MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (p)**
XIX(1)(2013), 5-10 **ISSN 1986-5828 (o)**
Metodika matematike / Euklidska geometrija

RAZLIČITE METODE DOKAZIVANJA JEDNE TEOREME O PRAVILNOM JEDANAESTOUGLU

(Different methods of proofs of one theorem on the regular 11-gon)

Dragoljub Milošević[1] i Borisav Simić[2]

Sažetak. U ovom radu je dato pet različitih dokaza jedne teoreme koja se odnosi na pravilan jedanaestougao.

Ključne reči i izrazi: pravilni jedanaestougao, stranica i dijagonale pravilnog jedanaestougla, slični trouglovi, lema, Ptolemejeva teorema, sinusna teorema, pretvaranje razlike kosinusa u proizvod, analitička geometrija.

Abstract. In this paper we give five different proofs of one theorem for the regular 11-gon.

Key words and phrases: regular 11-gon, side and diagonals of regular 11-gon, similar triangles lemma, Ptolemy's theorem, sine law transformation of the difference in a product, analitic geometry.

AMS Subject classification (2010): **51M04, 97G40**
ZDM Subject classification (2010): **G40**

Dokazivanje teorema na dva ili više načina je veoma važan i kreativan posao za sve učenike koji pokazuju povećano interesovanje za matematiku. Pri dokazivanju teoreme na više načina dolazi do izražaja bogatstvo ideja i stvaralačko mišljenje. Naravno, tu je neophodno određeno predznanje koje se stiče na časovima redovne nastave matematike, te samostalnim radom i vežbanjem. Mišljenja smo da je ovaj članak poučan i koristan za mlade matematičare i nastavnike koji rade sa darovitim učenicima.

U radu je prezentirano 5 raznih dokaza jedne teoreme iz geometrije koja se odnosi na pravilan 11-ougao. Isti sadrži obilje činjenica iz planimetrije, trigonometrije i analitičke geometrije. Reč je o sledećoj teoremi:

Teorema. *U pravilnom jedanaestouglu ABCDEFGHIJK važi jednakost*

$$\frac{AB}{AF}+\frac{AC}{AD}=1$$

[1] 17. NOU divizije 43, 32300 Gornji Milanovac, Srbija; e-mail: dramil47@gmail.com
[2] 173. ulica br. 19/14, 35000 Jagodina Srbija

Dokaz 1. Uvodimo sledeće oznake: *AB = a, AC = b, AD = c, AE = d, AF = e.* Tada navedena jednakost postaje

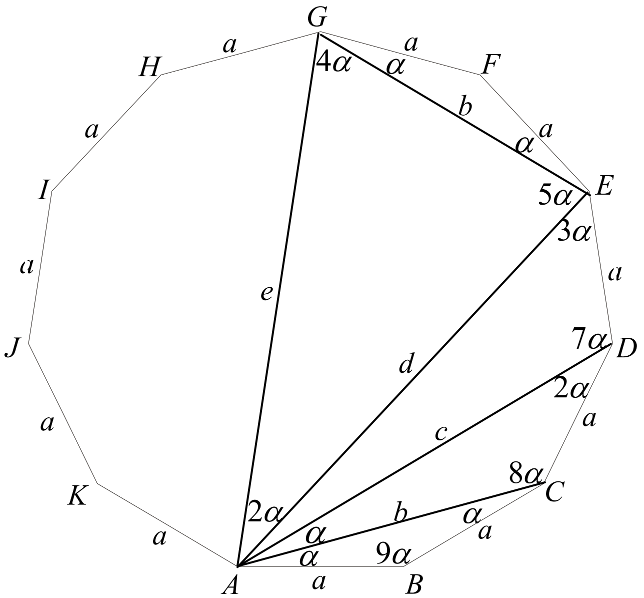
$$\frac{a}{e}+\frac{b}{c}=1. \qquad (*)$$

Neka je 2α veličina centralnog ugla nad stranicom datog jedanaestougla *ABCDEFGHIJK*. Tada je $2\alpha=\frac{2\pi}{11}$, tj. $11\alpha=\pi$. Odgovarajući periferijski ugao je α. S obzirom da je spoljašnji ugao jednak centralnom uglu to je unutrašnji ugao pravilnog jedanaestougla jednak $11\alpha-2\alpha=9\alpha$. Tada je

$$\angle ACD=\angle BCD-\angle ACB=9\alpha-\alpha=8\alpha,$$

pa je u ΔACD:

$$\angle ADC=11\alpha-(\alpha+8\alpha)=2\alpha \text{ (slika 1).}$$



Slika 1.

