MAT-KOL (Banja Luka)
ISSN 0354-6969 (p), ISSN 1986-5228 (o)
Vol. XIX (3)(2013), 23-29

UOPŠTENJA NEKIH ALGEBARSKIH NEJEDNAKOSTI

Generalizations of some algebraic inequalities

Dušan J. Simjanović[1] **Nenad O. Vesić**[2]

Sažak: U ovom radu su uopštene neke dobro poznate algebarske nejednakosti nezavisno od broja promenljivih članova.

Ključne reči fraze: : sredina, kvadratna sredina, aritmetička sredina, geometrijska sredina, harmonijska sredina, funkcija, prvi izvod

Abstract. Some well known algebraic inequalities are generalised in this paper regardless of the number of variables.

AMS Mathematics Subject Classification (2010): 26E60, 97F50
ZDM Subject Classification (2010): H30, I20, F50

Key words and phrases: mean, squared mean, arithmetic mean, geometric mean, harmonic mean, function, prime derivative

1 Uvod

U radovima Arslanagića [1] i Miloševića [2] posmatrane su sledeće sredine:

$H_2 = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ *harmonijska sredina*,

$G_2 = \sqrt{ab}$ *geometrijska sredina*,

$A_2 = \frac{a+b}{2}$ *aritmetička sredina*,

$K_2 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ *kvadratna sredina*,

[1]Prirodno-matematički fakultet Niš, 18000 Niš, Višegradska 33 Srbija, e-mail: dsimce@gmail.com
[2]Prirodno-matematički fakultet Niš; 18000 Niš, Višegradska 33 Srbija, e-mail: vesic.specijalac@gmail.com
Projekat 174012 Ministarstva Prosvete, Nauke i Tehnoškog Napretka u Vladi Republike Srbije,

pozitivnih realnih brojeva a i b.

Dobro je poznato da važi

$$H_2 \leq G_2 \leq A_2 \leq K_2,$$

pri čemu jednakosti u prethodnim nejednakostima važe ako i samo ako je $a = b$.

Posmatrajmo kubnu sredinu

$$Q_2 = \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}}$$

pozitivnih realnih brojeva a i b.

Dokazaćemo da za kvadratnu i kubnu sredinu pozitivnih realnih brojeva važi relacija $K_2 \leq Q_2$.

$$\begin{gathered}
\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} \Leftrightarrow \\
\left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}\right)^6 \leq \left(\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}}\right)^6 \Leftrightarrow \\
\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^3 \leq \left(\frac{a^3 + b^3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \\
a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 \leq 2(a^6 + 2a^3b^3 + b^6) \Leftrightarrow \\
0 \leq a^6 + b^6 + 4a^3b^3 - 3a^4b^2 - 3a^2b^4 \Leftrightarrow \\
0 \leq (a^2 - b^2)(a^4 - b^4) + 4(ab)^3 - 2a^4b^2 - 2a^2b^4 \Leftrightarrow \\
0 \leq (a^2 - b^2)(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) + 2a^2b^2(2ab - a^2 - b^2) \Leftrightarrow \\
0 \leq (a^2 - b^2)^2(a^2 + b^2) - 2a^2b^2(a - b)^2 \Leftrightarrow \\
0 \leq (a - b)^2(a + b)^2(a^2 + b^2) - 2a^2b^2(a - b)^2 \Leftrightarrow \\
0 \leq (a - b)^2 \left[(a + b)^2(a^2 + b^2) - 2a^2b^2\right] \Leftrightarrow \\
0 \leq (a - b)^2 \left[(a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + b^2) - 2a^2b^2\right] \Leftrightarrow \\
0 \leq (a - b)^2 \left[(a^2 + b^2)(a^2 + b^2) + 2ab(a^2 + b^2) - 2a^2b^2\right] \Leftrightarrow \\
0 \leq (a - b)^2 \left[a^4 + b^4 + 2a^2b^2 + 2ab(a^2 + b^2) - 2a^2b^2\right] \Leftrightarrow \\
0 \leq (a - b)^2 \left[a^4 + b^4 + 2ab(a^2 + b^2)\right].
\end{gathered}$$

Očigledno, $K_2 = Q_2$ ako i samo ako je $a = b$. Iz poslednje nejednakosti sledi

$$H_2 \leq G_2 \leq A_2 \leq K_2 \leq Q_2.$$

Poznate su sledeće nejednakosti [1, 2]:

N1: $K_2 \cdot G_2 \leq A_2^2$;

N2: $H_2 \cdot K_2 \leq A_2 \cdot G_2$;

N3: $2K_2 + H_2 \leq 3A_2$.

