MAT-KOL (Banja Luka)
XIX(3)(2013), 45-52

ISSN 0354-6969 (p)
ISSN 1986-5228 (o)

ŠEST NAČINA RJEŠAVANJA JEDNOG ZADATKA O PRAVILNOM DEVETNAESTOUGLU

(Six ways to solve a problem on the regular 19-gon)

Aleksandar Sredojević[1] i Dragoljub Milošević[2]

Sažetak. U radu je dato šest načina rješavanja jednog zadatka koji se odnosi na pravilni devetnaestougao.

Ključne riječi: pravilni devetnaestougao, stranica i dijagonale pravilnog devetnaestougla, jednakokraki trougao, slični trouglovi, tetivni četverougao, Ptolomejeva teorema, adicione formule za sinus i kosinus, sinusna teorema, Molvajdova formula.

Abstract. In this paper we give six ways to solve a problem for the regular 19-gon.

Key words: regular 19-gon, side and diagonals of regular 19-gon, isosceles triangle, similar triangles, cyclic quadrilateral, Ptolomey's theorem, addition formulas for sine and cosine, sine law, Mollweide's formula.

AMS Subject Classification (2010): 51M04, 97G40
ZDM Subject Classification (2010): G40

U ovom radu dali smo 6 načina rješavanja jednog zadatka iz geometrije rukovodeći se maksimom da je vrijednije jedan matematički zadatak riješiti na više načina nego riješiti na desetine zadataka na jedan isti način. Smatramo da će ovaj rad korisno poslužiti učenicima i studentima koji pokazuju povećano interesovanje za geometriju kao i nastavnicima koji rade sa tim učenicima i studentima.

Zadatak. Dokažite da u pravilnom devetnaestouglu $A_0A_1A_2...A_{18}$ važi sljedeća jednakost

$$\frac{A_0A_1}{A_0A_9}+\frac{A_0A_4}{A_0A_5}=1.$$

[1] Nikole Milićevića Lunjevice 7/2/7, 32300 Gornji Milanovac, Srbija
[2] 17.NOU divizije 43, 32300 Gornji Milanovac, Srbija

Prvi način. Veličina centralnog ugla nad stranicom pravilnog 19-ougla iznosi $\frac{2\pi}{19}$, što je i veličina spoljašnjeg ugla. Veličina periferijskog ugla nad stranicom tog mnogougla je $\frac{2\pi}{19}:2=\frac{\pi}{19}$, a veličina unutrašnjeg ugla je $\pi-\frac{2\pi}{19}=\frac{17\pi}{19}$.

Uvedimo sljedeće oznake:

$\frac{\pi}{19}=\alpha, A_0A_1=a, A_0A_2=b, A_0A_3=c, A_0A_4=d, A_0A_5=e, A_0A_6=f, A_0A_7=g, A_0A_8=h$ i $A_0A_9=i$. Tada se navedena jednakost može zapisati kao

