MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XIX (2)(2013), 21-28 **ISSN 1986-5228 (o)**

JEDAN METOD ZA DOKAZIVANJE SIMETRIČNIH NEJEDNAKOSTI SA TRI PROMJENLJIVE

(A method of proving symmetric inequalities with three variables)

Vesna Miletić[*)]

Sažetak: U ovom radu ćemo dati važan metod koji ćemo koristiti pri dokazivanju simetričnih nejednakosti sa tri promjenljive. Ovaj metod je veoma interesantan i moćan instrument koji se može koristiti za dokazivanje nejednakosti različitih poteškoća, koje se ne mogu često dokazati prethodnim metodama i tehnikama.

Ključne riječi: simetrične nejednakosti, tri promjenljive, Šurova nejednakost, Mjurhedova nejednakost.

Abstract: In this paper we'll give a important method that will be used in proving symmetrical inequalities with three variables. This method is a very interesting and powerful instrument can be used for proving inequalities of varying difficulty which can't be proved with previous methods and techniques.

Key words: Symmetrical inequality, three variables, Schur's inequality, Muirhead's inequality.
AMS Subject Classification (2010): **97 F 50**
ZDM Subject Classification (2010): **F 50, N 50**

1. UVOD (Introduction)

Neka su $x,y,z\in\boldsymbol{R}$ i $p = x+y+z,\ q = xy+yz+zx,\ r = xyz$. Koristeći ove smjene lako možemo dokazati sljedeće identitete:

N1: $x^2+y^2+z^2 = p^2-2q$

*) Filozofski fakultet Univerziteta u Istočnom Sarajevu, student Odsjeka za matematiku i fiziku, Alekse Šantića br. 1, 71420 Pale, BiH, e-mail:v_m44@hotmail.com
University of East Sarajevo, Faculty of Philosophy, Student of Department of Mathematics and Physics, Alekse Šantića nr. 1, 71420 Pale, BiH, e-mail:v_m44@hotmail.com

N2: $x^3+y^3+z^3=p\left(p^2-3q\right)+3r$

N3: $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=q^2-2pr$

N4: $x^4+y^4+z^4=\left(p^2-2q\right)^2-2\left(q^2-2pr\right)$

N5: $(x+y)(y+z)(z+x)=pq-r$

N6: $(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)=p^2+q$

N7: $(x+y)^2(y+z)^2+(y+z)^2(z+x)^2+(z+x)^2(x+y)^2=\left(p^2+q\right)^2-4p(pq-r)$

N8: $xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)=pq-3r$

N9: $(1+x)(1+y)(1+z)=1+p+q+r$

N10: $(1+x)(1+y)+(1+y)(1+z)+(1+z)(1+x)=3+2p+q$

N11:

$$(1+x)^2(1+y)^2+(1+y)^2(1+z)^2+(1+z)^2(1+x)^2=(3+2p+q)^2-2(3+p)(1+p+q+r)$$

N12: $x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=pq-3r$

N13: $x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3=q^3-3pqr+3r^2$

N14: $xy\left(x^2+y^2\right)+yz\left(y^2+z^2\right)+zx\left(z^2+x^2\right)=p^2q-2q^2-pr$

N15: $\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)=p^2+q^2+r^2-2pr-2q+1$

N16: $\left(1+x^3\right)\left(1+y^3\right)\left(1+z^3\right)=p^3+q^3+r^3-3pqr-3pq+3r^2+3r+1$

Dokazi ovih identiteta su jednostavni, mi ćemo dokazati neke od njih.

