MAT-KOL (Banja Luka) ISSN 0354-6969 (o)
XX(1)(2014), 37-46 ISSN 1986-5828 (o)

ŠEST DOKAZA JEDNE TEOREME O PRAVILNOM PETNAESTOUGLU

(Six proofs of one theorem on regular 15-gon)

Aleksandar Sredojević[1] i Dragoljub Milošević[2]

Sažetak. U radu dajemo šest raznih dokaza jedne teoreme o pravilnom petnaestouglu.

Ključne reči: pravilan 15-ougao, stranica i dijagonale pravilnog 15 – ougla, slični trouglovi, sinusna teorema, adicione formule za sinus, Ptolemejeva teorema, Molvajdove formule.

Abstract. In this paper we give six proofs of one theorem for regular 15-gon.

Key words: regular 15-gon, side and diagonals of regular 15-gon, similar triangles, sine law, addition formulas for sine, Ptolemy's theorem, Mollweid's formulas.

AMS Subject Classification (2010): 51M04, 97G40
ZDM Subject Classification (2010): G40

Poznato je da se mnoge geometrijske teoreme mogu dokazati na različite načine (npr. za Pitagorinu teoremu nađeno je više od stotinu dokaza). Dokazivanjem teoreme na razne načine učenik stiče samopouzdanje, istražuje i gradi svoju matematičku zrelost.[3]

U [1] data je sledeća teorema (bez dokaza): *U pravilnom petnaestouglu* $A_0A_1...A_{14}$ *važi jednakost*:

---

[1] Nikole Milićevića Lunjevice 7/2/7, 32300 Gornji Milanovac, Srbija
[2] 17.NOU divizije 43, 32300 Gornji Milanovac, Srbija
[3] Ovaj članak je namenjen mladim matematičarima – srednjoškolcima i nastavnicima koji rade sa darovitim učenicima.

$$\frac{1}{|A_0A_1|}=\frac{1}{|A_0A_2|}+\frac{1}{|A_0A_4|}+\frac{1}{|A_0A_7|}.$$

Prikazaćemo šest načina dokazivanja ove teoreme.

Prvi način. Uvedimo sledeće oznake: $A_0A_1=a, A_0A_2=b, A_0A_3=c, A_0A_4=d$, $A_0A_5=e, A_0A_6=f$ i $A_0A_7=g$. Tada navedena jednakost postaje

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}+\frac{1}{g}. \tag{1}$$

Centralni ugao nad stranicom pravilnog petnaestougla je $360^\circ:15=24^\circ$, a odgovarajući periferijski ugao iznosi $24^\circ:2=12^\circ$. S obzirom da je spoljašnji ugao jednak centralnom uglu, tj. 24°, to je unutrašnji ugao pravilnog 15-ougla jednak $180^\circ-24^\circ=156^\circ$.

Na dijagonali $A_0A_4=d$ odredimo tačku B tako da $A_0B=A_0A_3=c$ (slika 1). Tada je $BA_4=d-c$. Trougao A_0A_3B je jednakokraki, pa je

$$\angle A_0A_3B=\angle A_0BA_3=(180^\circ-12^\circ):2=84^\circ.$$

U trouglu A_3A_4B imamo

$$\angle BA_3A_4=\angle A_2A_3A_4-(\angle A_2A_3A_0+\angle A_0A_3B)=156^\circ-(2\cdot 12^\circ+84^\circ)=48^\circ$$

i $\angle A_3A_4B=3\cdot 12^\circ=36^\circ$, a i u trouglu $A_0A_4A_7$ je

$$\angle A_4A_0A_7=3\cdot 12^\circ=36^\circ \text{ i } \angle A_0A_7A_4=4\cdot 12^\circ=48^\circ.$$

Zaključujemo da su trouglovi A_3A_4B i $A_0A_4A_7$ slični, jer imaju jednake uglove. Zbog toga je

$$A_3A_4:A_0A_7=BA_4:A_0A_4, \text{ odnosno } a:g=(d-c):d.$$

Odavde sledi $ad=g(d-c)$, tj.

