MAT-KOL (Banja Luka)
ISSN 0354-6969 (p), ISSN 1986-5228 (o)
Vol. XIX (3)(2013), 35-44

ZANIMLJIVI ALGEBARSKI ZADACI SA BROJEM 2013

(Interesting algebraic problems with number 2013)

Nenad O. Vesić[1] Dušan J. Simjanović[2]

Sažak: U ovom radu predstavljeni su neki zanimljivi algebarski zadaci u kojima se javlja broj 2013. Jedan od ciljeva ovog rada je popularizacija matematike (prvenstveno algebre) među srednjoškolcima.

Ključne reči fraze: algebra, aritmetika, jednačina, nejednakost, kongruencija po modulu, deljivost brojeva, polinom

Abstract. Some interesting algebraic problems, involving number 2013, are presented. One of the aims of this paper is popularization of mathematics (especially algebra) between mid-school students.

AMS Mathematics Subject Classification (2010): 11A25, 11D41,97B20, 11R09

ZDM Subject Classification (2010): F30,F40,H30

Key words and phrases: algebra, arithmetics, equation, inequality, congruence modulo, divisibility of numbers, polynomial

Cilj ovog rada je predstavljanje različitih algebarskih zadataka zasnovanih na zadacima u [1–5] radi promovisanja i popularizacije matematike. Početni zadaci su jednostavniji dok su zadaci u nastavku sve komplikovaniji za rešavanje. U svim zadacima se javlja broj 2013 (broj tekuće godine) što je čest slučaj na matematičkim takmičenjima.

Zadatak 1 *Koji je od brojeva*

$$A=\frac{10^{2013}+1}{10^{2014}+1} \quad i \quad B=\frac{10^{2014}+1}{10^{2015}+1}$$

veći?

Rešenje: U ovom zadatku biće korišćena sledeća lema.

[1]Projekat 174012 Ministarstva obrazovanja, nauke i tehnološkog napretka u Vladi Republike Srbije, Prirodno-matematički fakultet, 18000 Niš, Višegradska 33. Srbija, e-mail: vesic.specijalac@gmail.com

[2]Prirodno-matematički fakultet, Višegradska 33. 18000 Niš, Srbija, e-mail: dsimce@gmail.com

Lema 1 *Ukoliko je $b > a > 0$ i $c > 0$ tada je*

$$\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}. \tag{1}$$

Dokaz:

$$\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b} = \frac{ab+bc-ba-ca}{b(b+c)} = \frac{c(b-a)}{b(b+c)} > 0,$$

čime je ova lema dokazana. □

Sada se, korišćenjem rezultata (1), dobija da je

$$B = \frac{10^{2014}+1}{10^{2015}+1} < \frac{10^{2014}+10}{10^{2015}+10} = \frac{10(2^{2013}+1)}{10(2^{2014}+1)} = \frac{10^{2013}+1}{10^{2014}+1} = A.$$

Zadatak 2 *Dokazati da je*

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2011}{2012} < \frac{1}{\sqrt{2013}}.$$

Rešenje: Neka je

$$P = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2011}{2012}.$$

Iz nejednakosti (1) dokazanoj u Lemi 1 sledi da je

$$P^2 = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2011}{2012}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2011}{2012}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2012}{2013}\right) = \frac{1}{2013},$$

odnosno, kako je funkcija $f(x) = x^2$ rastuća za $x > 0$, sledi

$$P = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2011}{2012} < \frac{1}{\sqrt{2013}}.$$

Zadatak 3 *Šta je veće 2^{2013} ili 65^{336}?*

Rešenje:

$$2^{2013} < 2^{2016} = \left(2^6\right)^{336} = 64^{336} < 65^{336}.$$

Dakle,

$$2^{2013} < 65^{336}.$$

Zadatak 4 *Uroš je rođen u XX veku. U XXI veku godine x^2 imaće x godina. Koji će rođendan Uroš slaviti 2013. godine?*

Rešenje Jedini prirodan broj n, $2001 \leq n \leq 2100$ koji je potpun kvadrat prirodnog broja je broj $n = 2025 = 45^2$. Odatle zaključujemo da je Uroš rođen $2025 - 45 = 1980$. godine. Godine 2013. slaviće 33. rođendan.

