MAT–KOL (Banja Luka)
ISSN 0354–6969 (p), ISSN 1986–5228 (o)
Vol. XX (1)(2014), 15–25

EUKLIDOV ALGORITAM ZA ODREĐIVANJE NAJVEĆEG ZAJEDNIČKOG DJELIOCA

Bernadin Ibrahimpašić[1], **Karmelita Pjanić**[2]

Sažetak. U ovom članku opisaćemo Euklidov algoritam za određivanje najvećeg zajedničkog djelioca dva prirodna (cijela) broja i njegovu metodičku obradu u nastavi matematike.

Ključne riječi i fraze: Euklidov algoritam, najveći zajednički djelilac, matematičko obrazovanje.

Abstract. In this paper we describe Euclidean algorithm and some teaching methods and skills.

AMS Mathematics Subject Classification (2010): 11A05, 97B99

Key words and phrases: Euclidean algorithm, Greatest common divisors, Mathematics education.

1 Uvod

Euklidov algoritam za određivanje najvećeg zajedničkog djelioca dva prirodna (cijela) broja je prvi put opisan u Euklidovim "Elementima", antičkom djelu o matematici koje je nastalo oko 300. godine pr.n.e., iako se vjeruje da je algoritam bio poznat i 200 godina ranije. U VII knjizi "Elemenata" je iskazan za prirodne brojeve, a u X knjizi je data njegova primjena na duži.

Euklidov algoritam je prvi netrivijalni algoritam koji je preživio do danas. Vrlo je efikasan za računanje najvećeg zajedničkog djelioca dva prirodna broja koji ne zahtijeva njihovu prethodnu faktorizaciju. Treba napomenuti da je faktorizacija velikih prirodnih brojeva jedan od teških matematičkih problema.

Kada se sagledaju sve teoretske pretpostavke na kojima je utemeljena korektnost Euklidovog algoritma, možemo ih objediniti u činjenici da se najveći zajednički djelilac dva broja neće promijeniti ako se od većeg broja oduzme manji a zatim se odredi najveći zajednički djelilac manjeg od dva posmatrana broja i dobijene spomenute razlike. Na ovaj način se ponavljanjem postupka dobijaju sve manji i manji brojevi. Kako skup prirodnih brojeva ima najmanji element, to se postupak završava u konačno mnogo koraka.

[1]Pedagoški fakultet Univerziteta u Bihaću, Luke Marjanovića bb, 77000 Bihać, Bosna i Hercegovina, e-mail: bernadin@bih.net.ba

[2]Pedagoški fakultet Univerziteta u Bihaću, Luke Marjanovića bb, 77000 Bihać, Bosna i Hercegovina, e-mail: kpjanic@gmail.com

2 Najveći zajednički djelilac

Osnovni pojam od kojeg se polazi u razmatranjima o najvećem zajedničkom djeliocu je pojam djeljivosti.

Definicija 2.1 *Neka su $b \neq 0$ i a cijeli brojevi. Kažemo da je a* djeljiv *s b, odnosno da b* dijeli *a, ako postoji cijeli broj q takav da je $a = bq$. To zapisujemo s $b|a$. Ako b ne dijeli a, onda pišemo $b \nmid a$. Ako $b|a$, onda još kažemo da je b* djelilac *od a, a da je a* višekratnik (sadržalac) *od b.*

Definicija 2.2 *Neka su a i b cijeli brojevi. Cijeli broj d zovemo* zajednički djelilac *brojeva a i b ako $d|a$ i $d|b$. Ako je barem jedan od brojeva a i b različit od nule, onda postoji samo konačno mnogo zajedničkih djelilaca brojeva a i b. Najveći među njima zove se* najveći zajednički djelilac *od a i b i označava se s* $\mathrm{NZD}(a, b)$ *ili* $\gcd(a, b)$ *("greatest common divisor").*

Slično se definira najveći zajednički djelilac brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ koji nisu svi jednaki nuli, te se označava s $\mathrm{NZD}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Slično definiciji najvećeg zajedničkog djelioca, imamo i definiciju najmanjeg zajedničkog višekratnika (sadržioca) dva ili više prirodnih brojeva.

