MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XIX(2)(2013), 9-14 **ISSN 1986-5828 (o)**

GENERALIZACIJA JEDNE GEOMETRIJSKE NEJEDNAKOSTI O TROUGLU

(Generalization of one geometric inequality on triangle)

Šefket Arslanagić[1] i Naida Bikić[2]

Sažetak: U radu je data generalizacija jedne geometrijske nejednakosti koja se odnosi na dužine stranica a,b,c trougla ΔABC.

Ključne riječi: geometrijska nejednakost o trouglu, nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine, nejednakost Koši-Bunjakovski-Švarca, nejednakost Čebiševa, simetrična nejednakost, konveksna funkcija, Jensenova nejednakost.

Abstract: In this paper we give the generalization of one geometric inequality on triangle for the sides a,b,c of triangle ΔABC.

Key words: geometric inequality on triangle, *AM-GM* inequality, inequality of Cauchy-Buniakowsky-Schwarz, inequality of Chebishev, symmetric inequality, convex function, Jensen's inequality.

AMS Subject Classification (2010):**51M94, 97G40**
ZDM Subject Classification (2010): **G40**

Počećemo sa dokazom nejednakosti koja se odnosi na dužine stranica a,b,c trougla ΔABC koja glasi

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3. \tag{1}$$

Dokaz 1. Kako je $b+c-a>0, a+c-b>0$ i $a+b-c>0$ (nejednakosti trougla), to imamo na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b+c-a}\cdot\frac{b}{c+a-b}\cdot\frac{c}{a+b-c}}. \tag{2}$$

[1] Prirodno-matematičku fakultet u Sarajevu, Odsjek za matematiku, Zmaja od Bosne 35, 71000 Sarajevo, BiH; e-mail:asefket@pmf.unsa.ba
[2] Filozofski fakultet Univerziteta u Zenici, Odsjek za matematiku i informatiku, Zmaja od Bosne 56, 72100 Zenica, BiH; e-mail:naida.bikic@hotmail.com

Koristeći poznatu nejednakost (1.3. iz [3])

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \le abc\ ,$$

dobijamo iz (2)

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \ge 3\ ,$$

a ovo je nejednakost (1). Vrijedi jednakost u (1) ako i samo ako je $a=b=c$ (jednakostranični trougao).

Dokaz 2. Koristeći nejednakost Koši-Bunjakovski-Švarca za $n=3$, tj.

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \le \left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)$$

gdje $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 \in \mathbb{R}$, dobijamo

$$\left[a(b+c-a)+b(c+a-b)+c(a+b-c)\right]\cdot\left(\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\right) \ge (a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \ge \frac{(a+b+c)^2}{2ab+2bc+2ac-a^2-b^2-c^2}\ . \qquad (3)$$

Dokazaćemo sada da vrijedi nejednakost

$$\frac{(a+b+c)^2}{2ab+2bc+2ac-a^2-b^2-c^2} \ge 3 \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \ge 6ab+6bc+6ac-3a^2-3b^2-3c^2$$

$$\Leftrightarrow 4a^2+4b^2+4c^2 \ge 4ab+4bc+4ac$$

$$\Leftrightarrow 2\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \ge 0,$$

a ova nejednakost je tačna, pa je tačna i nejednakost (4). Sada, iz nejednakosti (3) i (4), dobijamo nejednakost (1).

Dokaz 3. Iz nejednakosti (1.15 iz [3]) koja glasi

$$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c} \ge \frac{9}{a+b+c} \qquad (5)$$

dobijamo

$$\frac{a+b+c}{b+c-a}+\frac{a+b+c}{c+a-b}+\frac{a+b+c}{a+b-c}\geq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{(b+c-a)+2a}{b+c-a}+\frac{(c+a-b)+2b}{c+a-b}+\frac{(a+b-c)+2c}{a+b-c}\geq 9$$

$$\Leftrightarrow 3+2\left(\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\right)\geq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3\,,$$

a ovo je nejednakost (1).

Dokaz 4. Nejednakost (1) je simetrična, pa ne umanjujući opštost možemo uzeti da je $0<a\leq b\leq c$, a odavde slijedi $b+c-a\geq c+a-b\geq a+b-c$, te $\frac{1}{b+c-a}\leq\frac{1}{c+a-b}\leq\frac{1}{a+b-c}$. Sada, na osnovu nejednakosti Čebiševa za nizove brojeva (a,b,c) i $\left(\frac{1}{b+c-a},\frac{1}{c+a-b},\frac{1}{a+b-c}\right)$ koji su jednako usmjereni, dobijamo

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq\frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\right),$$

a odavde zbog nejednakosti (5) dobijamo datu nejednakost (1).

