MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (p)**
XIX(1)(2013), 57-65 **ISSN 1986-5828 (o)**
Istorija matematike

INOVACIJE I REKONSTRUKCIJE MATEMATIČKIH SADRŽAJA U FUNKCIJI RAZBIJANJA FORMALIZMA U NASTAVI MATEMATIKE

dr Marković G. Đoko[1]

Sažetak: Ovim radom su prikazane neke raritetne kombinovane poliformne primjene inovacionih i istorijsko-rekonstruktivnih matematičkih sadržaja, kao primjeri katalizacionih činilaca u funkciji aktiviziranja i dinamiziranja nastave matematike srednje škole i razbijanja formalizma u njoj
Ključne riječi: Geometrijski poliformizam, metodičke inovacije, istorijsko-rekonstruktivni elementi nastave i razbijanje formalizma.

INNOVATION AND RECONSTRUCTIONS OF MATHEMATICAL - HISTORICAL SUBJECTS MATTER IN FUNCTION BREAKING OF FORMALISM IN THE MATHEMATICS TEACHING

Summary: The paper deals with several rare and combined polyform applications of innovative and historical-reconstuctive mathematical subjects matter, as catalist factors of activating teaching mathematics in secondary school andovercoming any formal approach and formulation of didactic polyform principle and understanding it in mathematics teaching.

Key words: Geometric polyformism, methodical innovations and historisal-reconstructive elements in teaching.

1. Uvodne napomene

Razbijanje formalizma u nastavi matematike (geometrije) podrazumijeva istovremeno dejstvo više činilaca. Kada su u pitanju časovi uvježbavanja gradiva, onda je nesumnjivo jedan od najbitnijih faktora koji direktno utiču da nastava postane zanimljivija, prihvatljivija i jasnija izbor zadataka i odgovarajućih različitih metodskih pristupa i eventualnih inovacija u okviru metodskog oblika rješavanja zadataka.

Na tim časovima pružaju se velike mogućnosti za realizovanje aktivnog originalnog i kreativnog mišljenja učenika. U ovom radu izabrani su raritetni primjeri poznati Istoriji geometrije. Tačnije, prikazano je pet primjera

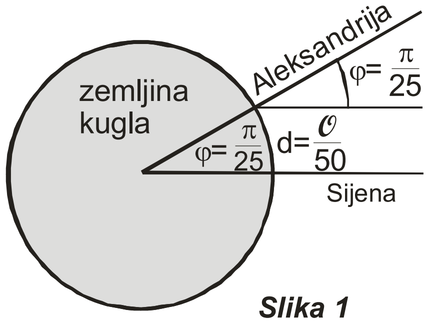
[1] e-mail: Univerzitet Crne Gore, Filozofski fakultet, Nikšić, djokogm@hotmail.com

rekonstruktivnih i inovacionih pristupa, prilagođenih savremenoj nastavi matematike, pri njihovom rješavanju u cilju indukovanja, tj. otvaranja "čarobnih vrata" učeničke originalnosti.

Dakle, ovaj rad je usmjeren na rješavanje geometrijskih zadataka i to onih koji po Igoru Fjodoroviču Šariginu [(1937. – 2004. g) – matematičaru, metodičaru nastave matematike i naučniku, popularizatoru nauke, autoru školskih udžbenika iz geometrije, predavaču na MGU] nastavu geometrije čine geometrijskom, čije glavne instrumente predstavljaju lijepa slika, dobar zadatak i živi jezik. Umješno izabrani sadržaji ne samo antičke, već i istorije matematike svih epoha značajno osvježavaju i čine interesantnijim časove geometrije (matematike) osnovne i srednje škole. Neke od tih priča kao na primjer Arhimedov dokaz o površini sfere i sa današnje tačke gledišta su ispravni. Ukoliko bi ekshaustički dokaz zamijenili primjenom graničnih vrijednosti dobili bismo moderni Arhimedov dokaz te formule.

2. Raritetni primjeri rekonstruktivno istorijskih sadržaja prikazanih savremenim matematičkim jezikom

(1) Kako je Eratosten iz Sijene odredio obim Zemlje?
(2) Kako je Demokrit iz Abdere izveo dokaze formula za:
a) površinu kruga i b) zapreminu lopte?
(3) Ako je data jedinična mjera konstruisati približno (sa najmanjom mogućom apsolutnom greškom $\Delta_\pi < 10^{-3}$) Ludolfov broj π.
(4) Dokazati Arhimedovom metodom da je površina sfere $P_s = 4\pi R^2$.