Zadatak 5 *Rešiti po x jednačinu*

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{\ldots}}} = \sqrt{2013},$$

gde se koren na levoj strani jednačine pojavljuje beskonačno mnogo puta.

Rešenje: Neka je

$$A = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{\ldots}}} \quad .$$

Kako je $A = \sqrt{2013}$ sledi da je

$$\sqrt{xA} = \sqrt{2013}$$

odakle sledi da je $x = \sqrt{2013}$.

Zadatak 6 *Neka su x i y prirodni brojevi takvi da je $xy = 2013^{2012}$. Dokazati da zbir $x + y$ nije deljiv sa 2012.*

Rešenje: Kako je $2012 = 4 \cdot 503$, da bi broj bio deljiv sa 2012 neophodno je da bude deljiv sa 4. Traženi dokaz će biti izveden svođenjem na apsurd. Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$x + y \equiv 0 \pmod{2012}. \tag{2}$$

$$x + y \equiv 0 \pmod{2012} \Rightarrow x + y \equiv 0 \pmod{4}. \tag{3}$$

Kako je $xy = 2013^{2012}$ neparan broj, sledi da su brojevi x i y neparni. Odavde sledi da je

$$x + 1 \equiv 0 \pmod{2}$$

i

$$y + 1 \equiv 0 \pmod{2},$$

što znači da je

$$(x+1)(y+1) \equiv 0 \pmod{4} \Leftrightarrow [(xy+1) + (x+y)] \equiv 0 \pmod{4} \Leftrightarrow$$

$$\left[\left(2013^{2012} + 1\right) + (x+y)\right] \equiv 0 \pmod{4}. \tag{4}$$

U nastavku rešenja koristi se naredna teorema.

Teorema 1 *Ukoliko celi brojevi a, b i m zadovoljavaju uslove $a \equiv 0 \pmod{m}$ i $a + b \equiv 0 \pmod{m}$ onda je*

$$b \equiv 0 \pmod{m}. \quad \Box \tag{5}$$

Sada, na osnovu Teoreme 1, iz (3) i (4) sledi da je

$$2013^{2012} + 1 \equiv 0 \pmod 4.$$

Međutim, kako je $2013 \equiv 1 \pmod 4$, onda je $2013^{2012} \equiv 1 \pmod 4$ pa sledi da je

$$2013^{2012} + 1 \equiv 2 \pmod 4,$$

što je kontradikcija.

Zadatak 7 *Dokazati da broj*

$$a_n = 1^{2013} + 2^{2013} + \ldots + n^{2013}$$

nije deljiv sa $n+2$ *ni za jedan prirodan broj* n.

Rešenje: Neka je n proizvoljan prirodan broj. Posmatrajmo posebno slučajeve kad je n paran, odnosno neparan broj.

- $n \in 2\mathbb{N}$ (skup $2\mathbb{N}$ je skup parnih prirodnih brojeva)
  U ovom slučaju postoji prirodan broj k tako da je $n = 2k$, tj. $n + 2 = 2(k+1)$. Uočimo zbirove

  $$s_q = (2k-q)^{2013} + (q+2)^{2013}, \quad q = 0, 1, 2, \ldots, k-2.$$

  Korišćenjem osobine da je, za proizvoljan neparan prirodan broj m i realne brojeve (ne neophodno pozitivne) a i b

  $$a^m + b^m = (a+b)(a^{m-1} - a^{m-2}b + \ldots + b^{m-1}),$$

  sledi da je

  $$\begin{aligned} s_q &= (2k-q+q+2)\cdot((2k-q)^{2012} - (2k-q)^{2011}(q+2) + \ldots \\ &\quad \ldots - (2k-q)(q+2)^{2011} + (q+2)^{2012}) \\ &= 2(k+1)((2k-q)^{2012} - \ldots + (q+2)^{2012}). \end{aligned}$$

  Zaključujemo da $2(k+1)|s_q, \quad \forall q = 0, 1, \ldots, k-2$. Sada je

  $$\begin{aligned} a_n &= 1^{2013} + (k+1)^{2013} + \sum_{q=1}^{k-2} s_q \\ &= 1^{2013} + (k+1)^{2013} + 2(k+1)\sum_{q=1}^{k-2}((2k-q)^{2012} - \ldots + (q+2)^{2012}) \end{aligned}$$

  Odavde sledi da broj a_n nije deljiv sa $k+1$ pa, samim tim, ne može biti deljiv ni sa $2(k+1) = n+2$.