Dokaz: Imamo

N5:
$$\begin{aligned} pq-r &= (x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz \\ &= x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2+xyz+xyz+xyz-xyz \\ &= x\left(xy+yz+zx+z^2\right)+y\left(xy+yz+zx+z^2\right) \\ &= (x+y)\big(y(x+z)+z(x+z)\big)=(x+y)(y+z)(z+x). \end{aligned}$$

N12:
$$\begin{aligned} pq-3r &= (x+y+z)(xy+yz+zx)-3xyz \\ &= x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2+3xyz-3xyz \\ &= x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)\,. \end{aligned}$$

N16: $p^3+q^3+r^3-3pqr-3pq+3r^2+3r+1=$

$$=(x+y+z)^3+(xy+yz+zx)^3+x^3y^3z^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx)xyz-$$

$$-3(x+y+z)(xy+yz+zx)+3x^2y^2z^2+3xyz+1=$$

$$=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3y^2z+3z^2x+3xy^2+3yz^2+3zx^2+6xyz+x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3+$$

$$+3x^3y^2z+3y^3z^2x+3z^3x^2y+3x^2y^3z+3y^2z^3x+3z^2x^3y+6x^2y^2z^2+$$

$$+x^3y^3z^3-3y^3z^2x-3z^3x^2y-3x^2y^3z-3y^2z^3x-3z^2x^3y-9x^2y^2z^2-$$

$$-3x^2y-3y^2z-3z^2x-3xy^2-3yz^2-3zx^2-9xyz+3x^2y^2z^2+3xyz+1=$$

$$=x^3+y^3+z^3+x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3+x^3y^3z^3+1$$

$$=z^3\left(1+x^3+y^3+x^3y^3\right)+\left(1+x^3+y^3+x^3y^3\right)$$

$$=\left(z^3+1\right)\left(1+x^3+y^3\left(1+x^3\right)\right)=\left(1+x^3\right)\left(1+y^3\right)\left(1+z^3\right).$$

□

2. GLAVNI REZULTATI (Main results)

Teorema 1. Neka su $x,y,z\geq 0$ i $p=x+y+z,\ q=xy+yz+zx,\ r=xyz$. Tada vrijedi
T1: $p^3-4pq+9r\geq 0$,
T2: $p^4-5p^2q+4q^2+6pr\geq 0$.
Dokaz: Navedimo Šurovu nejednakost:
Ako su x,y,z nenegativni realni brojevi i $r\geq 0$, tada važi nejednakost

$$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-z)(y-x)+z^r(z-x)(z-y)\geq 0. \qquad (*)$$

T1: $p^3-4pq+9r=(x+y+z)^3-4(x+y+z)(xy+yz+zx)+9xyz$

$$=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3y^2z+3z^2x+3xy^2+3yz^2+3zx^2+$$
$$+6xyz-4\left(x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2+3xyz\right)+9xyz$$
$$=x(x-y)(x-z)+y(y-z)(y-x)+z(z-x)(z-y)\geq 0,$$

a ovo je Šurova nejednakost za $r=1$.

Dakle, na osnovu $(*)$ za $r=1$, dokazali smo T1. Uvrštavanjem u $(*)$ $r=2$, dobijamo T2, čime smo dokazali teoremu 1. □

Teorema 2. Neka su $x,y,z\geq 0$ i $p=x+y+z,\ q=xy+yz+zx,\ r=xyz$. Tada vrijede nejednakosti:

T3: $pq-9r\ge 0$, T4: $p^2\ge 3q$,
T5: $p^3\ge 27r$, T6: $q^3\ge 27r^2$,
T7: $q^2\ge 3pr$, T8: $2p^3+9r\ge 7pq$,
T9: $p^4+3q^2\ge 4p^2q$, T10: $2p^3+9r^2\ge 7pqr$,
T11: $p^2q+3pr\ge 4q^2$ T12: $q^3+9r^2\ge 4pq$,
T13: $pq^2\ge 2p^2r+3qr$.

Dokaz: Imamo na osnovu nejednakosti $A\ge G$

T3: $$pq=(x+y+z)(xy+yz+zx)\ge 3\sqrt[3]{xyz}\cdot 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}=9r$$
$$\Leftrightarrow pq-9r\ge 0.$$

T4: $$p^2\ge 3q\Leftrightarrow (x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]\ge 0.$$

T5: $$p=x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3\sqrt[3]{r}\Leftrightarrow p^3\ge 27r.$$

T6: $$q=xy+yz+zx\ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}=3\sqrt[3]{r^2}\Leftrightarrow q^3\ge 27r^2.$$

