MAT-KOL (Banja Luka)
ISSN 0354-6969 (p), ISSN 1986-5228 (o)
Vol. XIX (2)(2013), 29-34

O JEDNOJ NEJEDNAKOSTI TROUGLA

(About one triangle inequality)

Dragoljub Milošević[1]

Sažetak: U ovom radu dajemo dokaze dva uopštenja nejednakosti (1) iz [1], tj. $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3$.

Ključne reči: nejednakost trougla, nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine, konveksna funkcija.

Abstract

In this paper we give the proof of two generalization for the inequality (1) from [1], i.e. $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3$.

Key words: inequality of triangle, AM-GM inequality, convex function.
AMS Subject Classification (2010): 51M94, 97G40
ZDM Subject Classification (2010): G40.

U [1] dato je više dokaza nejednakosti koja se odnosi na dužine stranica a, b, c trougla ABC

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3, \tag{1}$$

a potom i dokaz njenog uopštenja (generalizacije) oblika

$$\frac{a^n}{b+c-a}+\frac{b^n}{c+a-b}+\frac{c^n}{a+b-c}\geq 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1},\ n\in\mathbb{N}. \tag{2}$$

Ovdje ćemo dati četiri dokaza jednog uopštenja nejednakosti (1):

$$\frac{a}{k(b+c)-a}+\frac{b}{k(c+a)-b}+\frac{c}{k(a+b)-c}\geq\frac{3}{2k-1},\ k\in\mathbb{R}\text{ i } k\geq 1, \tag{3}$$

a zatim i dokaz nejednakosti koja predstavlja uopštenje nejednakosti (1)

$$\frac{a^{\lambda n}}{k(b^\lambda+c^\lambda)-a^\lambda}+\frac{b^{\lambda n}}{k(c^\lambda+a^\lambda)-b^\lambda}+\frac{c^{\lambda n}}{k(a^\lambda+b^\lambda)-c^\lambda}\geq\frac{3^{2-n}(a^\lambda+b^\lambda+c^\lambda)^{n-1}}{2k-1}, \tag{4}$$

[1] 17.NOU divizije 43, 32300 G. Milanovac, Srbija

za $n \in \{1\} \cup [2, \infty)$, i za $k \geq 2^{\lambda-1}$ gde je $\lambda \geq 1$.

Dokaz 1. Označimo lijevu stranu nejednakosti (3) sa M.Tada je

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{k+1}\Big[\frac{ka+kb+kc-(kb+kc-a)}{k(b+c)-a} + \frac{ka+kb+kc-(kc+ka-b)}{k(c+a)-b} \\ &+ \frac{ka+kb+kc-(ka+kb-c)}{k(a+b)-c}\Big] = \frac{1}{k+1}\Big[k(a+b+c)\Big(\frac{1}{k(b+c)-a} \\ (5) &+ \frac{1}{k(c+a)-b} + \frac{1}{k(a+b)-c}\Big) - 3\Big]. \end{aligned}$$

Na osnovu AG nejednakosti za pozitivne brojeve x, y, z, odnosno $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ možemo pisati

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \quad \text{i} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Množenjem posljednje dvije nejednakosti dobijamo

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9,$$

odnosno

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}, \ (x, y, z > 0). \tag{6}$$

Ako u nejednakost (6) stavimo $x = k(b+c) - a$, $y = k(c+a) - b$, i $z = k(a+b) - c$, dobijamo

$$\frac{1}{k(b+c)-a} + \frac{1}{k(c+a)-b} + \frac{1}{k(a+b)-c} \geq \frac{9}{(2k-1)(a+b+c)}. \tag{7}$$

Iz relacija (5) i (7) proizlazi

$$M \geq \frac{1}{k+1}\Big(\frac{9k}{2k-1} - 3\Big) = \frac{3}{2k-1},$$

što je i trebalo dokazati. $\square$

Dokaz 2. Ako stavimo

$$k(b+c) - a = A, \ k(c+a) - b = B \ \text{i} \ k(a+b) - c = C,$$

poslije sabiranja ovih jednakosti dobijamo $(2k-1)(a+b+c) = A + B + C$, odnosno

$$a + b + c = \frac{1}{2k-1}(A + B + C).$$

Sada je

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{(k+1)(2k-1)}\Big[k(B+C)-(k-1)A\Big],\\ b &= \frac{1}{(k+1)(2k-1)}\Big[k(C+A)-(k-1)B\Big],\\ c &= \frac{1}{(k+1)(2k-1)}\Big[k(A+B)-(k-1)C\Big]. \end{aligned}$$

Tada imamo

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{(k+1)(2k-1)}\Big[\frac{k(B+C)}{A}+\frac{k(C+A)}{B}+\frac{k(A+B)}{C}-3(k-1)\Big]\\ &= \frac{1}{(k+1)(2k-1)}\Big[k\Big(\frac{A}{B}+\frac{B}{A}+\frac{B}{C}+\frac{C}{B}+\frac{A}{C}+\frac{C}{A}\Big)-3k+3\Big]. \end{aligned}$$