Postavlja se pitanje šta će se dogoditi sa navedenim nejednakostima kada se kvadratna sredina zameni kubnom. Sledeći primer pokazuje da nejednakosti N1, N2. i N3. ne važe kada se kvadratna sredina zameni kubnom.

Primer 1 *Neka je $a = 1$ i $b = 2$.*

- *Harmonijska:* $H_2 = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{4}{3}$,
- *Geometrijska:* $G_2 = \sqrt{ab} = \sqrt{2}$,
- *Aritmetička:* $A_2 = \frac{a+b}{2} = \frac{3}{2}$,
- *Kubna:* $Q_2 = \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$.

Sada je

$$A^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4};\ Q_2 \cdot G_2 = \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[6]{9^2 \cdot 2};\ H_2 \cdot Q_2 = \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2^5}{3}};$$

$$A_2 \cdot G_2 = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\frac{3^2}{2}};\ 2Q_2 + H_2 = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4}{3};\ 3A_2 = \frac{9}{2}.$$

1. $\frac{9}{4} < \sqrt[6]{9^2 \cdot 2} \Leftrightarrow \frac{9^6}{4^6} < 9^2 \cdot 2 \Leftrightarrow 3^8 < 2^{13} \Leftrightarrow 6561 < 8192 \Leftrightarrow A_2^2 < Q_2 \cdot G_2$.
2. $\sqrt[3]{\frac{2^5}{3}} > \sqrt{\frac{3^2}{2}} \Leftrightarrow \frac{2^{10}}{3^2} > \frac{3^6}{2^3} \Leftrightarrow 2^{13} > 3^8 \Leftrightarrow H_2 \cdot Q_2 > A_2 \cdot G_2$.
3. $\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4}{3} > \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2^5 \cdot 3^5 > 19^3 \Leftrightarrow 7776 > 6859 \Leftrightarrow 2Q_2 + H_2 > 3A_2$.

2 Glavni rezultati

Mi ćemo u ovom radu posmatrati opštiji slučaj. Definisaćemo sledeće sredine pozitivnih realnih brojeva $a_1, a_2, \ldots a_n$:

S1 $H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$ *harmonijska sredina,*

S2 $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$ *geometrijska sredina,*

S3 $A_n = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ *aritmetička sredina,*

S4 $K_n = \sqrt{\frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}}$ *kvadratna sredina,* S5 $F_n(\alpha) = \sqrt[\alpha]{\frac{a_1^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}}$ $\qquad$ *α-sredina*, $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Primetimo da je

$$F_n(1) = A_n \quad \text{i} \quad F_n(2) = K_n.$$

U narednom zadatku je pokazano da u specijalnom slučaju (kada je $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2012$), analognu nejednakost nejednakosti **N1** iz [1, 2] zadovoljavaju i sredine $F_2(4), G_2$ i A_2.

ZADATAK: Ako su a i b pozitivni realni brojevi za koje važi

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2012,$$

dokažati da sredine $F_2(4), G_2$ i A_2 ispunjavaju nejednakost

$$F_2(4) \cdot G_2 < A_2^2.$$

Rešenje: Uočimo proizvoljne pozitivne realne brojeve a i b. Za te brojeve je $F_2(4) = \sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}}, G_2 = \sqrt{ab}$ i $A_2 = \frac{a+b}{2}$. Nejednakost koju dokazujemo, ekvivalentna je sa

$$\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}} \cdot \sqrt{ab} < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{ab}\sqrt{ab}\sqrt[4]{\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)} < \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 2\right)} < \frac{1}{4}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right) \Leftrightarrow \left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = t\right| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{2}(t^2-2)} < \frac{1}{4}(t+2) \Leftrightarrow t^2 - 2 < \frac{1}{2^7}(t+2)^4 \Leftrightarrow$$

$$2^7t^2 - 2^8 < t^4 + 8t^3 + 24t^2 + 32t + 16 \Leftrightarrow 0 < t^4 + 8t^3 - 104t^2 + 32t + 272.$$