$$dg-ad=cg. \tag{2}$$

Na dijagonali A_0A_3 odredimo tačku C tako da $A_0C=A_0A_1=a$, pa je $CA_3=c-a$. Kako je $A_0A_3\|A_1A_2$ i $A_0A_1=A_1A_2=A_0C=a$, zaključujemo da je četvorougao $A_0A_1A_2C$ romb, što znači da je $A_2C=a$. Dakle, trougao A_2A_3C je jednakokraki $(A_2C=A_2A_3=a)$. U njemu je

$$\angle CA_2A_3=\angle A_1A_2A_3-\angle A_1A_2C=156^\circ-2\cdot 12^\circ=132^\circ.$$

U jednakokrakom trouglu $A_0A_2A_4$ $(A_0A_2=A_2A_4=b)$ imamo

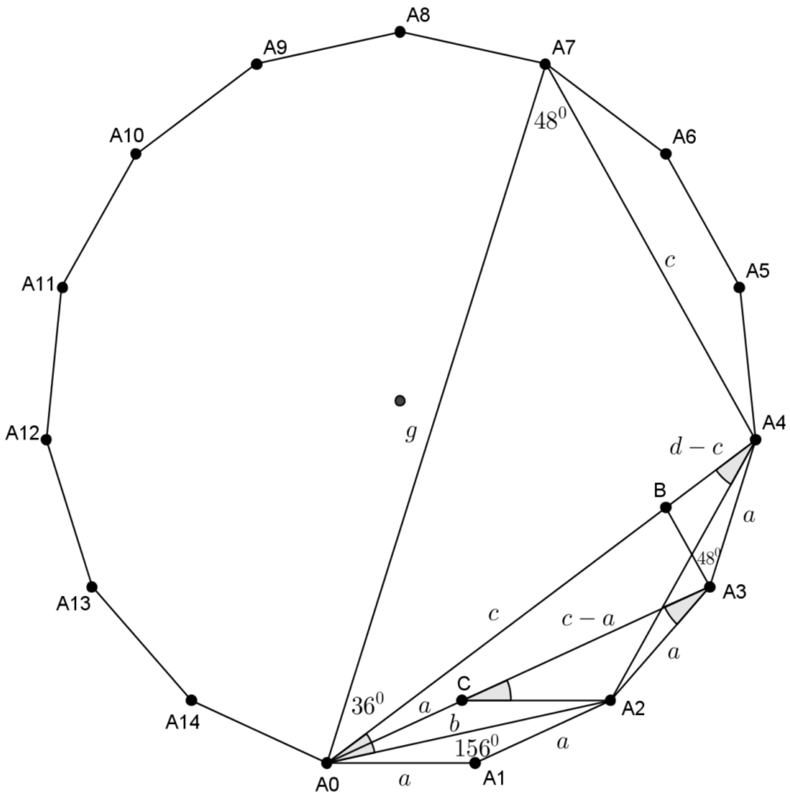
$$\angle A_0A_2A_4=\angle A_1A_2A_3-(\angle A_1A_2A_0+\angle A_3A_2A_4)=156^\circ-(12^\circ+12^\circ)=132^\circ.$$

Zaključujemo da su jednakokraki trouglovi A_2A_3C i $A_0A_2A_4$ slični, pa je

$$A_2A_3:A_0A_2=CA_3:A_0A_4, \text{ ili } a:b=(c-a):d.$$

Odavde proizilazi $ad = b(c-a)$, odnosno

$$ab + ad = bc. \qquad (3)$$



slika 1

Deljenjem jednakosti (2) i (3) dobijamo

$$\frac{dg-ad}{ab+ad} = \frac{cg}{bc} \Leftrightarrow \frac{d(g-a)}{a(b+d)} = \frac{g}{b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{g-a}{ag} = \frac{b+d}{bd}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d} + \frac{1}{g}, \text{q.e.d.}$$

Drugi način. Primenom Ptolemejeve teoreme na tetivne četvorouglove $A_0A_4A_7A_8$ i $A_0A_1A_2A_4$ (slika 2), dobijamo