Definicija 2.3 *Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cijeli brojevi različiti od nule. Najmanji prirodan broj b za koji vrijedi da $a_i|b$ za sve $i = 1, 2, \ldots, n$ zove se* najmanji zajednički višekratnik (sadržilac) *brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i označava s* $\mathrm{NZV}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *ili* $\mathrm{NZS}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *ili* $\mathrm{lcm}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *("least common multiple").*

Za određivanje najmanjeg zajedničkog višekratnika i najvećeg zajedničkog djelioca je potrebno date brojeve zapisati u kanonskom obliku, za što je neophodno izvršiti njihovu faktorizaciju. Za provođenje faktorizacije je potrebno poznavati pravila djeljivosti s prostim brojevima [6].

Odredimo li kanonske rastave datih brojeva, onda će njihov najmanji zajednički višekratnik biti jednak proizvodu najvećih stepena svih različitih prostih faktora datih brojeva, dok se njihov najveći zajednički djelilac dobija kao proizvod najmanjih stepena svih različitih prostih faktora datih brojeva, tj. ako je

$$a = \prod_p p^{\alpha(p)} \qquad \text{i} \qquad b = \prod_p p^{\beta(p)},$$

tada je

$$\mathrm{NZV}(a, b) = \prod_p p^{\max\{\alpha(p), \beta(p)\}} \qquad \text{i} \qquad \mathrm{NZD}(a, b) = \prod_p p^{\min\{\alpha(p), \beta(p)\}}.$$

Primjer 2.1 *Odrediti* NZD *i* NZV *brojeva 1960 i 191646.*

Rješenje: Rastavimo li date brojeve na proste faktore, dobijamo

$$\begin{aligned} 1960 &= 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2, \\ 191646 &= 2 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 13^2. \end{aligned}$$

Zapišemo li to u proširenom obliku, imamo

$$\begin{aligned}
1960 &= 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^2 \cdot 13^0, \\
191646 &= 2^1 \cdot 3^4 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot 13^2,
\end{aligned}$$

pa je sada jednostavno odrediti $\mathrm{NZS}(1960, 191646)$ i $\mathrm{NZD}(1960, 191646)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{NZS}(1960, 191646) &= 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^1 \cdot 7^2 \cdot 13^2 = 26830440, \\
\mathrm{NZD}(1960, 191646) &= 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot 13^0 = 14.
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Ovdje odmah treba istaknuti svojstvo simetričnosti najvećeg zajedničkog djelioca, tj. da vrijedi $\mathrm{NZD}(a, b) = \mathrm{NZD}(b, a)$.

3 Euklidov algoritam

U cilju iskazivanja i dokazivanja teorema koji govori o Euklidovom algoritmu, iskažimo i dokažimo nekoliko potrebnih teorema. Prvi govori o jednoj osobini djeljivosti, a to je da ukoliko cijeli broj, različit od nule, dijeli cijele brojeve, onda dijeli i njihovu linearnu kombinaciju. Mi ćemo iskazati i dokazati tvrdnju za dva cijela broja, a njena generalizacija je tada trivijalna.

Teorem 3.1 *Neka su a, b i $d \neq 0$ cijeli brojevi. Ako $d|a$ i $d|b$, tada za svaka dva cijela broja m i n vrijedi da $d|(ma + nb)$.*

Dokaz: Kako $d|a$ i $d|b$, to postoje cijeli brojevi q_1 i q_2 takvi da je $a = dq_1$ i $b = dq_2$. Sada imamo da je

$$ma + nb = mdq_1 + ndq_2 = d(mq_1 + nq_2),$$

pa kako je $mq_1 + nq_2 \in \mathbb{Z}$, to zaključujemo da $d|(ma + nb)$.

$\square$

Činjenicu da pri dijeljenju 27 sa 7 dobijamo količnik 3 i ostatak 6, možemo zapisati kao $27 = 7 \cdot 3 + 6$.

Teorem 3.2 (Teorem o dijeljenju s ostatkom) *Za proizvoljan prirodan broj b i cijeli broj a postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je $a = bq + r$, $0 \leq r < b$. Broj q se zove količnik a r se zove ostatak.*

Dokaz: Dokažimo prvo egzistenciju. Pogledajmo skup $\{a - bm : m \in \mathbb{Z}\}$. Najmanji nenegativni član ovog skupa označimo s r. Tada je po definiciji $0 \leq r < b$ i postoji $q \in \mathbb{Z}$ takav da je $a - bq = r$, tj. $a = bq + r$.