Kako je $t \geq 2012$, sledi da je $t^4 \geq 104t^2 \Leftrightarrow t^2 > 104$, što je tačno jer je $t \geq 2012$. Ovim je dokazano da je

$$0 < t^4 + 8t^3 - 104t^2 + 32t + 272,$$

što potvrđuje našu nejednakost. $\diamondsuit$

Neka su $x_1, \ldots, x_n$ pozitivni realni brojevi. Posmatraćemo $\alpha-$sredine ovih brojeva. Dokazaćemo da za $0 < \alpha < \beta$ važi $F_n(\alpha) \leq F_n(\beta)$.

Koristićemo sledeće pomoćne nejednakosti:

1: Za svaki $x \in \mathbb{R}^+$ je

$$x \ln x \geq x - 1.$$

2: Neka su $x_2, x_3, \dots x_n \in \mathbb{R}$ fiksirani realni brojevi takvi da važi $x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_n > 0$. Tada, za svaki realan broj x takav da je $x \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_n > 0$ važi

$$x \ln x + x_2 \ln x_2 + x_3 \ln x_3 + \cdots + x_n \ln x_n \geq$$
$$(x + x_2 + x_3 \cdots + x_n) \ln \frac{x + x_2 + x_3 \cdots + x_n}{n}.$$

Dokaz nejednakosti 1: Uočimo funkciju

$$f(x) = x \ln x - (x - 1).$$

Za funkciju f je

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x.$$

Znak prvog izvoda f' funkcije f prikazan je sledećom tabelom

	$0 < x \leq 1$	$1 \leq x$
$sgn(f') = sgn(\ln x)$	$- - -$	$+ + +$

Iz prethodne tabele vidimo da je funkcija f opadajuća na intervalu $(0, 1)$, odnosno rastuća na $(1, +\infty)$. To znači da je lokalni, a zbog stroge monotonosti i globalni, minimum funkcije f jednak $f(1) = 0$ odnosno,

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ f(x) = x \ln x - (x - 1) \geq f(1),\ \text{tj.}$$
$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ x \ln x - (x - 1) \geq 0,\ \text{odnosno,}$$
$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ x \ln x \geq x - 1.$$

Dokaz nejednakosti 2: Uočimo funkciju

$$g(x) = x \ln x + x_2 \ln x_2 + x_3 \ln x_3 + \cdots + x_n \ln x_n -$$
$$(x + x_2 + x_3 \cdots + x_n) \ln \frac{x + x_2 + x_3 \cdots + x_n}{n}.$$

Prvi izvod funkcije $g(x)$ je

$$g'(x) = 1 + \ln x - \ln \frac{x + x_2 + x_3 \cdots + x_n}{n} -$$
$$(x + x_2 + x_3 \cdots + x_n) \cdot \frac{n}{x + x_2 + x_3 \cdots + x_n} \cdot \frac{1}{n}.$$

Daljim sređivanjem dobijamo da je

$$g'(x) = \ln x - \ln \frac{x + x_2 + x_3 \cdots + x_n}{n}.$$

Kako je $x \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_n > 0$, važi nejednakost

$$\frac{nx}{n} \geq \frac{x + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n},\ \text{tj.}\ x \geq \frac{x + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

pa je $g'(x) \geq 0$.

Dakle, funkcija $g(x)$ je rastuća pa je najmanja vrednost funkcije $g(x)$ za $x = x_2$.

Za određeno x_n i različite $(n-2)$-torke pozitivnih realnih brojeva

$$(x_2, x_3, \dots, x_{n-1})$$

za koje je $x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_{n-1} \geq x_n$, odredimo skup M svih najmanjih vrednosti funkcije $g(x)$. Kako je funkcija $g(x)$ rastuća, najmanji element skupa M dobija se za $x = x_n$. Iz $x \geq x_2$, zaljučujemo da se najmanja vrednost funkcije $g(x)$ dobija za $x = x_n$ i jednaka je $g(x_n) = 0$. Ovim smo dokazali traženu nejednakost.