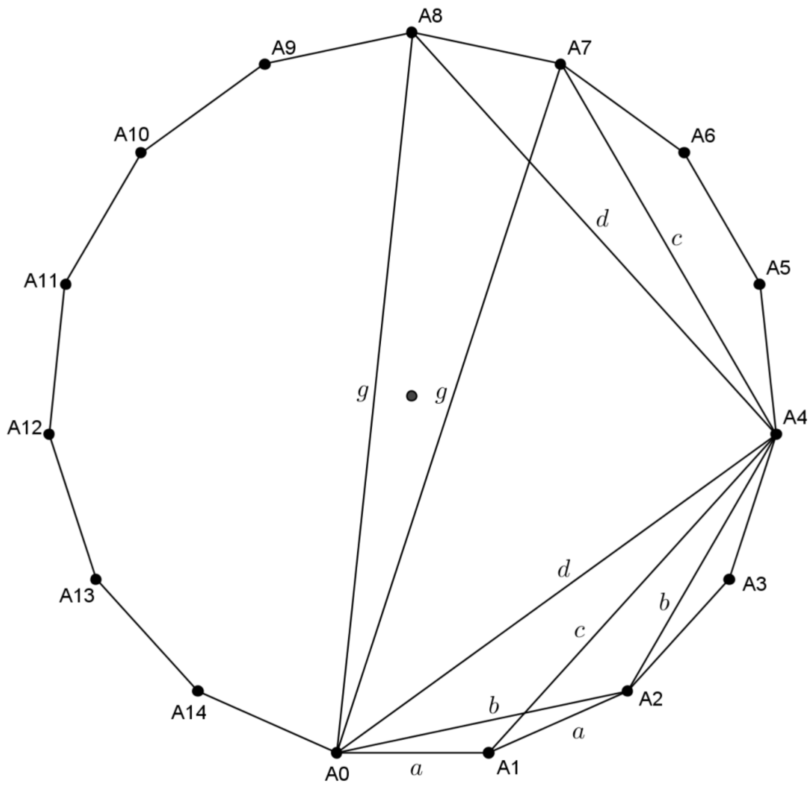
$A_0A_7 \cdot A_4A_8 = A_0A_8 \cdot A_4A_7 + A_0A_4 \cdot A_7A_8$ i $A_0A_2 \cdot A_1A_4 = A_0A_1 \cdot A_2A_4 + A_1A_2 \cdot A_0A_4$,
odnosno

$$gd = gc + da \quad \text{i} \quad bc = ab + ad\,,$$

ili

$$dg - ad = cg \quad \text{i} \quad ab + ad = bc\,.$$

Posle deljenja poslednje dve jednakosti imamo $\dfrac{d(g-a)}{a(b+d)} = \dfrac{g}{b}$, a odavde lako dobijamo željenu jednakost (1).



slika 2

Treći način. Koristićemo Molvajdove formule

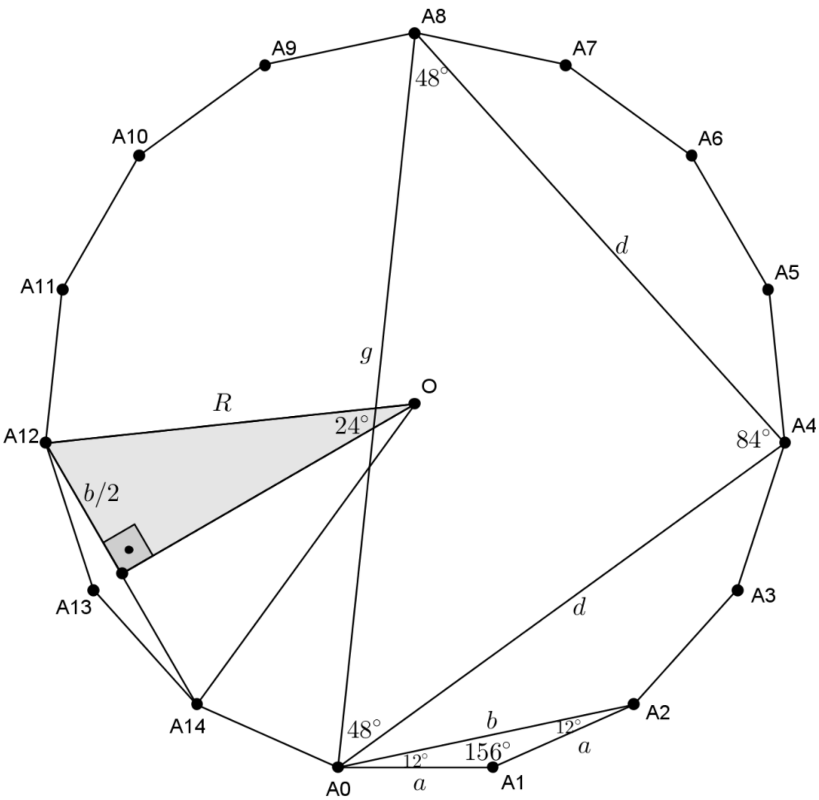
$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\gamma}{2}} \quad \text{i} \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\gamma}{2}},$$

