MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (p)**
XIX(3)(2013), 31-33 **ISSN 1986-5228 (o)**

UOPŠTENJA DVIJE TEOREME ZA PRAVILNE MNOGOUGLOVE

(Generalizations of two theorems for the regular polygons)

Dragoljub Milošević[1]

Sažetak. U radu dajemo uopštenja sljedećih teorema:
1) Ako je $ABCDEFGHI$ pravilni devetougao, tada je $AE - AC = AB$;
2) Ako je $ABCDEFG$ pravilni sedmougao, tada je $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$.

Ključne riječi: pravilni mnogougao, stranica i dijagonale pravilnog mnogougla, sinusna teorema, adicione formule za sinus i kosinus.

Abstract. In this paper we give the generalizations of the following theorems:
1) If $ABCDEFGHI$ is a regular nonagon, then $AE - AC = AB$;
2) If $ABCDEFG$ is a regular septagon, then $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$.

Key words: regular polygon, side and diagonals of regular polygon, sine law, addition formulas for sine and cosine.

AMS Subject classification (2010): **51M04, 97G40**
ZDM Subject classification (2010): **G40**

U [2] i [3] dokazane su sljedeće dvije teoreme[2]:

Teorema 1. *U pravilnom devetouglu $A_0A_1A_2...A_8$ dužina stranice jednaka je razlici dužina najduže i najkraće dijagonale, tj.*

$$A_0A_1 = A_0A_4 - A_0A_2 \tag{1}$$

[1] 17. NOU divizije 43, 32300 Gornji Milanovac, Srbija
[2] Ovdje su one preformulisane

Teorema 2. *U pravilnom sedmouglu* $A_0A_1A_2...A_6$ *važi jednakost*

$$\frac{1}{A_0A_1}=\frac{1}{A_0A_2}+\frac{1}{A_0A_3}. \tag{2}$$

Ovdje ćemo dokazati njihova uopštenja (generalizacije).

Teorema 3. *Ako je* $A_0A_1A_2...A_{3n-1}$ *pravilan* $3n$ *- ougao, onda je*

$$A_0A_{n+1}-A_0A_{n-1}=A_0A_1 \tag{3}$$

Teorema 4. *Ako je* $A_0A_1A_2...A_{2n}$ *pravilan* $(2n+1)$ *- ougao, onda je*

$$\frac{A_0A_2}{A_0A_1}-\frac{A_0A_{n-1}}{A_0A_n}=1\ . \tag{4}$$

Dokaz teoreme 3. Neka je R dužina poluprečnika opisane kružnice oko pravilnog $3n$ - ougla i α veličina periferijskog ugla nad njegovom stranicom. Tada je

$$A_0A_1=2R\cdot\sin\alpha\ ;\quad A_0A_{n-1}=2R\cdot\sin(n-1)\alpha\ \text{ i }\ A_0A_{n+1}=2R\cdot\sin(n+1)\alpha\ ,$$

pa je jednakost (3) ekvivalentna sa

$$\sin(n+1)\alpha-\sin(n-1)\alpha=\sin\alpha\ . \tag{5}$$

S obzirom da u pravilnom $3n$ - ouglu vrijedi

$$3n\alpha=\pi\ ,$$

imamo

$$\cos n\alpha=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

Korištenjem adicionih formula za sinus zbira i sinus razlike dobijamo

$$\begin{aligned}\sin(n+1)\alpha-\sin(n-1)\alpha&=\sin n\alpha\cdot\cos\alpha+\cos n\alpha\cdot\sin\alpha-(\sin n\alpha\cdot\cos\alpha-\cos n\alpha\cdot\sin\alpha)\\&=2\cos n\alpha\cdot\sin\alpha\\&=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\alpha\\&=\sin\alpha\ ,\end{aligned}$$

što znači da jednakost (5), a samim tim i jednakost (3), važi.

Napomena 1. Za pravilni devetougao $(n=3)$ imamo

$$A_0A_4-A_0A_2=A_0A_1\text{, tj. jednakost (1) važi.}$$

Dokaz teoreme 4. Obilježimo sa R dužinu poluprečnika opisane kružnice oko pravilnog $(2n+1)$- ougla i sa α veličinu periferijskog ugla nad stranicom tog mnogougla. Tada imamo

$$A_0A_1=2R\cdot\sin\alpha\ ,\quad A_0A_2=2R\cdot\sin 2\alpha\ ,$$

$$A_0A_{n-1}=2R\cdot\sin(n-1)\alpha\ \text{ i }\ A_0A_n=2R\cdot\sin n\alpha\ .$$

Sada je jednakost (4) ekvivalentna sa

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin(n-1)\alpha}{\sin n\alpha}=1,$$

tj. sa

$$\sin 2\alpha\cdot\sin n\alpha-\sin\alpha\cdot\sin(n-1)\alpha=\sin\alpha\cdot\sin n\alpha\,. \tag{6}$$

Primjenom trigonometrijske identičnosti

$$\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y)),\ \ x,\mathrm{y}\in R$$

jednakost (6) se transformiše u

$$\cos n\alpha-\cos(n+2)\alpha=\cos(n-1)\alpha-\cos(n+1)\alpha\,. \tag{7}$$

Kako je $(2n+1)\alpha=\pi$, imamo

$$\cos(n+1)\alpha=\cos((2n+1)\alpha-n\alpha)=\cos(\pi-n\alpha)=-\cos n\alpha$$

i

$$\cos(n+2)\alpha=\cos((2n+1)\alpha-(n-1)\alpha)=\cos(\pi-(n-1)\alpha)=-\cos(n-1)\alpha\,.$$

Sada jednakost (7) ima oblik

$$\cos n\alpha+\cos(n-1)\alpha=\cos(n-1)\alpha+\cos n\alpha\,,$$

što je očigledno tačno. Ovim je dokazana jednakost (6), a samim tim i jednakost (4).

Napomena 2. Za pravilni sedmougao $(n=3)$ imamo

$$\frac{A_0A_2}{A_0A_1}-\frac{A_0A_2}{A_0A_3}=1\,,$$

što je ekvivalentno sa jednakosti (2).

Napomena 3. Za pravilni petougao $(n=2)$ dobijamo $\frac{A_0A_2}{A_0A_1}-\frac{A_0A_1}{A_0A_2}=1$, ili

$$\frac{d}{a}-\frac{a}{d}=1\,, \tag{8}$$

gde je $a=A_0A_1$ i $d=A_0A_2$.

Jednakost (8) dokazana je u [1].

LITERATURA

[1] Š. Arslanagić i D. Milošević, *Različite metode dokazivanja jedne teoreme u geometriji*, MAT-KOL (Banja Luka), XVII (1) (2011), 13 – 24.

[2] D. Milošević, *Neke teoreme o pravilnom devetouglu*, Tangenta (Beograd), 42/2 (2005/06), 15 – 16.

[3] D.Milošević, *Osam rešenja jednog zadatka o pravilnom sedmouglu*, Tangenta (Beograd), 65/1 (2011/12), 12 – 17.

[4] M. Prvanović, *Osnovi geometrije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1987.

Primljeno u redakciju 09.01.2013.