Dokažimo sada jedinstvenost. Pretpostavimo da postoji još jedan par q_1 i r_1 takav da je $a = bq_1 + r_1$, $0 \leq r_1 < b$. Pokažimo najprije da je $r_1 = r$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je npr. $r < r_1$. Tada je $0 < r_1 - r < b$. S druge strane je $r_1 - r = b(q_1 - q)$, pa kako b dijeli desnu stranu, slijedi da b dijeli i lijevu stranu $(r_1 - r)$, što je nemoguće. Slijedi da je pretpostavka bila pogrešna, pa je $r_1 = r$, a samim tim je i $q_1 = q$.

□

Kao što smo već rekli, Euklidovim algoritmom se u svakom koraku smanjuju brojevi čiji se najveći zajednički djelilac određuje. Osim na Teoremu o dijeljenju s ostatkom, algoritam je zasnovan i na činjenici iskazanoj u sljedećem teoremu.

Teorem 3.3 *Neka su a, b, q i r cijeli brojevi takvi da je $b > 0$, $0 \leq r < b$ i $a = bq + r$. Tada je* $\mathrm{NZD}(a, b) = \mathrm{NZD}(b, r)$.

Dokaz: Svaki zajednički djelilac brojeva a i b je, prema Teoremu 3.1, djelilac i od njihove linearne kombinacije $r = a - bq$. Međutim i svaki zajednički djelilac brojeva b i r je djelilac i od njihove linearne kombinacije $a = bq + r$. Slijedi da je $\mathrm{NZD}(a, b) = \mathrm{NZD}(b, r)$.

□

Osim spomenutog svojstva simetričnosti najvećeg zajedničkog djelioca, vidimo da vrijedi i $\mathrm{NZD}(a, b) = \mathrm{NZD}(-a, b) = \mathrm{NZD}(a, -b) = \mathrm{NZD}(-a, -b)$.

Teorem 3.4 (Euklidov algoritam) *Neka su a i b prirodni brojevi. Pretpostavimo da je uzastopnom primjenom Teorema o dijeljenju s ostatkom dobijen niz jednakosti*

$$
\begin{array}{rcll}
a & = & bq_1 + r_1, & 0 < r_1 < b, \\
b & = & r_1 q_2 + r_2, & 0 < r_2 < r_1, \\
r_1 & = & r_2 q_3 + r_3, & 0 < r_3 < r_2, \\
 & \cdots & & \\
r_{j-2} & = & r_{j-1} q_j + r_j, & 0 < r_j < r_{j-1}, \\
r_{j-1} & = & r_j q_{j+1}. &
\end{array}
$$

Tada je $\mathrm{NZD}(a, b)$ *jednak r_j, tj. posljednjem ostatku različitom od nule.*

Dokaz: Prema Teoremu 3.3 imamo

$$
\begin{aligned}
\mathrm{NZD}(a, b) &= \mathrm{NZD}(a - bq_1, b) \\
&= \mathrm{NZD}(r_1, b) = \mathrm{NZD}(r_1, b - r_1 q_2) \\
&= \mathrm{NZD}(r_1, r_2) = \mathrm{NZD}(r_1 - r_2 q_3, r_2) \\
&= \mathrm{NZD}(r_3, r_2).
\end{aligned}
$$

Nastavljajući ovaj proces, dobijamo

$$\mathrm{NZD}(a, b) = \mathrm{NZD}(r_{j-1}, r_j) = \mathrm{NZD}(r_j, 0) = r_j.$$

Indukcijom ćemo dokazati da je svaki r_i linearna kombinacija od a i b.

To je očito tačno za r_1 i r_2, pa pretpostavimo da vrijedi za r_{i-1} i r_{i-2}. Međutim, kako je r_i linearna kombinacija od r_{i-1} i r_{i-2}, to po pretpostavci indukcije dobijamo da je r_i i linearna kombinacija od a i b.

$\square$

Primjer 3.1 *Odrediti* NZD$(660, 468)$.

Rješenje: Primijenimo Euklidov algoritam.

$$\begin{aligned} 660 &= 468 \cdot 1 + 192 \\ 468 &= 192 \cdot 2 + 84 \\ 192 &= 84 \cdot 2 + 24 \\ 84 &= 24 \cdot 3 + 12 \\ 24 &= 12 \cdot 2 \end{aligned}$$

Dobili smo da je NZD $(660, 468) = 12$.

$\diamondsuit$

Primjer 3.2 *Odrediti* NZD$(224, 319)$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} 319 &= 224 \cdot 1 + 95 \\ 224 &= 95 \cdot 2 + 34 \\ 95 &= 34 \cdot 2 + 27 \\ 34 &= 27 \cdot 1 + 7 \\ 27 &= 7 \cdot 3 + 6 \\ 7 &= 6 \cdot 1 + 1 \\ 6 &= 1 \cdot 6 \end{aligned}$$

Dobili smo da je NZD$(224, 319) = 1$.