gde su a, b, c dužine stranica i α, β, γ veličine unutrašnjih uglova trougla ABC. Primenom prve formule na $\Delta\, A_0A_4A_8$ (slika 3), imamo

$$\frac{d+g}{d}=\frac{\cos\dfrac{84^\circ-48^\circ}{2}}{\sin\dfrac{48^\circ}{2}}=\frac{\cos 18^\circ}{\sin 24^0}=\frac{\sin 72^\circ}{\sin 24^\circ},$$

a primenom druge formule na $\Delta A_0A_1A_2$:

$$\frac{b-a}{a}=\frac{\sin\dfrac{156^\circ-12^\circ}{2}}{\cos\dfrac{12^\circ}{2}}=\frac{\sin 72^\circ}{\cos 6^\circ}=\frac{\sin 72^\circ}{\sin 84^\circ}.$$



slika 3

Na osnovu sinusne teoreme je

$$\frac{b}{g}=\frac{2R\sin 24^\circ}{2R\sin 84^\circ}=\frac{\sin 24^\circ}{\sin 84^\circ},$$

gde je R poluprečnik kružnice opisane oko pravilnog 15-ougla (slika 3).
Sada je

$$\frac{b-a}{a}\cdot\frac{d}{d+g}\cdot\frac{g}{b}=\frac{\sin 72^\circ}{\sin 84^\circ}\cdot\frac{\sin 24^\circ}{\sin 72^\circ}\cdot\frac{\sin 84^\circ}{\sin 24^\circ}=1,$$

a odavde je

$$\frac{b-a}{ab}=\frac{d+g}{dg}, \text{ ili } \frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}+\frac{1}{g}, \text{ tj. (1).}$$

Četvrti način. Kako je

$$a=2R\sin 12^\circ, b=2R\sin 24^\circ, d=2R\sin 48^\circ \text{ i } g=2R\sin 84^\circ,$$

jednakost (1) ekvivalentna je sa

$$\frac{1}{\sin 12^\circ}=\frac{1}{\sin 24^\circ}+\frac{1}{\sin 48^\circ}+\frac{1}{\sin 84^\circ},$$

tj. sa

$$\frac{\sin 84^\circ-\sin 12^\circ}{\sin 84^\circ \sin 12^\circ}=\frac{\sin 48^\circ+\sin 24^\circ}{\sin 48^\circ \sin 24^\circ}. \tag{4}$$

Korišćenjem trigonometrijskih identičnosti

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

i

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \quad (x,y\in R),$$

jednakost (4) transformiše se u

$$\frac{\cos 48^\circ}{\sin 84^\circ \sin 12^\circ}=\frac{\cos 12^\circ}{\sin 48^\circ \sin 24^\circ},$$

odnosno u

$$\sin 24^\circ\left(\sin 48^\circ \cos 48^\circ\right)=\sin 48^\circ\left(\sin 12^\circ \cos 12^\circ\right). \tag{5}$$

Kako je

$$2\sin x\cos x=\sin 2x, \quad (x\in R)$$

jednakost (5) ekvivalentna je sa

$$\sin 24^\circ\cdot\sin 96^\circ=\sin 84^\circ\cdot\sin 24^\circ,$$

što je tačno zbog $\sin 96^\circ=\sin\left(180^\circ-84^\circ\right)=\sin 84^\circ$.