$$\frac{a}{i}+\frac{d}{e}=1. \tag{1}$$

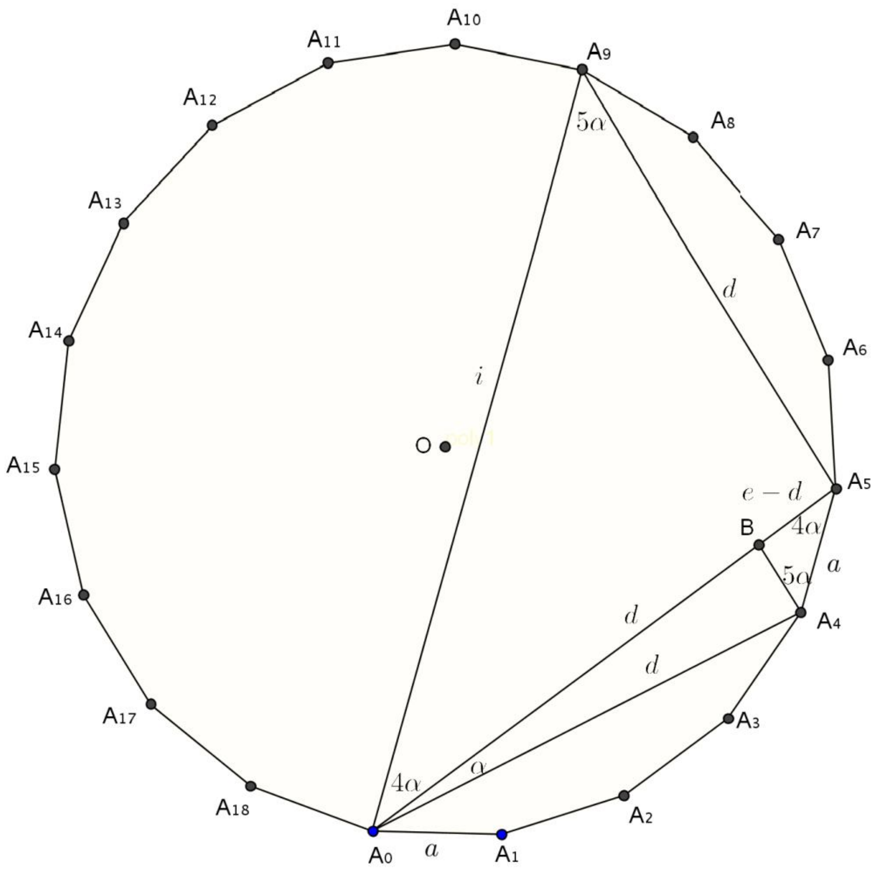
Na dijagonali A_0A_5 odaberimo tačku B tako da $A_0B=A_0A_4=d$, pa je $BA_5=e-d$ (slika 1). Trougao A_0A_4B je jednakokraki što znači da je $\angle A_0A_4B=\angle A_0BA_4=(19\alpha-\alpha):2=9\alpha$. Tada je $\angle A_5A_4B=\angle A_0BA_4-\angle BA_5A_4$ (jer $\angle A_0BA_4$ je spoljašnji ugao trougla A_4A_5B). S obzirom da je $\angle A_0BA_4=9\alpha$ i $\angle BA_5A_4=\angle A_0A_5A_4=4\alpha$ (periferijski ugao nad $\frac{4}{19}$ kružnice opisane oko pravilnog 19-ougla), imamo $\angle A_5A_4B=5\alpha$. Kako je $\angle A_5A_0A_9=4\alpha$ i $\angle A_0A_9A_5=5\alpha$ (v. $\Delta A_0A_5A_9$), zaključujemo da su trouglovi A_4A_5B i $A_0A_5A_9$ slični (jer imaju jednake uglove).

Zbog toga je

$$A_5B:A_4A_5=A_0A_5:A_0A_9, \text{ ili } (e-d):a=e:i.$$

Odavde je

$$\begin{aligned}(e-d)i=ae &\Leftrightarrow ei-di=ae\\ &\Leftrightarrow ei=ae+di \quad /:ei\\ &\Leftrightarrow 1=\frac{a}{i}+\frac{d}{e}, \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$



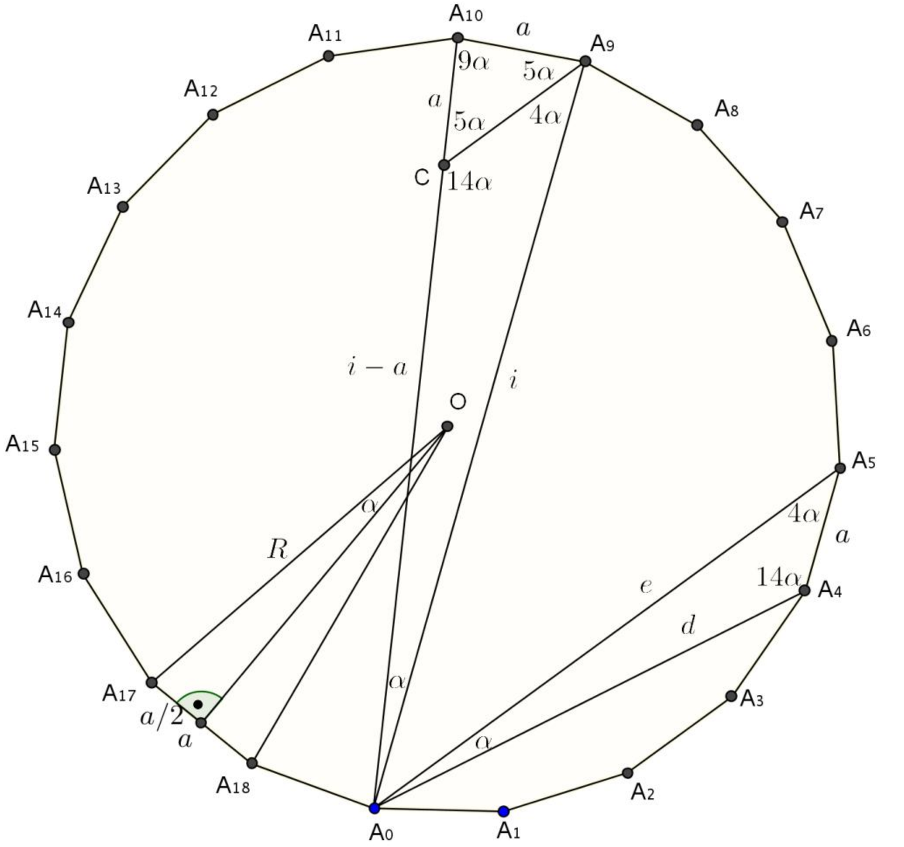
Slika 1

Drugi način. Odaberimo tačku C na dijagonali A_0A_{10} tako da $A_{10}C = A_9A_{10} = a$, pa je $A_0C = i - a$ (slika 2). S obzirom da je $\angle A_0A_9A_{10} = \angle CA_{10}A_9 = 9\alpha$