Koristićemo sledeću *lemu* (pomoćnu teoremu):

Lema. *Ako je u* ΔABC $\alpha=2\beta$, *onda je* $a^2=b(b+c)$.

Jedan njen dokaz nalazi se u [1]. Na osnovu ove leme primenjene na trouglove *ACD* i *AEG* (slika 1) imamo $AC^2=CD(CD+AD)$ i $AE=EG(EG+AG)$, ili $b^2=a(a+c)$ i $d^2=b(b+e)$, odnosno

$$b^2-a^2=ac \qquad (1)$$

i

$$d^2 - b^2 = be \qquad (2)$$

Na pravoj $p(A,E)$ odredimo tačke M i N simetrične u odnosu na tačku E, tako da $ME = NE = a$ (slika 2). Tada je u jednakokrakim trouglovima DEN i MFE:

$$\angle DNE = \angle NDE = (11\alpha - 3\alpha) : 2 = 4\alpha \text{ i}$$

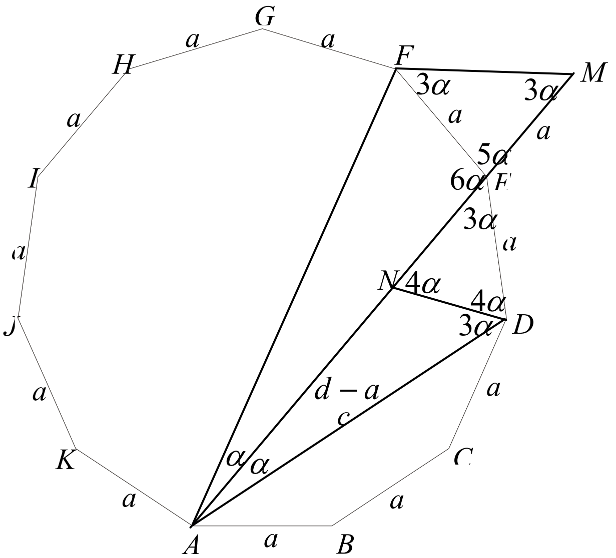
$$\angle EFM = \angle FME = \frac{1}{2}(\angle NMF) = \frac{1}{2} \cdot 6\alpha = 3\alpha .$$

S obzirom da je $\angle ADN = 7\alpha - 4\alpha = 3\alpha = \angle EMF$ i $\angle DAN = \angle MAF = \alpha$, zaključujemo da su trouglovi ADN i AMF slični. Na osnovu te sličnosti imamo $AD : AM = AN : AF$, ili $c : (d+a) = (d-a) : e$, a odavde je

$$d^2 - a^2 = ce \qquad (3)$$

Ako od zbira jednakosti (1) i (2) oduzmemo jednakost (3), imamo

$$0 = ac + be - ce \quad \Rightarrow \quad ac + be = ce \, / : ce \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{e} + \frac{b}{c} = 1, \quad \text{q.e.d.}$$



Slika 2

Dokaz 2. Na dijagonali AG odredimo tačku P tako da $GP = FG = a$ (slika 3). Zbog toga je u ΔFGP : $\angle FPG = \angle GFP = (11\alpha - 5\alpha) : 2 = 3\alpha$, pa je

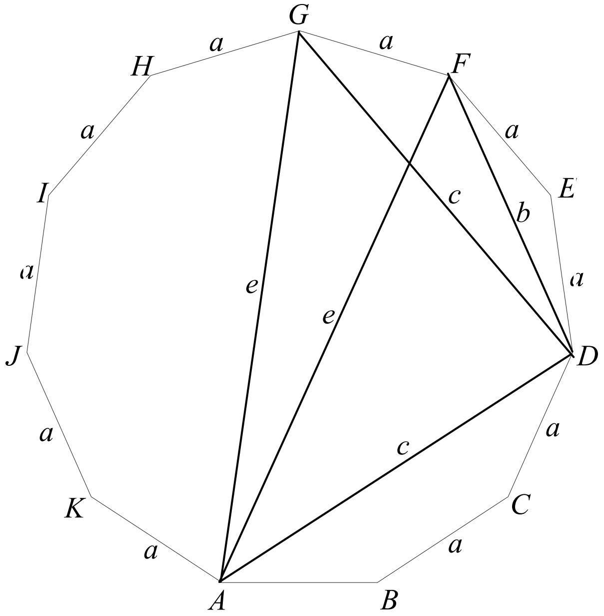
$\angle AFP = 5\alpha - 3\alpha = 2\alpha$ i $\angle APF = 11\alpha - 3\alpha = 8\alpha$. Trouglovi ACD i AFP su slični (imaju jednake odgovarajuće uglove), pa je $AC : AP = AD : AF$, ili $b : (e-a) = c : e$, odakle je $ac + be = ce$. Ova jednakost je ekvivalentna sa traženom jednakošću $(*)$.