Ispitaćemo odnos između α-sredina za $\alpha \geq 1$. Neka su $x_1, \dots, x_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je

$$x_1^\alpha \geq \cdots \geq x_n^\alpha.$$

Uočimo α-sredinu brojeva $x_1, \dots, x_n$.

$$F_n(\alpha) = e^{\frac{\ln \frac{x_1^\alpha + \cdots + x_n^\alpha}{n}}{\alpha}}.$$

Sada je

$$F_n'(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2} e^{\frac{\ln \frac{x_1^\alpha + \cdots + x_n^\alpha}{n}}{\alpha}} \left(\frac{x_1^\alpha \ln x_1^\alpha + \cdots + x_n^\alpha \ln x_n^\alpha}{x_1^\alpha + \cdots + x_n^\alpha} - \ln \frac{x_1^\alpha + \cdots + x_n^\alpha}{n} \right).$$

Znak prvog izvoda sredine $F_n(\alpha)$ je identičan znaku funkcije

$$\phi(\alpha) = x_1^\alpha \ln x_1^\alpha + \cdots + x_n^\alpha \ln x_n^\alpha - (x_1^\alpha + \cdots + x_n^\alpha) \cdot \ln \frac{x_1^\alpha + \cdots + x_n^\alpha}{n}.$$

Na osnovu pomoćne nejednakosti **2** je $\phi(\alpha) \geq 0$. Jednakost važi ako i samo ako je $x_1 = \cdots = x_n$.

Dakle, iz $1 \leq \alpha < \beta$ sledi $F_n(\alpha) \leq F_n(\beta)$.

Neka su α i β realni brojevi takvi da je $0 < \alpha < \beta$. Dokazaćemo neke uopštene nejednakosti vezane za brojeve α i β i odgovarajuće t-sredine.

UN1: $F_n^{\alpha+\beta}(\alpha) \leq F_n^\beta(\alpha) \cdot F_n^\alpha(\beta)$.

Dokaz: Ovaj odnos sledi direktno iz činjenice da je funkcija $f(x) = x^\alpha$ rastuća za $\alpha > 0$ i dokazanog odnosa između α-sredina.

UN2: $\frac{1}{F_n^\alpha(\beta)} + \frac{1}{F_n^\beta(\alpha)} \geq \frac{2}{F_n^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(\beta)}$.

Dokaz: Iz nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine sledi da je:

$$\frac{1}{F_n^\alpha(\beta)} + \frac{1}{F_n^\beta(\alpha)} \geq \frac{2}{\sqrt{F_n^\alpha(\beta) \cdot F_n^\beta(\alpha)}}.$$

Funkcija $f(x) = x^{\alpha}$ je rastuća za $\alpha > 0$ pa iz odnosa između α-sredina sledi da je

$$\frac{2}{\sqrt{F_n^{\alpha}(\beta) \cdot F_n^{\beta}(\alpha)}} \geq \frac{2}{\sqrt{F_n^{\alpha}(\beta) \cdot F_n^{\beta}(\beta)}} = \frac{2}{F_n^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(\beta)},$$

čime je dokazana i ova nejednakost.

UN3: $F_n^{\beta}(\alpha) \leq F_n^{\alpha}(\beta) \cdot F_n^{\beta-\alpha}(\alpha)$.

Dokaz: Iz

$$\frac{F_n^{\beta}(\alpha)}{F_n^{\alpha}(\beta)} \leq \frac{F_n^{\beta}(\alpha)}{F_n^{\alpha}(\alpha)} = F_n^{\beta-\alpha}(\alpha)$$

sledi

$$F_n^{\beta}(\alpha) \leq F_n^{\alpha}(\beta) \cdot F_n^{\beta-\alpha}(\alpha).$$

Autori se zahvaljuju prof. dr Snežani Ilić, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu, na korisnim savetima i sugestijama.

Acknowledgement

This paper was partially supported by project 174012 of Serbian Ministry of Education, Science and Technological Development. Authors thanks professor Snežana Ilić, full professor on Faculty of Science and Mathematics in Niš, for useful help, remarks and suggestions.

LITERATURA

[1] Š. Arslanagić, *Neke nove nejednakosti između brojevnih sredina*, Nastava matematike (Beograd), LIV, 4, 2009, 11-14.

[2] D. Milošević, *Još o brojevnim sredinama*, Nastava matematike (Beograd), LV, 3-4, 2010, 51-52.

Primljeno u redakciju 06.12.2012; revidirana verzija 12.12.2012; dostupno online 17.12.2012