Na osnovu AG nejednakosti dobijamo

$$\frac{A}{B}+\frac{B}{A}\geq 2\sqrt{\frac{A}{B}\cdot\frac{B}{A}}=2,\quad \frac{B}{C}+\frac{C}{B}\geq 2\quad \text{i}\quad \frac{A}{C}+\frac{C}{A}\geq 2,$$

pa je

$$\begin{aligned} M &\geq \frac{1}{(k+1)(2k-1)}\Big[k(2+2+2)-3k+3\Big]\\ &= \frac{3}{2k-1}, \end{aligned}$$

tj. važi (3). $\square$

Dokaz 3. U [3] dokazana je nejednakost

$$(a+b+c)(x+y+z)\leq 3(ax+by+cz), \tag{8}$$

gde je $a\geq b\geq c$ i $x\geq y\geq z$, ili $a\leq b\leq c$ i $x\leq y\leq z$. Bez smanjenja opštosti, za dužine stranica trougla možemo pretpostaviti da je $a\geq b\geq c$. Tada je $k(b+c)-a\leq k(c+a)-b\leq k(a+b)-c$, a odavde je:

$$\frac{1}{k(b+c)-a}\geq\frac{1}{k(c+a)-b}\geq\frac{1}{k(a+b)-c}.$$

Uočavamo da su ispunjeni uslovi za primjenu nejednakosti (8), pa imamo

$$\begin{aligned} &(a+b+c)\Big[\frac{1}{k(b+c)-a}+\frac{1}{k(c+a)-b}+\frac{1}{k(a+b)-c}\Big]\leq\\ &\leq 3\Big[\frac{a}{k(b+c)-a}+\frac{b}{k(c+a)-b}+\frac{c}{k(a+b)-c}\Big]=3M, \end{aligned}$$

a odavdje zbog nejednakosti (7), slijedi

$$(a+b+c)\frac{9}{(2k-1)(a+b+c)} \le 3M, \quad \text{tj.} \quad M \ge \frac{3}{2k-1}.$$

□

Dokaz 4. U [2], na str. 53 i 54 je dokazana nejednakost

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \ge \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}, \tag{9}$$

gdje je $x, y, z > 0$ i $a, b, c \in \mathbb{R}$. Primjenom nejednakosti (9), ponovo stavljajući $x = k(b+c)-a,\ y = k(c+a)-b,\ z = k(a+b)-c$, dobijamo

$$\begin{aligned} &\frac{a^2}{a\big[k(b+c)-a\big]}+\frac{b^2}{b\big[k(c+a)-b\big]}+\frac{c^2}{c\big[k(a+b)-c\big]} \ge \\ &\ge \frac{(a+b+c)^2}{2k(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Tačna nejednakost $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0$ je ekvivalentna sa

$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca, \tag{11}$$

tj. sa

$$(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca). \tag{12}$$

S obzirom da je

$$2k(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2) = (2k-1)(ab+bc+ca)+ab+bc+ca-(a^2+b^2+c^2),$$

zbog nejednakosti (11) i (12), iz nejednakosti (10) slijedi

$$M \ge \frac{(a+b+c)^2}{\frac{1}{3}(2k-1)(a+b+c)^2} = \frac{3}{2k-1}.$$

□

Napomena 1. *Specijalno, za $k=1$ dobijamo nejednakost (1).*

Najzad ćemo dokazati nejednakost (4).

Dokaz. Posmatrajmo funkciju koja glasi

$$f(x) = \frac{x^n}{p-qx}, \quad 0 < x < \frac{p}{q} \quad \text{i} \quad p, q, n > 0.$$

Njen drugi izvod je

$$f''(x) = \frac{x^{n-2}}{(p-qx)^3}\Big[(n-1)(n-2)q^2x^2 - 2pqn(n-2)x + p^2n(n-1)\Big].$$

Za $n \geq 2$ i $n = 1$ je $f''(x) > 0$, pa je funkcija f konveksna. Zbog toga, za $x_i < \frac{p}{q}$ imamo

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^n}{p - qx_i} = \sum_{i=1}^{3} f(x_i) \geq 3f\Big(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\Big) = \frac{3^{2-n}(x_1+x_2+x_3)^n}{3p - q(x_1+x_2+x_3)},$$

(13) $n \in \{1\} \cup [2, \infty)$.

Ako u (13) stavimo

$$p = (a^\lambda + b^\lambda + c^\lambda)k,\ q = k+1,\ x_1 = a^\lambda,\ x_2 = b^\lambda,\ x_3 = c^\lambda,$$

dobijamo željenu nejednakost (4). Kako je

$$a < b + c \text{ (nejednakost trougla)} \quad \text{i} \quad x_1 < \frac{p}{q} \Leftrightarrow a^\lambda < k(b^\lambda + c^\lambda),$$

dovoljno je dokazati da je

$$(b+c)^\lambda < k(b^\lambda + c^\lambda), \quad \text{za} \quad k \geq 2^{\lambda-1}.$$

Posljednja nejednakost je tačna zbog konveksnosti funkcije $y = x^\lambda$ za $\lambda \geq 1$. Dakle nejednakost (4) je tačna za $n \in \{1\} \cup [2, \infty)$ i za $k \geq 2^{\lambda-1}$ pri $k \geq 1$. Ovim je njen dokaz okončan. □

NAPOMENA 2. *Specijalno, za $\lambda = k = 1$ i $n \in \mathbb{N}$ dobijamo nejednakost (2), a za $\lambda = n = 1$ dobijamo nejednakost (3).*

NAPOMENA 3. *Za $\lambda = k = 2$ i $n = 1$ dobijamo nejednakost ekvivalentnu sa nejednakošću IX.12.1 iz [5].*

Literatura

[1] Š. Arslanagić, N. Bikić, *Generalizacija jedne geometrijske nejednakosti o trouglu*, MAT-KOL (Banja Luka), XIX(2)(2013), 9-14.

[2] Š.Arslanagić, *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.

[3] D.Milošević, *Jedna nejednakost i njene primene*, Tangenta (Beograd), 52(2007/2008-4), 15-17.

[4] D.Mitrinović, *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.

[5] D.S.Mitrinović, J.E.Pečarić and V.Volenec, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/London/Boston, 1989.

Primljeno u redakciju 25.08.2012; revidirana verzija 10.10.2012;
dostupno na internetu od 12.10.2012