Peti način. Korištenjem trigonometrijske identičnosti

$$\sin^2 x-\sin^2 y=\sin(x-y)\sin(x+y), \quad (x,y\in R)$$

dobijamo redom

$$\begin{aligned} e^2-b^2&=\left(2R\sin 60^\circ\right)^2-\left(2R\sin 24^\circ\right)^2=2R\sin 36^\circ\cdot 2R\sin 84^\circ\\ &=cg, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} g^2-e^2&=\left(2R\sin 84^\circ\right)^2-\left(2R\sin 60^\circ\right)^2=2R\sin 24^\circ\cdot 2R\sin 144^\circ\\ &=2R\sin 24^\circ\cdot 2R\sin 36^\circ=bc, \end{aligned} \tag{7}$$

$$f^2-b^2=\left(2R\sin 72^\circ\right)^2-\left(2R\sin 24^\circ\right)^2=2R\sin 48^\circ\cdot 2R\sin 96^\circ$$

$$= 2R\sin 48^\circ \cdot 2R\sin 84^\circ = dg\ , \tag{8}$$

$$f^2 - e^2 = \left(2R\sin 72^\circ\right)^2 - \left(2R\sin 60^\circ\right)^2 = 2R\sin 12^\circ \cdot 2R\sin 132^\circ$$

$$= 2R\sin 12^\circ \cdot 2R\sin 48^\circ = ad \tag{9}$$

i

$$g^2 - f^2 = \left(2R\sin 84^\circ\right)^2 - \left(2R\sin 72^\circ\right)^2 = 2R\sin 12^\circ \cdot 2R\sin 156^\circ$$

$$= 2R\sin 12^\circ \cdot 2R\sin 24^\circ = ab\ , \tag{10}$$

gde smo upotrebili činjenicu da je

$$\sin\left(180^\circ - x\right) = \sin x, \quad x \in R\,.$$

Sada imamo redom

$$\frac{g}{b} = \frac{cg}{bc} = \frac{e^2 - b^2}{g^2 - e^2} \text{ (zbog jednakosti (6) i (7))}$$

$$= \frac{f^2 - b^2 - \left(f^2 - e^2\right)}{g^2 - f^2 + \left(f^2 - e^2\right)}$$

$$= \frac{dg - ad}{ab + ad} \text{ (zbog jednakosti (8) – (10),}$$

tj.

$$\frac{g}{b} = \frac{dg - ad}{ab + ad} \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d} + \frac{1}{g}\text{, q.e.d.}$$

Šesti način. Neka je pravilan petnaestougao $A_0A_1...A_{14}$ u Gausovoj ravni upisan u jediničnu kružnicu sa središtem u koordinatnom početku (slika 4). Tada su brojevi

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{15} + i\sin\frac{2k\pi}{15} = \varepsilon_1^k \qquad \left(k = 0, 1, 2, ..., 14\right)$$

koordinate tačaka $A_0, A_1, ..., A_{14}$ redom.

Kako je

$$\frac{1}{\left|A_0A_2\right|} + \frac{1}{\left|A_0A_4\right|} = \frac{1}{\left|A_1A_3\right|} + \frac{1}{\left|A_0A_4\right|}$$

i kako su vektori $\overrightarrow{A_1A_3}$ i $\overrightarrow{A_0A_4}$ kolinearni i istog smera i važi $\left|A_1A_3\right| = \left|\varepsilon_3 - \varepsilon_1\right|$ i $\left|A_0A_4\right| = \left|\varepsilon_4 - \varepsilon_0\right|$, to je

