MAT-KOL (Banja Luka)
XIX(2)(2013), 5-7

ISSN 0354-6969 (o)
ISSN 1986-5228 (o)
Aritmetika / Teorija brojeva

UOPŠTENJE JEDNE ALGEBARSKE NEJEDNAKOSTI

(A generalization of one algebraic inequality)

Dragoljub Milošević[1]

Sažetak. U ovom radu dajemo dokaz uopštenja jedne ciklične algebarske nejednakosti iz [1].

Ključne reči i izrazi: algebarska nejednakost, uopštenje, nejednakost Koši-Bunjakovski-Švarca.

Abstract. In this paper we give the proof for the generalization of one cyclic algebraic inequality in [1].

Key words and phrases: algebraic inequality, generalization, Cauchy-Buniakowsky-Schwarz's inequality.

AMS Subject classification (2010): 97F50
DMS Subject classification (2010): F50, N50

U [1] nalazi se sledeća nejednakost za pozitivne realne brojeve *a*, *b*, *c*, *d*:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2\,. \qquad (*)$$

Ovde dajemo dokaz njenog uopštenja (generalizacije):

$$\frac{a}{kb+c}+\frac{b}{kc+d}+\frac{c}{kd+a}+\frac{d}{ka+b}\geq \frac{4}{k+1}\,, \qquad (1)$$

gde je k pozitivan realan broj.

Dokaz. Koristićemo nejednakost Koši-Bunjakovski-Švarca za $n=4$, tj.

$$\left(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4\right)^2\leq\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2\right), \quad (2)$$

gde $x_1,x_2,x_3,x_4,y_1,y_2,y_3,y_4\in R$.

Stavljajući u (2) da je

[1] 17. NOU divizije 43, 32300 Gornji Milanovac, Srbija; e-mail: dramil 47@gmail.com.

$$x_1 = \frac{a}{\sqrt{kab+ac}}, \quad x_2 = \frac{b}{\sqrt{kbc+bd}}, \quad x_3 = \frac{c}{\sqrt{kcd+ac}}, \quad x_4 = \frac{d}{\sqrt{kad+bd}},$$

$$y_1 = \sqrt{kab+ac}, \quad y_2 = \sqrt{kbc+bd}, \quad y_3 = \sqrt{kcd+ac}, \quad y_4 = \sqrt{kad+bd}$$

dobijamo

$$(a+b+c+d)^2 \le \left(\frac{a^2}{kab+ac} + \frac{b^2}{kbc+bd} + \frac{c^2}{kcd+ac} + \frac{d^2}{kad+bd} \right) \cdot$$
$$\cdot (kab+ac+kbc+bd+kcd+ac+kad+bd)$$

a odavde

$$\begin{aligned} &\frac{a^2}{kab+ac} + \frac{b^2}{kbc+bd} + \frac{c^2}{kcd+ac} + \frac{d^2}{kad+bd} \ge \\ &\ge \frac{(a+b+c+d)^2}{k(ab+bc+cd+ad)+2ac+2bd} \end{aligned} \tag{3}$$

Tačna nejednakost $(a-b+c-d)^2 \ge 0$ ekvivalentna je sa

$$(a-b)^2 + (c-d)^2 + 2(a-b)(c-d) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2cd+2ac$$
$$\Leftrightarrow \quad a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2cd+2ac-2ad-2bc+2bd \ge 0$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2cd+2ad+2bc+2ac+2bd \ge 4ab+4bc+4cd+4ad$$
$$\Leftrightarrow \quad (a+b+c+d)^2 \ge 4(ab+bc+cd+ad)$$
$$\Leftrightarrow \quad ab+bc+cd+ad \le \frac{1}{4}(a+b+c+d)^2. \tag{4}$$

Tačna nejednakost

$$(a-c)^2 + (b-d)^2 \ge 0$$

ekvivalentna je sa (v. [1])

$$(a+b+c+d)^2 \ge 2(ab+bc+cd+ad+2ac+2bd),$$

tj. sa

$$ab+bc+cd+ad+2ac+2bd \le \frac{1}{2}(a+b+c+d)^2 \tag{5}$$

S obzirom da je

$$\begin{aligned} &k(ab+bc+cd+ad)+2ac+2bd = \\ &= (k-1)(ab+bc+cd+ad) + (ab+bc+cd+ad+2ac+2bd) \end{aligned}$$

na osnovu nejednakosti (5) i (4) iz nejednakosti (3) sledi

$$\frac{a}{kb+c} + \frac{b}{kc+d} + \frac{c}{kd+a} + \frac{d}{ka+b} \ge \frac{1}{\frac{1}{4}(k-1)+\frac{1}{2}} = \frac{4}{k+1},$$

što predstavlja traženu nejednakost (1).

Napomena. Jednakost u (1) važi samo ako $a = b = c = d$ i $k = 1$.

LITERATURA

[1] Š.Arslanagić, *O jednoj cikličnoj algebarskoj nejednakosti*, MAT-KOL (Banja Luka), XIX (1) (2013), 17-23.

[2] D. S. Mitrinović, *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.