Sada ćemo dati više dokaza nejednakosti koja se odnosi na dužine a,b,c stranica trougla koja glasi

$$\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\geq a+b+c\ . \tag{6}$$

Dokaz 1. Opet ćemo koristiti nejednakost Koši-Bunjakovski-Švarca za $n=3$. Imamo

$$\left[(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)\right]\cdot\left(\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\right)\geq(a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c}\text{, tj.}$$

$$\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\geq a+b+c,$$

a ovo je nejednakost (6). Vrijedi jednakost u (6) ako i samo ako je $a=b=c$.

Dokaz 2. Za ovaj dokaz ćemo koristiti nejednakost (1) iz [2], str, 53 koja glasi

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}, \tag{7}$$

gdje su $x,y,z>0$ i $a,b,c\in$ ¡ .

Dobijamo, sada, na osnovu nejednakosti (7):

$$\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\geq\frac{(a+b+c)^2}{b+c-a+c+a-b+a+b-c}, \text{ tj.}$$

$$\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c},$$

a odavde slijedi nejednakost (6).

Dokaz 3. Ovdje ćemo opet koristiti nejednakost Čebiševa. Pošto je nejednakost (5) simetrična, to ne umanjujući opštost možemo uzeti da je $0<a\leq b\leq c$, te $a^2\leq b^2\leq c^2$ i $b+c-a\geq c+a-b\geq a+b-c$, a odavde

$$\frac{1}{b+c-a}\leq\frac{1}{c+a-b}\leq\frac{1}{a+b-c}.$$

Sada, na osnovu nejednakosti Čebiševa, dobijamo

$$\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\geq\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\right),$$

a odavde, na osnovu nejednakosti (5), slijedi

$$\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\cdot\frac{9}{a+b+c}. \tag{8}$$

Kako je

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq(a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0,$$

to iz (8) odmah dobijamo nejednakost (6).

Dokaz 4. U ovom dokazu ćemo koristiti Jensenovu nejednakost. Koristićemo funkciju $f:(0,s)\to(0,+\infty)$ koja glasi $f(x)=\frac{x^2}{2(s-x)};\ (0<x<s)$, gdje je $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ poluobim trougla. Kako je $f''(x)=\frac{s^2}{(s-x)^3}>0$, to je funkcija f konveksna pa na osnovu Jensenove nejednakosti imamo

$$f(a)+f(b)+f(c)\ge 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right),\text{ tj.}$$

$$\frac{a^2}{2(s-a)}+\frac{b^2}{2(s-b)}+\frac{c^2}{2(s-c)}\ge 3f\left(\frac{2s}{3}\right)=3\cdot\frac{\frac{4s^2}{9}}{2\left(s-\frac{2s}{3}\right)}=2s,$$

odnosno

$$\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\ge a+b+c,$$

a ovo je nejednakost (6).

Najzad ćemo dokazati generalizovanu nejednakost koja glasi

$$\frac{a^n}{b+c-a}+\frac{b^n}{c+a-b}+\frac{c^n}{a+b-c}\ge 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1}, \tag{9}$$

gdje su $a,b,c>0$ i $n\in N$.

Dokaz. Ideju za ovaj dokaz ćemo preuzeti iz Dokaza 4. nejednakosti (6), tj. koristićemo Jensenovu nejednakost. Uzećemo funkciju: $f:(0,s)\to(0,+\infty)$ koja glasi

$$f(x)=\frac{x^n}{2(s-x)};\ (0<x<s).$$

Kako je

$$f''(x)=\frac{x^{n-2}}{(s-x)^3}\left[(n-2)(n-1)x^2-2s(n-2)x+2s^2(n-1)\right]$$

i vrijedi $f''(x)>0\ \forall x\in(0,s)$ i $n\in N$.

(Lako se provjeri da je izraz u srednjoj zagradi (kvadratni trinom) uvijek pozitivan pa je funkcija f konveksna).

Sada, na osnovu Jensenove nejednakosti, dobijamo

$$\frac{a^n}{2(s-a)}+\frac{b^n}{2(s-b)}+\frac{c^n}{2(s-c)}=\frac{a^n}{b+c-a}+\frac{b^n}{c+a-b}+\frac{c^n}{a+b-c}\geq$$

$$\geq 3f\left(\frac{2s}{3}\right)=3\cdot\frac{\left(\frac{2s}{3}\right)^n}{2\left(s-\frac{2s}{3}\right)}=3\left(\frac{2s}{3}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^n}{b+c-a}+\frac{b^n}{c+a-b}+\frac{c^n}{a+b-c}\geq 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1},$$

a ovo je nejednakost (8) koju je trebalo dokazati.

Vrijedi jednakost u (8) ako i samo ako je $a=b=c$ (jednakostranični trougao).

LITERATURA

[1] Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
[2] Arslanagić, Š., *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.
[3] Bottema, O. and oth., *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.
[4] Cvetkovski, Z., *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2012.