- $n \in 2\mathbb{N} - 1$ (skup $2\mathbb{N} - 1$ je skup neparnih prirodnih brojeva)
  Kako je n neparan broj sledi da postoji prirodan broj r takav da je $n = 2r + 1$. Neka je sada, analogno prethodnom slučaju,

$$s_q = (n-q)^{2013} + (q+2)^{2013}, \quad q = 0, 1, 2, \ldots, r-1.$$

$r = (n-1)/2$ pa na sličan način dobijamo

$$\begin{aligned} s_q &= (n-q+q+2)((n-q)^{2012} - (n-q)^{2011}(q+2) + \ldots \\ &\quad \ldots - (n-q)(q+2)^{2011} + (q+2)^{2012}) \\ &= (n+2)((n-q)^{2012} - \ldots + (q+2)^{2012}). \end{aligned}$$

I ovde zaključujemo da $(n+2)|s_q, \quad \forall q = 0, 1, \ldots, r-1$, pa kako je

$$\begin{aligned} a_n &= 1^{2013} + \sum_{q=1}^{r-1} s_q \\ &= 1^{2013} + (n+2) \sum_{q=0}^{r-1} (n-q)^{2012} - \ldots + (q+2)^{2012}), \end{aligned}$$

to sledi da ni u ovom slučaju a_n nije deljivo sa $n+2$, čime je dokaz završen.

Zadatak 8 *Koliko cifara ima najmanji prirodan broj* $a = 11\ldots1$ *koji je deljiv prirodnim brojem* $A = 99\ldots9$ *koji ima* 2013 *cifara?*

Rešenje: Neka broj a ima n cifara. Broj A je jednak $A = 9 \cdot 11\ldots1 = 9b$, gde broj b ima 2013 cifara 1. Broj a mora biti deljiv sa b, $\frac{a}{b} = c$, a taj količnik mora biti deljiv sa 9.

Broj a je deljiv brojem b samo u slučaju kada je njegove uzastopne cifre moguće podeliti na disjunktne podgrupe tako da u svakoj podgrupi bude 2013 jedinica. To će biti moguće ako je broj cifara broja a, odnosno broj n, deljiv sa 2013, odnosno

$$a = \underbrace{11\ldots1}_{2013}\ldots\underbrace{11\ldots1}_{2013}.$$

U tom slučaju je

$$c = 1000\ldots0100\ldots100\ldots01,$$

gde između svake dve uzastopne jedinice ima 2012 nula. Broj c ima onoliko jedinica koliki je količnik $\frac{n}{2013} = m$, a kako c mora biti deljiv sa 9, to zbir njegovih cifara mora biti deljiv sa 9. Zbir cifara broja c je m, a najmanja vrednost broja n dobija se za $m = 9$ jer je to najmanji prirodan broj deljiv sa 9.

Odatle sledi da je najmanji broj cifara broja $a, n = 9 \cdot 2013 = 18117$.

Zadatak 9 *Da li je moguće prirodne brojeve* $1, 2, \dots, 2012, 2013$ *razvrstati u disjunktne skupove tako da u svakom od njih zbir najmanjeg i najvećeg broja bude jednak zbiru ostalih brojeva tog podskupa?*

Rešenje Pretpostavimo da je to moguće. Neka su a i b, redom, najmanji i najveći brojevi proizvoljnog podskupa S. Zbir brojeva podskupa S je $2(a+b) \in 2\mathbb{N}$. Odatle sledi da je zbir brojeva svih podskupova paran broj, sa jedne strane, dok je taj zbir zapravo zbir brojeva od 1 do 2013 i jednak $\frac{2013 \cdot 2014}{2} = 227091$, što je neparan broj, pa traženo razvrstavanje brojeva nije moguće.