T7: $$q^2=(xy+yz+zx)^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$$
$$\ge (xy)(yz)+(yz)(zx)+(zx)(xy)+2xyz(x+y+z)$$
$$=3xyz(x+y+z)=3pr.$$

T8: $$2p^3+9r\ge 7pq$$
$$\Leftrightarrow 2(x+y+z)^3+9xyz\ge 7(x+y+z)(xy+yz+zx)$$
$$\Leftrightarrow 2\left(x^3+y^3+z^3\right)\ge x^2y+x^2z+y^2z+y^2x+z^2x+z^2y$$
$$\Leftrightarrow T[3,0,0]\ge T[2,1,0],$$

što je tačno na osnovu Mjurhedove nejednakosti. □

3. PRIMJENA (Application)

Zadatak 1. Dokazati da za sve realne brojeve $x,y,z>0$ važi nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)\geq 64,$$

uz uslov $x+y+z=1$.

Rješenje. Tražena nejednakost se može napisati kao

$$(1+x)(1+y)(1+z)\geq 64xyz. \tag{1}$$

Uvedimo smjenu

$$p=x+y+z,\ q=xy+yz+zx,\ r=xyz.$$

Koristeći N9: $(1+x)(1+y)(1+z)=1+p+q+r$ i $p=1$, imamo

$$(1+x)(1+y)(1+z)=2+q+r.$$

Dakle, mi treba da dokažemo

$$2+q+r\geq 64r,$$

odnosno

$$2+q\geq 63r. \tag{2}$$

Na osnovu T3: $pq\geq 9r\Rightarrow q\geq 9r$, pa je

$$2+q\geq 2+9r.$$

S obzirom na (2), treba da dokažemo

$$2+9r\geq 63r, \text{ tj.}$$

$$r\leq\frac{1}{27}. \tag{3}$$

Kako je, na osnovu T5: $p^3\geq 27r$ i pošto je $p=1$, slijedi da je $r\leq\frac{1}{27}$, znači da je nejednakost (3) tačna, čime smo dokazali (1). Vrijedi jednakost ako i samo ako je $x=y=z=\frac{1}{3}$. ◊

Zadatak 2. Dokazati da za sve realne pozitivne brojeve x,y,z vrijedi nejednakost

$$x^4+y^4+z^4\geq xyz(x+y+z).$$

Rješenje. Uvedimo smjenu

$$p=x+y+z,\ q=xy+yz+zx,\ r=xyz,$$

na osnovu N4: $x^4+y^4+z^4=\left(p^2-2q\right)^2-2\left(q^2-2pr\right)$, naša nejednakost je ekvivalentna sa

$$\left(p^2-2q\right)^2-2\left(q^2-2pr\right)\geq pr. \tag{1}$$

Dakle, treba da dokažemo

$$p^4-4p^2q+2q^2+3pr\geq 0. \tag{2}$$

Na osnovu teoreme 1, mi znamo da vrijedi

$$p^4-5p^2q+4q^2+6pr\geq 0\ ,$$

odnosno

$$p^4-4p^2q+2q^2+3pr\geq p^2q-2q^2-3pr\ . \qquad (3)$$

Ako dokažemo da je

$$p^2q-2q^2-3pr\geq 0\ , \qquad (4)$$

dokazali bismo (2) a samim tim i datu nejednakost.
Na osnovu T11: $p^2q+3pr\geq 4q^2$ i T7: $q^2\geq 3pr$ imamo

$$2q^2\geq 6pr \Leftrightarrow 4q^2-2q^2\geq 6pr\ ,$$

tj.

$$4q^2\geq 2q^2+6pr\ ,$$

$$p^2q+3pr\geq 4q^2\geq 2q^2+6pr\ .$$

Dobijamo da je

$$p^2q-2q^2-3pr\geq 0\ ,$$

čime smo dokazali (4) pa je

$$p^4-4p^2q+2q^2+3pr\geq p^2q-2q^2-3pr\geq 0\ ;$$

samim tim, dokazana je nejednakost (1), što smo i trebali dokazati.
Znak jednakosti važi ako je $x=y=z$. ◊

Zadatak 3. Neka su x,y,z pozitivni realni brojevi. Dokazati da vrijede nejednakosti:

i) $x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z)\geq 2\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)$,

ii) $9xyz+1\geq 4(xy+yz+zx)$, ako je $x+y+z=1$.

