MAT-KOL (Banja Luka) ISSN 0354-6969 (o)
XX(1)(2014), 47-50 ISSN 1986-5828 (o)

UOPŠTENJA NEKIH TEOREMA ZA PRAVILNE MNOGOUGLOVE

(Generalizations of some theorems for the regular polygons)

Aleksandar Sredojević[1] i Dragoljub Milošević[2]

Sažetak. U ovom radu dajemo uopštenja sljedećih teorema

1) Ako je $ABCDE$ pravilan petougao, onda je $\frac{AC}{AB}-\frac{AB}{AC}=1$;
2) Ako je $ABCDEFG$ pravilan sedmougao, onda je $\frac{1}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}$.

Ključne riječi: pravilan mnogougao, stranica i dijagonale pravilnog mnogougla, sinusna teorema, adicione formule za sinus i kosinus.

Abstract. In this paper we give the generalizations of the following theorems:

1) If $ABCDE$ is a regular pentagon, then $\frac{AC}{AB}-\frac{AB}{AC}=1$.
2) If $ABCDEFG$ is a regular heptagon, then $\frac{1}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}$.

Key words: regular polygon, side and diagonals of regular polygons, sine law, addition formulas for sine and cosine.

AMS Subject Classification (2010): **51M04, 97G40**
ZDM Subject Classification (2010): **G40**

U [1] i [2] dokazane su teoreme[3]:

Teorema 1.1. U pravilnom petouglu $A_0A_1A_2A_3A_4$ važi jednakost

$$\frac{A_0A_2}{A_0A_1}-\frac{A_0A_1}{A_0A_2}=1; \tag{1}$$

[1] Nikole Milićevića Lunjevice 7/2/7, 32300 Gornji Milanovac, Srbija
[2] 17.NOU divizije 43, 32300 Gornji Milanovac, Srbija
[3] Ovdje su one preformulisane.

Teorema 1.2. U pravilnom sedmouglu $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ važi jednakost

$$\frac{1}{A_0A_1}=\frac{1}{A_0A_2}+\frac{1}{A_0A_3}. \qquad (2)$$

Ovdje ćemo dokazati njihove generalizacije.

Teorema 2.1. Ako je $A_0A_1...A_{3k-2}$ pravilan $(3k-1)$ - ougao, tada je

$$\frac{A_0A_{k+1}}{A_0A_{k-1}}-\frac{A_0A_1}{A_0A_k}=1. \qquad (3)$$

Teorema 2.2. Ako je $A_0A_1...A_{3k}$ pravilan $(3k+1)$ - ougao, tada je

$$\frac{A_0A_1}{A_0A_k}+\frac{A_0A_{k-1}}{A_0A_{k+1}}=1. \qquad (4)$$

Dokaz teoreme 2.1. Sa R obilježimo dužinu poluprečnika kružnice opisane oko pravilnog $(3k-1)$-ougla i sa α veličinu periferijskog ugla nad njegovom stranicom. Tada je

$$A_0A_1=2R\sin\alpha,\ A_0A_{k-1}=2R\sin(k-1)\alpha,\ A_0A_k=2R\sin k\alpha$$

i

$$A_0A_{k+1}=2R\sin(k+1)\alpha\ ,$$

pa je jednakost (3) ekvivalentna sa

$$\frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin(k-1)\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\sin k\alpha}=1,$$

tj. sa

$$\sin(k+1)\alpha\cdot\sin k\alpha-\sin\alpha\cdot\sin(k-1)\alpha=\sin k\alpha\cdot\sin(k-1)\alpha\ . \qquad (5)$$

Primjenom trigonometrijske formule

$$\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y)) \qquad (6)$$

dobijemo

$$\sin(k+1)\alpha\cdot\sin k\alpha=\frac{1}{2}(\cos\alpha-\cos(2k+1)\alpha),$$

$$\sin(k-1)\alpha\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}(\cos(k-2)\alpha-\cos k\alpha),$$

i

$$\sin k\alpha\cdot\sin(k-1)\alpha=\frac{1}{2}(\cos\alpha-\cos(2k-1)\alpha),$$

pa se jednakost (5) transformiše u

$$-\cos(2k+1)\alpha-\cos(k-2)\alpha+\cos k\alpha=-\cos(2k-1)\alpha\ ,$$

tj. u

$$\cos(2k-1)\alpha + \cos k\alpha = \cos(2k+1)\alpha + \cos(k-2)\alpha \,. \tag{7}$$

Kako je $(3k-1)\alpha = \pi$, imamo

$$\cos(2k-1)\alpha = \cos((3k-1)\alpha - k\alpha) = \cos(\pi - k\alpha) = -\cos k\alpha$$

i

$$\cos(2k+1)\alpha = \cos((3k-1)\alpha - (k-2)\alpha) = \cos(\pi - (k-2)\alpha) = -\cos(k-2)\alpha \,,$$

što znači da je jednakost (7) tačna, a samim tim i jednakost (5), odnosno tražena jednakost (3). □

Napomena 1. Za pravilan petougao $(k=2)$ imamo $\frac{A_0A_3}{A_0A_1} - \frac{A_0A_1}{A_0A_2} = 1$, tj. jednakost (1) važi (zbog $A_0A_3 = A_0A_2$).

Dokaz teoreme 2.2. Jednakost (4) je ekvivalentna sa

$$\frac{\sin\alpha}{\sin k\alpha} + \frac{\sin(k-1)\alpha}{\sin(k+1)\alpha} = 1,$$

tj. sa

$$\sin\alpha \cdot \sin(k+1)\alpha + \sin k\alpha \cdot \sin(k-1)\alpha = \sin k\alpha \cdot \sin(k+1)\alpha \tag{8}$$

Primjenom formule (6) jednakost (8) se pretvara u

$$\cos(2k+1)\alpha - \cos(k+2)\alpha = \cos(2k-1)\alpha - \cos k\alpha \,. \tag{9}$$

Korištenjem trigonometrijske identičnosti

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \,,$$

jednakost (9) dobija oblik

$$\sin\frac{3k+3}{2}\alpha = \sin\frac{3k-1}{2}\alpha \,. \tag{10}$$

S obzirom da je $(3k+1)\alpha = \pi$, imamo

$$\sin\frac{3k+3}{2}\alpha = \sin\left(\frac{3k+1}{2}+1\right)\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

i

$$\sin\frac{3k-1}{2}\alpha = \sin\left(\frac{3k+1}{2}-1\right)\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

Budući da je jednakost

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

tačna, to je tačna i jednakost (10), a samim tim i jednakost (8), odnosno postavljena jednakost (4). □

Napomena 2. Za $k=2$ (pravilan sedmougao) dobijamo

$$\frac{A_0A_1}{A_0A_2}+\frac{A_0A_1}{A_0A_3}=1,$$

što je ekvivalentno sa jednakosti (2).

LITERATURA

[1] Š. Arslanagić i D. Milošević, *Različite metode dokazivanja jedne teoreme u geometriji,* MAT – KOL (Banja Luka), XVII (1) (2011), 13 – 24.

[2] D. Milošević, *Osam rešenja jednog zadatka o pravilnom sedmouglu,* Tangenta (Beograd), 65/1 (2011/12), 12 – 17.

Primljeno 14.05.2013; dostupno online 20.05.2013.