Zadatak 10 *Neka su* a *i* b *rešenja kvadratne jednačine*

$$x^2 - 2013x + 1 = 0.$$

Odrediti prirodne brojeve m *i* n *koji su rešenja jednačine*

$$a^m + b^m = 2012n.$$

Koliko rešenja ima jednačina

$$a^m + b^m = 2014n$$

u skupu prirodnih brojeva?

Rešenje: Iz Vijeteovih formula sledi da je

$$a + b = 2013 \text{ i } ab = 1.$$

Sada je

$$\begin{aligned} 2013(a^m + b^m) &= (a+b) \cdot (a^m + b^m) \\ &= a^{m+1} + b^{m+1} + ab(a^{m-1} + b^{m-1}) \\ &= a^{m+1} + b^{m+1} + a^{m-1} + b^{m-1}. \end{aligned}$$

Odavde sledi da je

$$a^{m+1} + b^{m+1} = 2013(a^m + b^m) - (a^{m-1} + b^{m-1}). \tag{6}$$

Primenom prethodne jednakosti na zbir $a^m + b^m$ dobija se da je

$$a^{m+1} + b^{m+1} = (2013^2 - 1)(a^{m-1} + b^{m-1}) - 2013(a^{m-2} + b^{m-2}). \tag{7}$$

Dokažimo matematičkom indukcijom da je za svako $m \in \mathbb{N}$ broj $a^m + b^m$ ceo broj koji nije deljiv ni sa 2012 ni sa 2014.

- Za $m = 1$ je $a^m + b^m = a + b = 2013$ što je ceo broj koji nije deljiv ni sa 2012 ni sa 2014.
  Za $m = 2$ je $a^m + b^m = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 2013^2 - 2 = (2013^2 -$

$1) - 1 = (2013 - 1) \cdot (2013 + 1) - 1 = 2012 \cdot 2014 - 1$ što je ceo broj koji je uzajamno prost sa brojevima 2012 i 2014 pa nije deljiv tim brojevima. Za $m = 3$ je $a^m + b^m = a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = 2013 \cdot (2013^2 - 2 - 1) = 2013^3 - 3 \cdot 2013$. Kako je $2013 \equiv 1 \pmod{2012}$ i $2013 \equiv -1 \pmod{2014}$ to je $2013^3 - 3 \cdot 2013 \equiv 1^3 - 3 \cdot 1 \pmod{2012}$, odakle sledi $2013^3 - 3 \cdot 2013 \not\equiv 0 \pmod{2012}$, odnosno $2013^3 - 3 \cdot 2013 \equiv (-1)^3 - 3 \cdot (-1) \pmod{2014}$, odakle sledi $2013^3 - 3 \cdot 2013 \not\equiv 0 \pmod{2014}$. Odatle sledi da broj $a^m + b^m = a^3 + b^3$ nije deljiv brojevima 2012 i 2014.

- (**IH:**) Pretpostavimo da su za neki prirodan broj m brojevi $a^m + b^m$, $a^{m+1} + b^{m+1}$ i $a^{m+2} + b^{m+2}$ celi brojevi koji nisu deljivi ni sa 2012 ni sa 2014

- (**ID:**) Dokažimo da je broj $a^{m+3} + b^{m+3}$ ceo broj koji nije deljiv ni sa 2012 ni sa 2014.

  Iz jednakosti (7) imamo da je

$$a^{m+3} + b^{m+3} = 2012 \cdot 2014(a^{m+1} + b^{m+1}) - 2013 \cdot (a^m + b^m),$$

  pa je to kao razlika dva cela broja (prema IH) ceo broj. Kako je

$$a^{m+3} + b^{m+3} \equiv -(a^m + b^m) \pmod{2012},$$

$$a^{m+3} + b^{m+3} \equiv a^m + b^m \pmod{2014},$$

  i kako prema IH $a^m + b^m$ nije deljivo ni sa 2012 ni 2014, to ni broj $a^{m+3} + b^{m+3}$nije deljiv ni sa 2012 ni sa 2014, čime je naše tvrđenje dokazano.