Dokaz 3. Na osnovu Ptolemejeve teoreme primenjene na tetivni četvorougao $ADFG$ (slika 4), dobijamo

$$AF \cdot DG = AD \cdot FG + DF \cdot AG,$$

$$\text{ili } e \cdot c = c \cdot a + b \cdot e \ ,$$

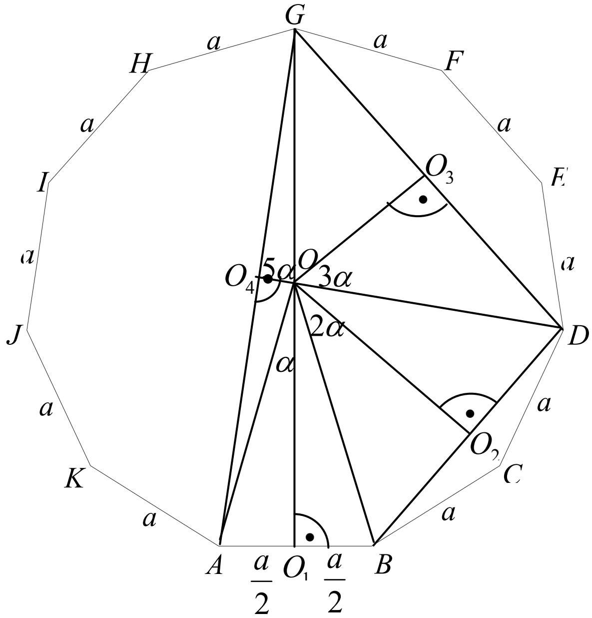
odakle sledi jednakost $(*)$.



Slika 4

Dokaz 4. Zbog $11\alpha = \pi$, imamo $8\alpha = \pi - 3\alpha$ i $7\alpha = \pi - 4\alpha$, pa je $\cos 8\alpha = \cos(\pi - 3\alpha) = -\cos\alpha$ i $\cos 7\alpha = \cos(\pi - 4\alpha) = -\cos 4\alpha$, tj.

$$\cos 8\alpha + \cos 3\alpha = 0 \text{ i } \cos 7\alpha + \cos 4\alpha = 0.$$



Slika 5

Oduzimanjem poslednje dve jednakosti dobijamo

$$\cos 8\alpha + \cos 3\alpha - \cos 7\alpha - \cos 4\alpha = 0,$$

što je ekvivalentno sa

$$(\cos 3\alpha - \cos 7\alpha) + (\cos 2\alpha - \cos 4\alpha) = \cos 2\alpha - \cos 8\alpha \qquad (4)$$

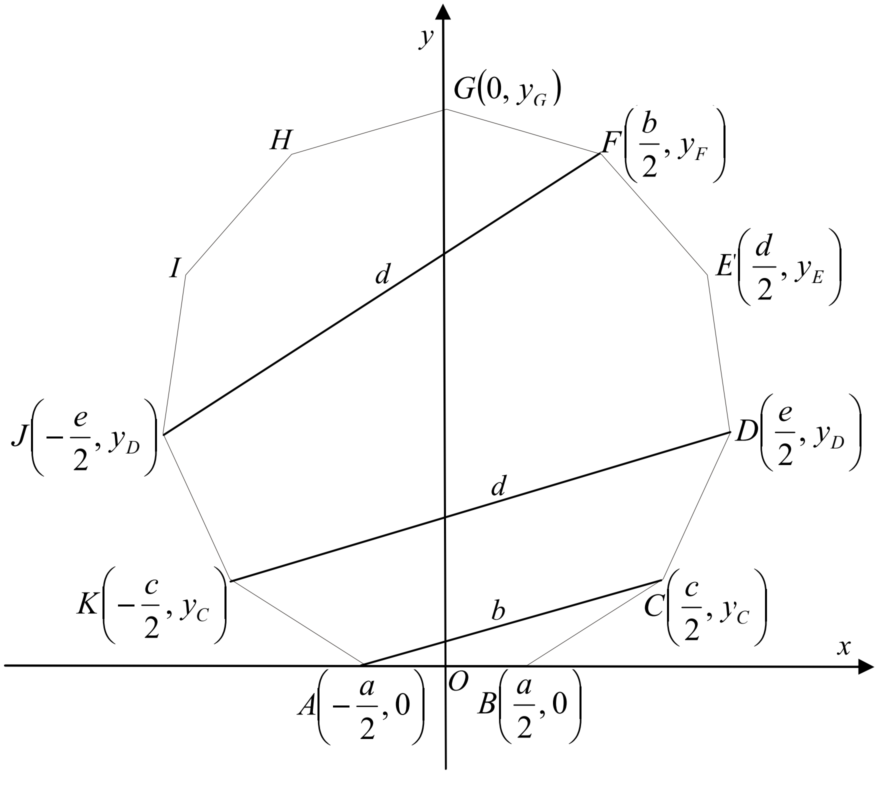
Transformacijom razlike kosinusa u proizvod, iz jednakosti (4) proizlazi