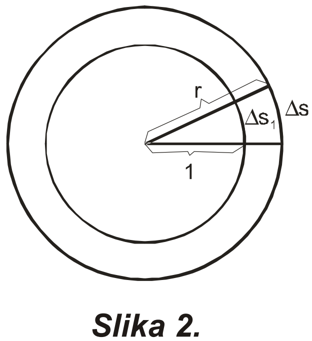


Slika 1

Toga 21.juna, prije 23 vijeka, Eratosten (276. – 194. g.p.n.e) je primijetio u mjestu Sijena koja se nalazila južno od Aleksandrije na Nilu, da se sunčeva svijetlost ogleda u jednom bunaru. I narednih godina organizovao je posmatranje ove pojave istovremeno u Sijeni i sjevernijoj Aleksandriji. Dok su u Sijeni sunčevi zraci padali okomito i ogledali se na dnu bunara dotle je u Aleksandriji ugao koji su oni zaklapali sa normalom iznosio jedan pedeseti dio punoga ugla. Da bi odredio obim zemlje, bilo je dovoljno odrediti rastojanje između Sijene i Aleksandrije. To rastojanje procijenjeno je na 5000 stadiona. Na osnovu toga dobijen je obim zemlje O = 50 · 5000 = 250.000 stadiona (vidjeti sliku 1). Stadion je popločana staza koja je stajala ispred antičkih amfiteatara, 1 stadion = 157m, pa je O = 250.000 · 157 = 39.250.000 = 39.250 km.

Još su Vavilonci znali za površinu kruga i površinu i zapreminu prizme i piramide. Za neke stvari nije bilo dokaza, a za neke nijesu imali formule. Demokrit i sljedbenici njegovog atomizma bili su prvi koji su nas uvjerili u tačnost tih poznatih drevnih formula. Pored toga oni su otkrili i dokazali niz obrazaca koji su bili nepoznati Vaviloncima i Egipćanima. Demokrit iz Abdere (460. – 370.g.p.n.e) je posljednji veliki filozof prirode, koji je da bi otkrio i dokazao sve te matematičke formule odstupio od tendencija koje su nakon Talesa (625. – 547. g.p.n.e) i Pitagore (570. – 500. g.p.n.e) postale dominantne u matematici. Zamišljajući tačku, liniju i figure u ravni i prostoru kao materijalne objekte potčinjene atomističkim hipotezama, načinio je niz otkrića koja su bila nedostupna matematičarima njegovog vremena. Ne zasnivajući svoje dokaze na geometriji već na filozofiji atomističkog ustrojstva svijeta on je došao do obrazaca za obim i površinu kruga, površinu elipse, površinu i zapreminu kupe, do odnosa zapremine lopte i površine njene granične sfere. Matematičarima je bilo potrebno više od 100 godina da unutar matematike (geometrije) dokažu sva tvrđenja do kojih je došao Demokrit. Tek će Arhimed (287. – 212 g.p.n.e) u prvoj polovini trećeg vijeka p.n.e. završiti taj posao. Skoro dva milenijuma poslije Demokrita tragajući za univerzalnom metodom u matematici poznati italijanski matematičar Bonaventura Kavaljeri (1598. – 1647) će krenuti njegovim tragom i otkriti čuveni princip.

1. Kada u srednjoj školi (a i u osmogodišnjoj), govorimo o Kavaljerijevom principu, imamo divnu priliku da pokažemo neke Demokritove dokaze, na primjer: **a)** Izvođenje formule za površinu kruga. Po njemu kružnica je sastavljena od atoma, a atom ima neku dužinu. Zato on razbija krug na ogroman broj trouglova. Obilježimo površinu jednog takvog sićušnog (atomističkog trougla sa $\Delta P = \frac{1}{2} r \Delta s$; O(r) – obim kruga poluprečnika r, O(r) = $\sum \Delta s$. Sa P(r) obilježavamo površinu kruga poluprečnika r. Atomističkim rezonovanjem, lako se uočava da je: $P(r) = \sum \Delta P = \frac{1}{2} r \sum \Delta s = \frac{r}{2} \mathrm{O}(r)$. Ako uzmemo



Slika 2.

jediničnu kružnicu, smanjiće se samo malo dužina atoma. Po Talesovoj teoremi imamo da je: $\frac{\Delta s}{\Delta s_1} = \frac{r}{1} \Rightarrow \Delta s = r \Delta s_1,\ pa\ je:\ \mathrm{O}(r) = \sum \Delta s = r \sum \Delta s_1 = r\,\mathrm{O}(1)$.