$\diamondsuit$

Definicija 3.1 *Za dva prirodna broja a i b kažemo da su* relativno (uzajamno, međusobno) prosti *ako je njihov najveći zajednički djelilac jednak 1, tj. ako je* NZD$(a, b) = 1$.

Na osnovu prethodnog primjera možemo zaključiti da su brojevi 224 i 319 relativno (uzajamno, međusobno) prosti.

4 Izučavanje NZD i Euklidovog algoritma u nastavi matematike

NPP [11] propisuje da učenici šestog razreda osnovne škole treba da usvoje pojmove najveći zajednički djelilac (NZD) i najmanji zajednički višekratnik (sadržalac) (NZV, NZS) dvaju i više prirodnih brojeva i ovladaju postupkom njihovog određivanja. Poznavanje ovih pojmova neophodno je za usvajanje računskih operacija u skupu racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. NZD i NZV(NZS) dvaju ili više brojeva učenici u osnovnoj školi određuju faktorizacijom svakog od datih brojeva.

Nastavna praksa pokazuje da se u izučavanju matematike i nastavnici i učenici osnovne škole oslanjaju uglavnom na udžbenik matematike. Većina nastavnika svoje pripreme za čas kreiraju prvenstveno rukovodeći se sadržajima u udžbeniku i pratećoj zbirci zadataka. Pojmovi NZD i NZV(NZS) su u udžbenicima za šesti razred predstavljeni tako da se fokus postavlja na uvježbavanje postupka njihovog iznalaženja, dok je sama primjena ovih pojmova i postupaka njihovog određivanja izostavljena. Tako se obrada ove nastavne jedinice svodi na "igru" s brojevima koja prvenstveno potiče razvoj proceduralnog mišljenja.

NPP [9, 10] matematike za srednje škole nalaže izučavanje pojmova NZD i NZV(NZS) u I razredu, u okviru nastavne teme o prirodnim i cijelim brojevima. NPP precizira da učenici trebaju upoznati Euklidov algoritam u iznalaženju NZD dva prirodna, odnosno dva cijela broja.

Analiza udžbenika za I razred srednje škole ukazuje da se i ovdje potencira sama procedura, tj. usavršavanje datog algoritma, ali se ne daju problemski zadaci koji bi zahtijevali primjenu Euklidovog algoritma. U analiziranim udžbenicima su, doduše, dati iskazi i dokazi Teorema o dijeljenju s ostatkom i teorema koji daje Euklidov algoritam, no upitno je da li se pomenuti teoremi dokazuju i na času. Bez datog dokaza i bez kontekstualizacije Euklidovog algoritma, velika je vjerovatnoća da će učenici algoritam zapamtiti mehanički, što umanjuje i vijek trajanja naučenog. Osim toga, učenje algoritma bez razumijevanja nerijetko dovodi i do "grešaka u koracima", odnosno pogrešne izvedbe algoritma. Obzirom da su učenici prvog razreda srednje škole već na nivou formalnog mišljenja, deduktivni put izgradnje matematičkog koncepta je opravdan. Prema tome, i prilikom obrade Euklidovog algoritma koristi se deduktivni način rasuđivanja, tj. polazi se od općeg ka pojedinačnom.

Osnovni cilj nastavne jedinice "Teorem o dijeljenju cijelih brojeva, Euklidov algoritam" je usvajanje Teorema o dijeljenju s ostatkom i teorema o određivanju NZD, argumentacija i verifikacija ovih teorema, te usvajanje Euklidovog algoritma na osnovu ovih teorema.

5 Metodička obrada

Da bi učenici usvojili Euklidov algoritam s razumijevanjem, nastavnik mora da osigura čvrstu podlogu u svijesti učenika. Ovo može učiniti kroz sljedeće tri aktivnosti:

- *Aktivnost 1*: Uviđanje principa koji su u osnovi Euklidovog algoritma,
- *Aktivnost 2*: Osigurati da učenici znaju u kojim situacijama primjeniti Euklidov algoritam,
- *Aktivnost 3*: Primjena – stavljanje Euklidovog algoritma u određeni kontekst i demonstriranje važnosti faktorizacije u savremenom svijetu.