$$\sin 2\alpha \sin 5\alpha + \sin\alpha \sin 3\alpha = \sin 3\alpha \sin 5\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin 5\alpha} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{b}{c} + \frac{a}{e} = 1,$$

jer je $\sin\alpha = \dfrac{a}{2R}$, $\sin 2\alpha = \dfrac{b}{2R}$, $\sin 3\alpha = \dfrac{c}{2R}$ i $\sin 5\alpha = \dfrac{e}{2R}$ (R – poluprečnik opisane kružnice oko pravilnog 11-ougla) – slika 5.



Slika 5

Dokaz 5. Izaberimo Dekartov pravougli koordinatni sistem u ravni tako da temena A i B pravilnog jedanaestougla $ABCDEFGHIJK$ budu simetrična u odnosu na koordinatni početak O (središte stranice AB) i da stranica AB pripada apscisnoj osi Ox (slika 5). Temena tog jedanaestougla su: $A\left(-\dfrac{a}{2}, 0\right)$, $B\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$, $C\left(\dfrac{c}{2}, y_C\right)$,

$D\left(\frac{e}{2}, y_D\right)$, $E\left(\frac{d}{2}, y_E\right)$, $F\left(\frac{b}{2}, y_F\right)$, $G(0, y_G)$, $H\left(-\frac{b}{2}, y_F\right)$, $I\left(-\frac{d}{2}, y_E\right)$, $J\left(-\frac{e}{2}, y_D\right)$ i $K\left(-\frac{c}{2}, y_C\right)$. Koristićemo formulu za kvadrat dužine rastojanja između dveju tačaka.

$$MN^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \text{, gde je } M(x_1, y_1) \text{ i } N(x_2, y_2).$$

Na osnovu te formule je

$$AC^2 = b^2 = \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2}\right)^2 + y_C^2 \text{ i } BC^2 = a^2 = \left(\frac{c}{2} - \frac{a}{2}\right)^2 + y_C^2,$$

odakle, posle oduzimanja druge jednakosti od prve, sledi

$$b^2 - a^2 = ac. \tag{5}$$

Takođe, imamo

$$CD^2 = a^2 = \left(\frac{e}{2} - \frac{c}{2}\right)^2 + (y_D - y_C)^2 \text{ i } DK^2 = d^2 = \left(\frac{e}{2} - \frac{c}{2}\right)^2 + (y_D - y_C)^2,$$

pa je nakon oduzimanja ovih jednakosti

$$d^2 - a^2 = ce. \tag{6}$$

Najzad, iz

$$FJ^2 = d^2 = \left(\frac{e}{2} + \frac{b}{2}\right)^2 + (y_F - y_D)^2 \text{ i } DF^2 = b^2 = \left(\frac{e}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 + (y_F - y_D)^2$$

proizlazi

$$d^2 - b^2 = be. \tag{7}$$

Konačno, razlika zbira jednakosti (5) i (7) i jednakosti (6) daje

$$\begin{aligned} &0 + ac + be - ce \\ \Rightarrow\ & ac + be = ce \\ \Rightarrow\ & \frac{a}{e} + \frac{b}{c} = 1, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Napomena. Jednakost $(*)$ može se dokazati primenom: *a*) Pitagorine teoreme, *b*) Molvajdovih formula.

LITERATURA

[1] D. Milošević, *Razni dokazi jedne teoreme iz geometrije*, MAT-KOL (Banja Luka), XVII (1) (2011), 49 - 54.

[2] M. Prvanović, *Osnovi geometrije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1987.