O(1) – je obim jediničnog kruga, O(1) = 2π (vidjeti sliku 2).

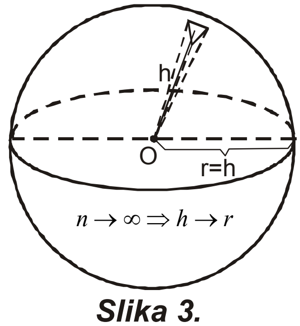
$$P(r) = \frac{1}{2} r\, \mathrm{O}(r) = \frac{1}{2} r^2\, \mathrm{O}(1) = r^2 \pi$$

$$P(1) = \frac{1}{2} 1^2\, \mathrm{O}(1) = \frac{1}{2} \mathrm{O}(1) = \pi .$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{O}(r) = r\,\mathcal{O}(1) = 2r\pi \\ P(r) = \frac{r^2}{2}\mathcal{O}(1) = r^2\pi \end{array}}$$

b) Izvođenje formule za izračunavanje zapremine lopte.

Po njemu lopta je sastavljena od atomističkih piramida ili konusa, čiji se vrhovi poklapaju sa centrom lopte, a visine su im jednake poluprečniku lopte, tj. kada $n \to \infty \Rightarrow h \to r$. Zato on razbija loptu npr. na ogroman broj takvih atomističkih trostranih piramida. Obilježimo zapreminu jedne takve sićušne atomističke trostrane piramide sa $\Delta V_i = \frac{1}{3} r \Delta B_i$, sa P(r) – površinu



Slika 3.

sfere poluprečnika r, a sa V(r) – zapreminu lopte poluprečnika r (vidjeti sliku 3). Atomističkim rezonovanjem, i modernim poimanjem takvog postupka lako se uočava da je:

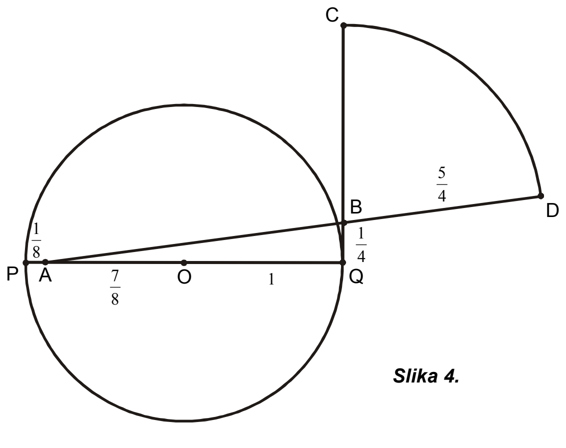
$$\mathrm{P(r)} = 4r^2\pi = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta B_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta B_i \,,$$

pa je

$$\mathrm{V(r)} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta B_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta B_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3} r \Delta B_i = \frac{r}{3} \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta B_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta B_i =$$

$$= \frac{r}{3}\mathrm{P(r)} = \frac{r}{3} 4r^2\pi = \frac{4r^3\pi}{3} \textit{ kubnih jedinica}$$

2. **Rješenje 1.** Konstruišimo proizvoljni kružnicu $\mathrm{K}(O, r=1)$. Neka je $OP = OQ = 1$ poluprečnik te kružnice. Konstruišimo tačku A tako da je $PA = \frac{1}{8}$, a potom konstruišimo tangentu na kružnicu $\mathrm{K}(O, r=1)$ u tački Q i na njoj tačke B i C tako da je $QB = \frac{1}{4}$, a $QC = \frac{3}{2}$ (vidi sliku 4). Neka je tačka D tačka presjeka kružnice $\mathrm{K}(B, BC)$ i poluprave $[AB)$ pri čemu je $\measuredangle ABD = 180^o$. Tada je