Rješenje. Neka je $p=x+y+z,\ q=xy+yz+zx,\ r=xyz$.

i) Na osnovu N4 i N3 data nejednakost ima oblik

$$\left(p^2-2q\right)^2-2\left(q^2-2pr\right)+pr\geq 2\left(q^2-2pr\right), \qquad (1)$$

odnosno

$$p^4-4p^2q+9pr\geq 0\ . \qquad (2)$$

Na osnovu T2: $p^4-5p^2q+4q^2+6pr\geq 0$ imamo

$$p^4-4p^2q+9pr\geq p^2q+3pr-4q^2\ .$$

Ako dokažemo da je

$$p^2q+3pr-4q^2\geq 0\ ,$$

završili smo dokaz.

Kako, na osnovu T11: $p^2q+3pr\geq 4q^2$ važi da je

$$p^2q+3pr-4q^2\geq 0\ , \text{ tj.}$$

dokazali smo

$$p^4-4p^2q+9pr\geq p^2q+3pr-4q^2\geq 0\ ,$$

odakle slijedi (2), odnosno (1). Znak jednakosti važi ako je $x = y = z = \frac{1}{3}$.

ii) Data nejednakost ima oblik

$$9r + 1 \geq 4q .$$

Na osnovu T1: $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$, pošto je $p = 1$, vrijedi

$$1 - 4q + 9r \geq 0 ,$$

odnosno

$$9r + 1 \geq 4q ,$$

čime smo dokazali datu nejednakost. Znak jednakosti važi ako je $x = y = z = \frac{1}{3}$. ◊

Zadatak 4. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi. Dokazati nejednakost

$$(xy + yz + zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right) \geq \frac{9}{4} .$$

Rješenje. Data nejednakost je ekvivalentna sa nejednakošću

$$4(xy + yz + zx)\left((z+x)^2 (y+z)^2 + (x+y)^2 (z+x)^2 + (x+y)^2 (y+z)^2\right)$$
$$\geq 9(x+y)^2 (y+z)^2 (z+x)^2 . \qquad (1)$$

Uvođenjem smjena

$$p = x + y + z,\ q = xy + yz + zx,\ r = xyz$$

i na osnovu N5 i N7, nejednakost (1) postaje

$$4q\left(\left(p^2 + q\right)^2 - 4p(pq - r)\right) \geq 9(pq - r)^2$$

$$\Leftrightarrow 4p^4 q - 17p^2 q^2 + 4q^3 + 34pqr - 9r^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3pq\left(p^3 - 4pq + 9r\right) + q\left(p^4 - 5p^2 q + 4q^2 + 6pr\right) + r(pq - 9r) \geq 0 .$$

Na osnovu T1, T2 i T3 i korištenja činjenice da su $p, q, r > 0$ dokazali smo traženu nejednakost. Jednakost vrijedi ako je $x = y = z$. ◊

Zadatak 5. Odrediti S_{min} od sume $S = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$ ako vrijedi $x,y,z \in \boldsymbol{R}$ i $x + y + z = 1$.

Rješenje. Imamo

$$S = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = \frac{x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2}{xyz} .$$

Ako uvedemo smjenu $p = x + y + z, q = xy + yz + zx$ i $r = xyz$, to na osnovu T7: $q^2 \geq 3pr$ imamo da je $q^2 - 2pr \geq pr$

$$S = \frac{q^2 - 2pr}{r} \geq \frac{pr}{r} = p .$$

Pošto je $p = 1$, znači da je $S \geq 1$, tj.

$$S_{min} = 1 \text{ ako je } x = y = z = \frac{1}{3}. \ \Diamond$$

L I T E R A T U R A

[1] Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
[2] Arslanagić, Š., *Matematička čitanka 4*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2012.
[3] Cvetkovski, Z., *Inequalities*, Springer-Verlag, Heidelberg/Dordrecht/London/New York, 2012.
[4] Mitrinović, D.S., *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.