(periferijski ugao nad $\frac{9}{19}$ kružnice opisane oko pravilnog 19-ougla), zaključujemo da je $\angle A_9CA_{10} = \angle A_{10}A_9C = (19\alpha - \alpha) : 2 = 5\alpha$. Zbog toga je $\angle A_0CA_9 = 19\alpha - 5\alpha = 14\alpha$. Tada ΔA_0A_9C ima uglove veličine $\alpha, 4\alpha$ i 14α, kao i u $\Delta A_0A_4A_5$. To, pak, znači da je
$\Delta A_0A_9C \sim \Delta A_0A_4A_5$, pa je

$$A_0C : A_0A_9 = A_0A_4 : A_0A_5, \text{ ili } (i-a):i = d:e.$$

Otuda lahko dobijamo traženu jednakost (1).



Slika 2

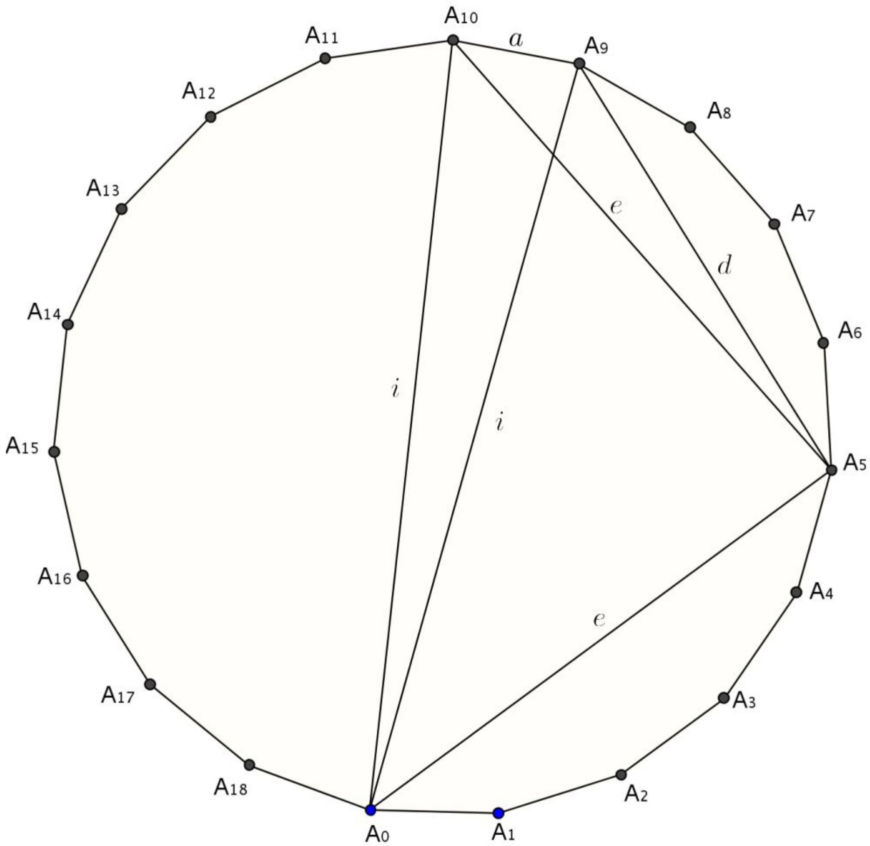
Treći način. Primjenom Ptolemejeve[3] teoreme na tetivni četvorougao $A_0A_5A_9A_{10}$ (slika 3), dobijamo

$$A_0A_9 \cdot A_5A_{10} = A_0A_5 \cdot A_9A_{10} + A_0A_{10} \cdot A_5A_9, \text{ ili } i\cdot e = e\cdot a + i\cdot d.$$

Odavde slijedi, poslije deljenja sa $i \cdot e$

[3] Ptolemeus Claudius, starogrčki matematičar, geograf i astronom, II vijek nove ere

$$1 = \frac{a}{i} + \frac{d}{e}, \text{ tj. } (1).$$



Slika 3

Četvrti način. Koristit ćemo Molvajdovu[4] formulu

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

gdje su a, b, c stranice i α, β, γ unutrašnji uglovi trougla ABC.Primjenom ove formule na $\Delta A_0A_4A_5$ (slika 2), imamo