Slika 4.

$$AD = AB + BD = \sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{5}{4} = \sqrt{(1{,}875)^2 + (0{,}25)^2} + \frac{5}{4} =$$

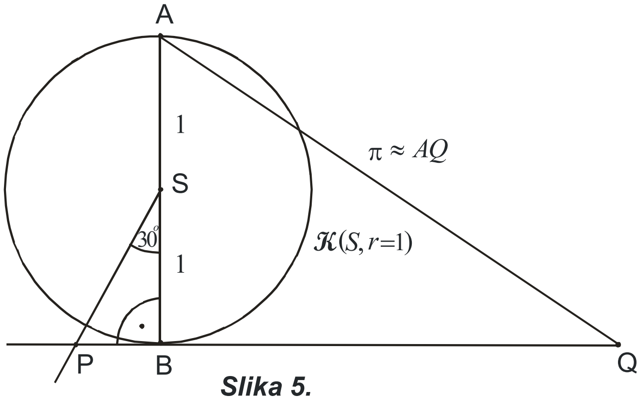
$$= \sqrt{3{,}515625 + 0{,}0625} + 1{,}25 = \sqrt{3{,}578125} + 1{,}25 \approx 1{,}8915932 + 1{,}25 =$$

$$= 3{,}1415932... \approx \pi$$

$\Delta_\pi \approx 3{,}1415932... - 3{,}1415926... \approx 0{,}0000006...$, što je i bio uslov zadatka. Dakle,

$$AD \approx \pi \,.$$

Rješenje 2. 1882. godine Carl L.F von Lindeman (1852. – 1939.g) dokazuje transcedentnost broja π, nakon čega su matematičari konačno uspjeli da dokažu da taj broj nije moguće konstruisati sredstvima elementarne geometrije pomoću lenjira i šestara. Evo još jedne približne konstrukcije iz 1685. godine čiji je autor Adam Kochanski (1631. – 1700. g). Tačnost ove konstrukcije odstupa tek na četvrtoj decimali. Konstruišimo kružnicu $\mathrm{K}(S, r=1)$ jediničnog poluprečnika sa centrom u S. U tački B konstruišimo tangentu na tu kružnicu i na njoj odredimo tačke P i Q, tako da je $\measuredangle PSB = 30^o$ i $PQ = 3r = 3$.



Slika 5.

Iz trougla PBS dobijamo $PB = tg30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Kako je $BQ = 3r - PB = 3 - \frac{\sqrt{3}}{3}$, tada iz pravouglog ΔABQ (vidjeti sliku 5) imamo:

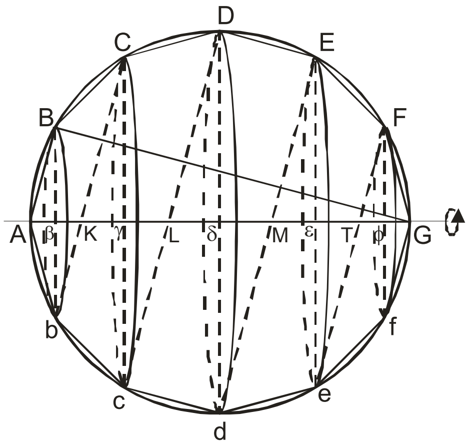
$$AQ = \sqrt{(2r)^2 + (3r - PB)^2} = \sqrt{2^2 + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 9 - 2\sqrt{3} + \frac{1}{3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}} \approx 3{,}1415333 \approx \pi .$$

3. Veliki Arhimedov rezultat je dokazivanje da je površina sfere $P_s = 4\pi R^2$. Savremenim jezikom govoreći površinu sfere Arhimed je dobio kao graničnu vrijednost jednog niza rotacionih površi. On upisuje u krug pravilan poligon sa parnim brojem strana $2n$ i rotira ga oko dijagonale toga mnogougla koja je istovremeno i prečnik toga kruga $AG = 2R$. Prema oznakama sa slike 6 dobijaju se dvije kupe ABb i GFf i niz zarubljenih kupa:

BbcC, CcdD, … i važi

$$AB = BC = CD = \;..... \; = FG .$$



Slika 6.