Aktivnost 1

Ova aktivnost obuhvata nekoliko segmenata. Prvi segmenat se odnosi na ponavljanje znanja o djeljivosti prirodnih brojeva, gdje učenici trebaju uočiti osobinu da ako je d zajednički djelilac brojeva a i b, onda je d djelilac i zbira i razlike višekratnika brojeva a i b, tj. d dijeli linearnu kombinaciju brojeva a i b (Teorem 3.1).

Primjer: Kako broj 7 dijeli brojeve 35 i 21, to 7 dijeli i brojeve:

$$56(=35+21), 14(=35-21), 91(=2\cdot35+21), 28(=3\cdot21-35), 329(=10\cdot35-21).$$

Opći slučaj: Neka $7|a$ i $7|b$. To znači da je $a = 7\cdot m$ i $b = 7\cdot n$, za neke cijele brojeve m i n. Za proizvoljne cijele brojeve k i l tada vrijedi:

$$ka + lb = k\cdot 7\cdot m + l\cdot 7\cdot n = 7(km + ln),$$

pa zaključujemo da $7|ka + lb$.

Drugi segment aktivnosti obuhvata upoznavanje učenika s Teoremom o dijeljenju s ostatkom (Teorem 3.2), definisanje NZD, definisanje relativno prostih brojeva (pomenuti pojmovi su poznati od ranije), te određivanje NZD dva prirodna (cijela) broja faktorizacijom. Određivanje NZD se demonstrira zadacima.

1. Odrediti NZD$(76, 20)$.
2. Odrediti NZD$(8398, 3718)$.

Obzirom da je postupak faktorizacije u Zadatku 2 težak, upoznaćemo učenike i s drugim načinom određivanja NZD. Iskazuju se teoremi 3.3 i 3.4, te se demonstrira dokaz Teorema 3.3.

Treći segment aktivnosti čini objašnjenje Euklidovog algoritma datog Teoremom 3.4. Istaknu se sve činjenice iskazane u gornjim teoremima na kojima je zasnovan Euklidov algoritam.

Zadatak 1 *Odrediti* NZD(76, 20).

Rješenje: Odredimo to Euklidovim algoritmom.

$76 = 20 \cdot 3 + 16$	Ovo znači da je $16 = 76-3\cdot 20$, tj. 16 je linearna kombinacija brojeva 76 i 20. Prema dokazanom, svaki zajednički djelilac brojeva 76 i 20 je djelilac i broja 16. Otuda slijedi da je NZD datih brojeva djelilac brojeva 20 i 16.
$20 = 16 \cdot 1 + 4$	Obzirom da je 4 linearna kombinacija brojeva 16 i 20, to znači da je bilo koji djelilac brojeva 20 i 16 djelilac i broja 4. Znači NZD datih brojeva je djelilac brojeva 16 i 4.
$16 = 4 \cdot 4 + 0$	Vidimo da je 4 NZD brojeva 76 i 20.

Provjerimo postupak idući unazad.

$16 = 4 \cdot 4 + 0$	4 dijeli 16.
$20 = 16 \cdot 1 + 4$	Obzirom da je 4 zajednički djelilac brojeva 4 i 16, to 4 dijeli i broj 20.
$76 = 20 \cdot 3 + 16$	Obzirom da je 4 zajednički djelilac brojeva 16 i 20, to 4 dijeli i broj 76.
	Dakle, 4 je zajednički djelilac brojeva 76 i 20.

$\diamondsuit$

Aktivnost 2

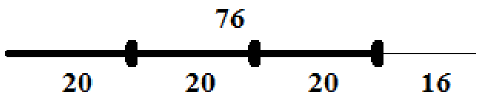
Postavlja se pitanje kada primijeniti Euklidov algoritam. Učenici razmataju drugi Zadatak 2 u kojem je date brojeve 910 i 858 teško faktorisati. Primjenom Euklidovog algoritma lako se iznalazi da je NZD(8398, 3718) = 26.

Učenici rješavaju i sljedeće zadatke u kojima trebaju odrediti: NZD(437, 462), NZD(23717, 23409) i NZD(3794, 1187). I u ovim primjerima je date brojeve teško faktorisati, a lako je primjeniti Euklidov algoritam.

Aktivnost 3

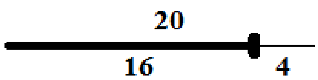
Treća aktivnost podrazumijeva primjenu algoritma i kontekstualizaciju pojma. Ovdje Euklidov algoritam postavljamo u kontekst geometrije.

Trebamo pronaći najdužu duž koja se cijeli broj puta sadrži u dužima čije su dužine $76mm$ i $20mm$.