  Iz jednakosti (6) sledi da je $a^{m+3} + b^{m+3}$ ceo broj. Iz jednakosti (7) sledi da je

Ukoliko bi jednačina

$$a^m + b^m = 2012n$$

imala rešenje (m_0, n_0) sledilo bi da je $a^{m_0} + b^{m_0} \equiv 0 \pmod{2012}$ što je u kontradikciji sa prethodnim delom dokaza.

Ukoliko, sa druge strane, postoji rešenje (m_1, n_1) jednačine

$$a^m + b^m = 2014n,$$

sledilo bi da je $a^{m_1} + b^{m_1} \equiv 0 \pmod{2014}$, što je takođe u kontradikciji sa induktivnim dokazom.

Odavde sledi da jednačine postavljene u zadatku nemaju rešenja u skupu prirodnih brojeva.

Zadatak 11 *Odrediti ostatak zbira*

$$S_{2013} = 1^{2501} + 2^{2501} + \ldots + 2012^{2501} + 2013^{2501}$$

pri deljenju sa 625.

Rešenje: Za rešavanje ovog zadatka biće potrebna Ojlerova funkcija i Ojlerova teorema [2, 4]. Neka je kanonska reprezentacija prirodnog broja $n \geq 2$

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Broj prirodnih brojeva $\varphi(n)$ manjih od n koji su uzajamno prosti sa n jednak je

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \tag{8}$$

(*Funkcija* φ *naziva se Ojlerova funkcija*). Važi i

Teorema 2 (Ojlerova teorema) *Ukoliko su brojevi* a *i* n *uzajamno prosti, onda je*

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}. \tag{9}$$

Kako je $\varphi(625) = \varphi\left(5^4\right) = 500$, to za prirodan broj a koji je uzajamno prost sa 625, iz Ojlerove teoreme sledi da je

$$a^{2501} = \left(a^{500}\right)^4 \cdot a \equiv 1^4 \cdot a \equiv a \pmod{625}.$$

Ako prirodan broj a nije uzajamno prost sa 625, tada $5|a$ pa je $a = 5q, \quad q \in \mathbb{N}$. Tada je

$$a^{2501} = (5q)^{2501} = 5^4 \cdot 5^{2497} \cdot q^{2501} = 625 \cdot 5^{2497} \cdot q^{2501},$$

odakle sledi da je

$$a^{2501} \equiv 0 \pmod{625}$$

u slučaju da $5|a$.

Zbog toga je

$$S_{2013} \equiv (1 + 2 + \ldots + 2013) - (5 + 10 + \ldots + 2010) \pmod{625}.$$

Kako je

$$1 + 2 + \ldots + 2013 = \frac{2013 \cdot 2014}{2} = 2027091 \tag{10}$$

i

$$\begin{aligned} 5 + 10 + \ldots + 2005 + 2010 &= 5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + \ldots + 5 \cdot 401 + 5 \cdot 402 \\ &= 5 \cdot (1 + 2 + \ldots + 401 + 402) \\ &= 5 \cdot \frac{402 \cdot 403}{2} = 405015, \end{aligned} \tag{11}$$

to iz (10,11) sledi da je $S_{2013} \equiv 1622076 \pmod{625}$, odnosno

$$S_{2013} \equiv 201 \pmod{625}.$$

Zadatak 12 *a) Dokazati da postoji prirodan broj n takav da je broj $2013^n - 1$ deljiv sa 2^{2014}. Odrediti najmanje takvo n.*

b) Za dati neparan broj $m \geq 3$ odrediti najmanji prirodan broj n tako da je broj $m^n - 1$ deljiv brojem 2^{2013}.

Rešenje: Neka su k, m dati prirodni brojevi, gde je m neparan i $m \geq 3$. Odredimo najmanji prirodan broj n za koji

$$2^k | (m^n - 1).$$

Napomenimo da broj m mora biti neparan, jer u slučaju da je broj m paran, broj $m^n - 1, \quad n \in \mathbb{N}$, bi bio neparan pa ne bi bio deljiv stepenom broja 2.