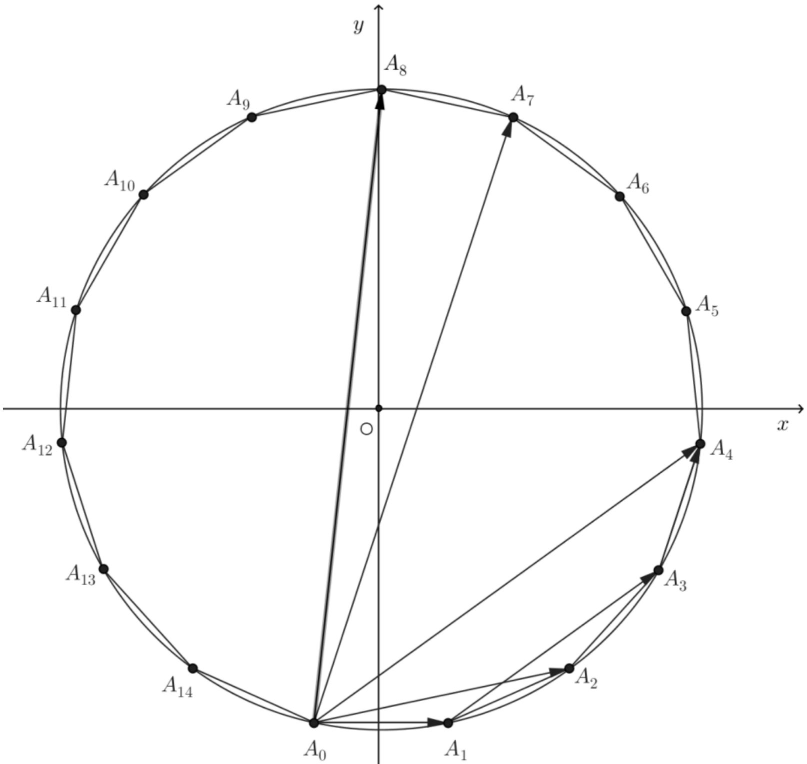
$$\frac{1}{\left|A_1A_3\right|} + \frac{1}{\left|A_0A_4\right|} = \frac{\left|A_0A_4\right| + \left|A_1A_3\right|}{\left|A_1A_3\right| \cdot \left|A_0A_4\right|} = \frac{\left|\left(\varepsilon_4 - \varepsilon_0\right) + \left(\varepsilon_3 - \varepsilon_1\right)\right|}{\left|\varepsilon_3 - \varepsilon_1\right|\left|\varepsilon_4 - \varepsilon_0\right|} = \frac{\left|\varepsilon_1^4 - 1 + \varepsilon_1^3 - \varepsilon_1\right|}{\left|\varepsilon_1^3 - \varepsilon_1\right|\left|\varepsilon_1^4 - 1\right|}$$

$$=\frac{\left|\left(\varepsilon_1^2-1\right)\left(\varepsilon_1^2+1\right)+\varepsilon_1\left(\varepsilon_1^2-1\right)\right|}{\left|\varepsilon_1\left(\varepsilon_1^2-1\right)\right|\left|\left(\varepsilon_1^2-1\right)\left(\varepsilon_1^2+1\right)\right|}=\frac{\left|\left(\varepsilon_1^2-1\right)\left(\varepsilon_1^2+1+\varepsilon_1\right)\right|}{\left|\varepsilon_1\right|\left|\varepsilon_1^2-1\right|\left|\varepsilon_1^2-1\right|\left|\varepsilon_1^2+1\right|}$$

$$=\frac{\left|\varepsilon_1^2-1\right|\left|\varepsilon_1^2+\varepsilon_1+1\right|}{\left|\varepsilon_1^2-1\right|^2\left|\varepsilon_1^2+1\right|}=\frac{\left|\varepsilon_1^2+\varepsilon_1+1\right|}{\left|\varepsilon_1^2-1\right|\left|\varepsilon_1^2+1\right|}.$$

tj.

$$\frac{1}{\left|A_0A_2\right|}+\frac{1}{\left|A_0A_4\right|}=\frac{\left|\varepsilon_1^2+\varepsilon_1+1\right|}{\left|\varepsilon_1^2-1\right|\left|\varepsilon_1^2+1\right|} \tag{11}$$



slika 4

Takođe

$$\frac{1}{\left|A_0A_1\right|}-\frac{1}{\left|A_0A_7\right|}=\frac{1}{\left|A_3A_4\right|}-\frac{1}{\left|A_0A_7\right|}.$$