[4] Karl B. Mollweide (1774 – 1825), njemački matematičar i astronom

$$\frac{e-d}{a}=\frac{\sin\frac{14\alpha-4\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin 5\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

a primjenom sinusne teoreme na $\Delta A_0 A_5 A_{10}$:

$$\frac{i}{e}=\frac{\sin 9\alpha}{\sin 5\alpha}.$$

Kako je

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{19\alpha-18\alpha}{2}=\cos\left(\frac{19\alpha}{2}-9\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-9\alpha\right)=\sin 9\alpha,$$

dobijamo

$$\frac{e-d}{a}\cdot\frac{i}{e}=\frac{\sin 5\alpha}{\sin 9\alpha}\cdot\frac{\sin 9\alpha}{\sin 5\alpha}=1,$$

tj.

$$(e-d)\cdot i=a\cdot e.$$

Iz posljednje jednakosti slijedi tražena jednakost (1).

Peti način. Ako sa R obilježimo dužinu poluprečnika kružnice opisane oko pravilnog 19-ougla, možemo pisati (v.sliku 2)

$$a=2R\sin\alpha,\ d=2R\sin 4\alpha,\ e=2R\sin 5\alpha\ \text{ i }\ i=2R\sin 9\alpha.$$

Zbog toga je jednakost (1) ekvivalentna sa

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 9\alpha}+\frac{\sin 4\alpha}{\sin 5\alpha}=1,$$

odnosno sa

$$\sin 5\alpha\sin\alpha+\sin 9\alpha\sin 4\alpha=\sin 5\alpha\sin 9\alpha. \qquad (2)$$

Koristeći formulu

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right], \qquad (x, y \in R)$$

jednakost (2) transformišemo u

$$\frac{1}{2}(\cos 4\alpha - \cos 6\alpha) + \frac{1}{2}(\cos 5\alpha - \cos 13\alpha) = \frac{1}{2}(\cos 4\alpha - \cos 14\alpha),$$

što je ekvivalentno sa

$$\cos 5\alpha + \cos 14\alpha - (\cos 6\alpha + \cos 13\alpha) = 0.$$

Posljednja jednakost je tačna, jer je

$$\cos 14\alpha = \cos(19\alpha - 5\alpha) = -\cos 5\alpha \text{ i } \cos 13\alpha = \cos(19\alpha - 6\alpha) = -\cos 6\alpha.$$

Ovim je dokazana jednakost (2), a samim tim i tražena jednakost (1).

Šesti način. Koristit ćemo trigonometrijsku identičnost

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x-y)\sin(x+y), \quad (x, y \in R)$$

koja se dobija iz adicionih formula za sinus

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \text{ i } \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Kako je

$a = 2R\sin\alpha, b = 2R\sin 2\alpha, c = 2R\sin 3\alpha, d = 2R\sin 4\alpha, e = 2R\sin 5\alpha, \mathrm{g} = 2\mathrm{R}\sin 7\alpha$
i $i = 2R\sin 9\alpha$,

imamo redom

$$\begin{aligned} c^2 - b^2 &= (2R\sin 3\alpha)^2 - (2R\sin 2\alpha)^2 = 2R\sin\alpha \cdot 2R\sin 5\alpha \\ &= a \cdot e, \end{aligned} \tag{3}$$

$$
\begin{aligned}
g^2 - c^2 = \left(2R\sin 7\alpha\right)^2 - \left(2R\sin 3\alpha\right)^2 &= 2R\sin 4\alpha \cdot 2R\sin 10\alpha \\
&= 2R\sin 4\alpha \cdot 2R\sin 9\alpha \\
&= d \cdot i
\end{aligned} \tag{4}
$$

i

$$
\begin{aligned}
g^2 - b^2 = \left(2R\sin 7\alpha\right)^2 - \left(2R\sin 2\alpha\right)^2 &= 2R\sin 5\alpha \cdot 2R\sin 9\alpha \\
&= e \cdot i\,.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Sabiranjem jednakosti (3) i (4) dobijamo $g^2 - b^2 = ae + di$, pa zbog jednakosti (5), proizilazi $ei = ae + di.$ Odavde lahko dobijamo željenu jednakost (1).

Napomena. Postavljeni zadatak može se riješiti primjenom metode koordinata.

LITERATURA

[1] D. Milošević, *Diagonaler i den regulaere 14 - kant*, Matematik Magasinet (Danska), 66 (2012), 2284 – 2286,

[2] M. Prvanović, *Osnovi geometrije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1987.