Broj n je moguće napisati u obliku

$$n = 2^t \cdot q, \qquad t \in \mathbb{N}, \quad q \in 2\mathbb{N} - 1.$$

Odatle sledi da je

$$m^n - 1 = \left(m^{2^t}\right)^q - 1 = \left(m^{2^t} - 1\right) \cdot \underbrace{\left[\left(m^{2^t}\right)^{q-1} + \left(m^{2^t}\right)^{q-2} + \ldots + \left(m^{2^t}\right)^1 + 1\right]}_{R}$$

Broj R je, kao zbir neparnog broja neparnih brojeva (q neparnih brojeva koji su neparni kao stepeni neparnog broja m), neparan broj pa $2^k | (m^n - 1)$ ako i samo ako $2^k | \left(m^{2^t} - 1\right)$. Imamo da je

$$m^{2^t} - 1 = (m^2 - 1) \underbrace{(m^2 + 1) \ldots (m^{2^{t-1}} + 1)}_{W}.$$

Kako je m neparan broj, to je

$$m \equiv \pm 1 \pmod 4,$$

pa za proizvoljan broj u važi kongruencija

$$m^{2^u} \equiv 1 \pmod 4.$$

Zbog toga su u broju W svi činioci deljivi sa 2 ali ne i sa 4. Kako u broju W imamo $t - 1$ činilaca oblika $(m^{2^g} - 1), g = 1, 2, \ldots, t - 1$, to je najveći stepen broja 2 koji deli broj W jednak 2^{t-1}. Ostaje još da se razmotri koji je najveći stepen broja 2 koji deli broj $m^2 - 1$.

Neka je 2^S najveći stepen broja 2 koji deli $m^2 - 1$.

Sada zaključujemo da je najveći stepen broja 2 koji deli $\left(m^{2^t}\right)^q - 1 = m^{2^t \cdot q} - 1 = m^n - 1$ jednak 2^{t-1+S}.

Sada možemo da rešimo oba dela postavljenog zadatka.

a) Ovde je $k = 2014$ i $m = 2013$. Kako je $m^2 - 1 = 2^3 \cdot 506521$, to je $S = 3$, pa iz jednačine $2014 = t - 1 + 3$ sledi da je $t = 2012$. Odatle sledi da su prirodni brojevi oblika $2013^n - 1 = 2013^{2^{2012} \cdot q} - 1, q \in \mathbb{N}$, deljivi sa 2^{2014}. Najmanji takav broj n dobija se za $q = 1$ i jednak je $n = 2^{2012}$.

b) Ovde je $k = 2013$, pa iz jednačine $2013 = t - 1 + S$ sledi da je $t = 2014 - S$. Najmanji traženi broj n je oblika 2^{2014-S}, gde S zadovoljava uslov da je 2^S najveći stepen broja 2 koji deli $m^2 - 1$.

Acknowledgments. This paper is financially supported by project 174012 of Serbian Ministry of Education, Science and Technological development.

Authors thank reviewers on critiques and useful advices for corrections of errors and creating clearer solutions of the tasks.

Literatura

[1] V. Mićić, Z. Kadelburg, D. Đukić, *Uvod u teoriju brojeva, materijali za mlade matematičare, sveska 15*, DMS, Beograd 2004.

[2] S. B. Branković, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike za srednje škole, odabrana poglavlja*, Zavod za udžbenike, Beograd 2007.

[3] *Tangenta 10*, Zbirka zadataka objavljenih u rubrici "zadaci iz matematike" časopisa *Tangenta* 1995 - 2005. godine, priredio B. Popović, DMS, Beograd 2006.

[4] I. Dolinka, *Elementarna teorija brojeva: moji omiljeni zadaci*, DMS, Beograd 2007.

[5] V. Baltić, D. Đukić, Đ. Krtinić, I. Matić, *Pripremni zadaci za matematička takmičenja srednjoškolaca u Srbiji*, DMS, Beograd 2008.

Primljeno 20.12.2012, revidirana verzija 26.01.2013; dostupno online 04.02.2013