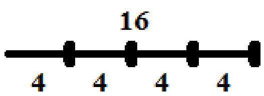
76 : 20 = 3 $76 = 3 \cdot 20 + 16$
16

Duž čija je dužina $76mm$ mjerimo sada pomoću duži čija je dužina $20mm$. (Probamo dužu duž izmjeriti kraćom.)



20 : 16 = 1 $20 = 1 \cdot 16 + 4$
4

Duž čija je dužina $20mm$ mjerimo sada pomoću duži čija je dužina $16mm$. (Ostatak pri prethodnom mjerenju.)



16 : 4 = 4 $16 = 4 \cdot 4$

Duž čija je dužina $16mm$ mjerimo sada pomoću duži čija je dužina $4mm$. (Ostatak pri prethodnom mjerenju.)

Dobili smo da je duž dužine $4mm$ naduža duž koja je sadržana cijeli broj puta u dužima čije su dužine $76mm$ i $20mm$.

Primjenu Euklidovog algoritma pronalazimo i pri kreiranju sigurnosnih kodova. Istraživanje ove teme može biti zadatak za domaću zadaću.

Na časovima vježbanja učenici mogu rješavati zadatke koji podrazumijevaju iznalaženje najvećeg zajedničkog djelioca. Od učenika treba tražiti da argumentuju zašto se zadatak svodi na problem određivanja NZD. Osim toga, učenici trebaju uvidjeti koji od postupaka – faktorizacija brojeva ili Euklidov algoritam, je u datim primjerima jednostavnije primjeniti. Zbog samog uvježbavanja algoritma treba tražiti od učenika da primjene Euklidov algoritam u svakom od datih zadataka, bilo kao jednostavniji postupak, bilo kao način da provjere rezultat dobijen faktorizacijom.

Primjeri zadataka koji se mogu dati za vježbu.

1. Slastičarna treba isporučiti 120 čokoladnih i 192 voćna kolača. Kolače žele rasporediti u jednake kutije tako da u svakoj kutiji bude jednak broj jedne vrste kolača. U kutiju na ovaj način treba stati najveći mogući broj kolača. Koliko je kutija potrebno i koliki je broj svake vrste kolača u kutiji?

2. Dvije neonske lampice su uključene u isto vrijeme. Prva zasvijetli svake 4 sekunde, a druga svakih 6 sekundi. Koliko će puta lampice zasvijetliti istovremeno u periodu od 60 sekundi?

3. Tabela prikazuje broj učenika prvog i drugog razreda.

Razred	Broj učenika
1.	48
2.	64

   Učenike treba grupisati za odlazak na izlet u jednakobrojne grupe, ali tako da u grupi bude najveći mogući broj učenika i da svaku grupu čine samo učenici jednog razreda. Koliki je najveći mogući broj učenika u grupama?

Literatura

[1] H. Agić, M. Kešina: *Matematika za 6. razred devetogodišnje osnovne škole*, Nam, Tuzla, 2009.

[2] A. Alić, L. Krilić: *Matematika sa zbirkom zadataka za 1. razred srednje škole*, Svjetlost, Sarajevo, 2000.

[3] E. Galijatović, R. Onodi: *Matematika za 6. razred devetogodišnje osnovne škole*, Bosanska Riječ, Tuzla, 2009.

[4] A. Hodzić: *Matematika za 1. razred srednjih škola*, Sarajevo Publishing, Sarajevo, 2001.

[5] B. Ibrahimpašić: *Kriptografija kroz primjere*, Pedagoški fakultet, Bihać, 2011.

[6] B. Ibrahimpašić, S. Ibrahimpašić, D. Kovačević, A. Šehanović: *Divisibility Rules*, OML, 11/2(2011) 107–112.

[7] I. Niven, H. S. Zuckerman, H. L. Montgomery: *An Introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1991.

[8] S. Y. Yan: *Number Theory for Computing*, Springer–Verlag, Berlin, 2002.

[9] *Nastavni plan i program Federalnog ministarstava obrazovanja, nauke, kulture i sporta za opću gimnaziju*, 1999.

[10] *Nastavni plan i program za gimnaziju Kantona Sarajevo*, 1999.

[11] *Okvirni nastavni plan i program za devetogodišnju osnovnu školu u Federaciji Bosne i Hercegovine*, 2009.

Primljeno u Redakciju 11.02.2013; revidirana verzija 21.02.2013;
dostupno na online 25.02.2013.