matematička čitanka 5*, Grafičar promet, d.o.o., Sarajevo, 2013.
[5] Cvetkovski, Z., *Inequalities – Theorems, Techniques and Selected Problems*, Springer-Verlag Berlin/Heidelberg, 2012.
[6] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E., Fink, A.M., *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1993.