Kako su vektori $\overrightarrow{A_3A_4}$ i $\overrightarrow{A_0A_7}$ kolinearni i istog smera i važi $|A_3A_4| = |\varepsilon_4 - \varepsilon_3|$ i $|A_0A_7| = |\varepsilon_7 - \varepsilon_0|$, to je

$$\frac{1}{|A_3A_4|} - \frac{1}{|A_0A_7|} = \frac{|A_0A_7| - |A_3A_4|}{|A_3A_4| \cdot |A_0A_7|} = \frac{|(\varepsilon_7 - \varepsilon_0) - (\varepsilon_4 - \varepsilon_3)|}{|\varepsilon_4 - \varepsilon_3||\varepsilon_7 - \varepsilon_0|} = \frac{|\varepsilon_1^7 - 1 - \varepsilon_1^4 + \varepsilon_1^3|}{|\varepsilon_1^4 - \varepsilon_1^3||\varepsilon_1^7 - 1|}$$

$$= \frac{|\varepsilon_1^4(\varepsilon_1^3 - 1) + \varepsilon_1^3 - 1|}{|\varepsilon_1^3(\varepsilon_1 - 1)||\varepsilon_1^7 - 1|} = \frac{|(\varepsilon_1^3 - 1)(\varepsilon_1^4 + 1)|}{|\varepsilon_1^3||\varepsilon_1 - 1||\varepsilon_1^7 - 1|}$$

$$= \frac{|\varepsilon_1^3 - 1||\varepsilon_1^4 + 1|}{|\varepsilon_1|^3|\varepsilon_1 - 1||\varepsilon_1^7 - 1|} = \frac{|(\varepsilon_1 - 1)(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 + 1)||\varepsilon_1^4 + 1|}{|\varepsilon_1 - 1||\varepsilon_1^7 - 1|}$$

$$= \frac{|\varepsilon_1 - 1||\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 + 1||\varepsilon_1^4 + 1|}{|\varepsilon_1 - 1||\varepsilon_1^7 - 1|} = \frac{|\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 + 1||\varepsilon_1^4 + 1|}{|\varepsilon_1^7 - 1|} \qquad (12)$$

S obzirom da je $|A_0A_7| = |A_0A_8|$, imamo $|\varepsilon_7 - \varepsilon_0| = |\varepsilon_8 - \varepsilon_0|$, tj. $|\varepsilon_1^7 - 1| = |\varepsilon_1^8 - 1|$. Sada jednakost (12) postaje

$$\frac{1}{|A_0A_1|} - \frac{1}{|A_0A_7|} = \frac{|\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 + 1||\varepsilon_1^4 + 1|}{|\varepsilon_1^8 - 1|} = \frac{|\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 + 1||\varepsilon_1^4 + 1|}{|(\varepsilon_1^4 - 1)(\varepsilon_1^4 + 1)|}$$

$$= \frac{|\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 + 1||\varepsilon_1^4 + 1|}{|\varepsilon_1^4 - 1||\varepsilon_1^4 + 1|} = \frac{|\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 + 1|}{|(\varepsilon_1^2 - 1)(\varepsilon_1^2 + 1)|}$$

.
$$= \frac{|\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 + 1|}{|\varepsilon_1^2 - 1||\varepsilon_1^2 + 1|} \qquad (13)$$

Iz jednakosti (13) i (11) dobijamo da je

$$\frac{1}{|A_0A_1|} - \frac{1}{|A_0A_7|} = \frac{1}{|A_0A_2|} + \frac{1}{|A_0A_4|}$$

odnosno

$$\frac{1}{|A_0A_1|} = \frac{1}{|A_0A_2|} + \frac{1}{|A_0A_4|} + \frac{1}{|A_0A_7|}.$$

Napomena. Predmetni zadatak (teorema) može se rešiti primenom Pitagorine teoreme.

LITERATURA

[1] I. Ilišević, *Primjena kompleksnih brojeva u geometriji mnogokuta*, (u Biltenu seminara za nastavnike – mentore), Hrvatsko matematičko društvo , br. 14 (2005) ,38 – 43.

[2] D. Milošević, *Diagonaler i den regulaere 14 - kant*, Matematik Magasinet (Danska), 66 (2012), 2285 – 2286.

[3] M. Prvanović, *Osnovi geometrije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1987.

Pristiglo u redakciju 22.04.2013. Dostupno na internetu 13.05.2013.