Prema obrascu za izračunavanje površine zarubljene kupe koju je izveo, Arhimed nalazi da je površina rotacionog tijela:

$$P=\pi\cdot B\beta\cdot AB+\pi\cdot(B\beta+C\gamma)\cdot BC+\ .....\ +\pi\cdot(E\varepsilon+F\phi)\cdot EF+\pi\cdot F\phi\cdot FG=$$
$$=\pi\cdot AB\cdot(2\cdot B\beta+2\cdot C\gamma+\ .....\ +2\cdot E\varepsilon+2\cdot F\phi)=\pi\cdot AB\cdot(Bb+Cc+\ .....\ +Ee+Ff)=$$
$$=\pi\cdot AB\cdot\frac{AG\cdot GB}{AB}=\pi\cdot AG\cdot GB\quad\to\quad\pi\cdot 2\cdot R\cdot 2\cdot R=4\pi R^2\ ,\ \textit{kada}\ \ n\to\infty\ ,\ \textit{gdje}$$

je n broj stranica polaznog mnogougla.

Da bi izračunao zbir u posljednjoj zagradi Arhimed je uočio paralelnost sljedećih pravih $(AB)\parallel(bC)\parallel(cD)\parallel\ \dots\ \parallel(fG)$, na osnovu čega je dokazao jednakost sljedećih naizmjeničnih uglova $\measuredangle ABb=\measuredangle BbC=\measuredangle bCc=\ \dots\ =\measuredangle FfG$, koristeći potom sličnost pravouglih trouglova
$\Delta AB\beta\sim\Delta\beta BK\sim\Delta KC\gamma\sim\dots\sim\Delta TF\phi\sim\Delta\phi fG\sim\Delta ABG$, tj.
$B\beta:\beta A=\beta b:\beta K=C\gamma:\gamma K=\ .....\ =f\phi:\phi G=GB:BA,$ pa je sabiranjem sljedećih jednačina

$$\left.\begin{aligned} B\beta&=\beta A\cdot\frac{GB}{BA}\\ \beta B&=\beta K\cdot\frac{GB}{BA}\\ C\gamma&=\gamma K\cdot\frac{GB}{BA}\\ &\dots\\ &\dots\\ f\phi&=\phi G\cdot\frac{GB}{BA}\end{aligned}\right\}\quad +$$

$$\Rightarrow\quad\frac{B\beta+\beta b+C\gamma+\gamma c+\ .....\ +F\phi+\phi f}{A\beta+\beta K+K\gamma+\gamma L+\ .....\ +T\phi+\phi G}=\frac{GB}{BA}$$

$$\Rightarrow\quad\frac{Bb+Cc+\ .....\ +Ff}{AG}=\frac{GB}{BA}$$

$$\Rightarrow\quad Bb+Cc+\ .....\ +Ff=\frac{AG\cdot GB}{BA}\ .$$

Kada $n\to\infty$ tada $GB\to AG=2\cdot R$, tako smo dobili modernizovanu verziju Arhimedovog izvođenja čuvene formule o površini sfere $P_s=\pi\cdot AG\cdot GB=4\pi R^2$, samo što smo umjesto Eudoksove metode ekshaustike upotrjebili direktnu graničnu vrijednost. Ova modernizovana verzija antičkog dokaza mogla bi da nađe mjesto u svim srtednjoškolskim udžbenicima matematike, što bi uz postojeće uobičajeno dokazivanje kao i ono korišćenjem integralnog računa, predstavljala još jedan primjer kombinovanog poliformizma u nastavi matematike srednje škole.

Međutim, moguće je da Arhimedovo izvođenje ove čudesne formule ima sasvim drugačiji izgled. Evo primjera kako bi mogla izgledati još jedna neobična rekonstrukcija toga algoritma. Posmatrajmo polusferu oko koje je opisano k-omotača pravilnih zarubljenih kupa, koje se dobijaju rotiranjem pravilnog poligona od $2(2k+1)$ strana oko ose (OO_1) slično kao i u prethodnom primjeru vidi sliku 7, gdje je $\kappa = 3$, pri čemu opštost izvođenja formule nije umanjena i dokažimo da je ukupna površina svih tih omotača konstantno jednaka $P_k = 2\pi r^2$, tj. da je jednaka površini polusfere bez obzira na broj $k \in N$ omotača zarubljenih kupa.

Očigledno je $AD = DH = HS = SQ = QT = TU = UV$ kao i i to da su BE, KL, NM respektivno jednake polovinama srednjih duži homolognih trapeza $AVUD$, $DUTH$ i $HTQS$. Lako je uočiti i sličnost parova pravouglih trouglova: $\Delta OBE \sim \Delta DAC$, $\Delta OKL \sim \Delta HDG$ i $\Delta ONM \sim \Delta SHI$, jer su im i ostali odgovarajući uglovi jednaki (kao uglovi sa normalnim kracima) pa iz tih sličnosti respektivno imamo:

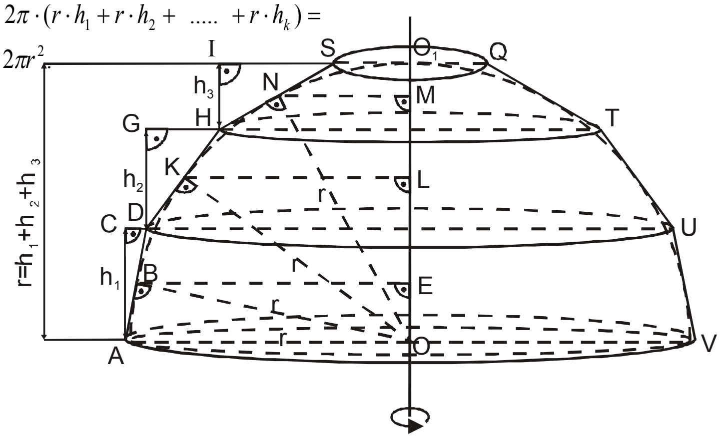
$$\frac{OB}{BE} = \frac{DA}{AC}, \quad \frac{OK}{KL} = \frac{HD}{DG} \quad \text{i} \quad \frac{ON}{NM} = \frac{SH}{HI}, \quad \text{tj.} \quad BE \cdot DA = OB \cdot AC = r \cdot h_1,$$

$KL \cdot HD = OK \cdot DG = r \cdot h_2$, $NM \cdot SH = ON \cdot HI = r \cdot h_3$. S druge strane imamo da je površina ova tri omotača

$$P_3 = M_1 + M_2 + M_3 = 2 \cdot \pi \cdot (BE \cdot DA + KL \cdot HD + NM \cdot SH) = 2 \cdot \pi \cdot (r \cdot h_1 + r \cdot h_2 + r \cdot h_3) =$$
$$= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (h_1 + h_2 + h_3) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot r = 2\pi r^2.$$

U opštem slučaju kada ima $k \in N$ omotača dobijamo:

$$P_k = M_1 + M_2 + \ ..... \ + M_k = 2\pi \cdot (r \cdot h_1 + r \cdot h_2 + \ ..... \ + r \cdot h_k) =$$
$$= 2\pi r \cdot (h_1 + h_2 + \ ..... \ + h_k) = 2\pi r^2.$$

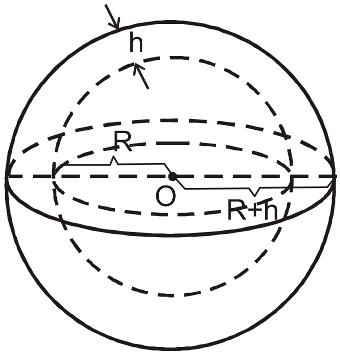


Slika 7.

Dakle, površina svih opisanih omotača zarubljenih kupa oko polusfere konstantno je jednaka $P_k = 2\pi r^2$. Kada prirodan broj $k \to \infty$, dužine stranica pravilnog poligona koji generišu ove omotače teži nuli. Tačke S i Q se tada podudaraju sa tačkom O_1, a tačke A i V leže na sferi, tj. $2\pi r^2 = \lim\limits_{k \to \infty} P_k = \dfrac{P}{2}$.

Ukupna površina beskonačno mnogo omotača zarubljenih kupa teži polovini površine sfere poluprečnika r, pa je površina sfere $P = 4\pi r^2$, što je i trebalo dokazati.

Ove modernizovane verzije antičkog dokaza mogle bi da nađu mjesto u svim srednjoškolskim udžbenicima matematike, što bi uz postojeće uobičajeno dokazivanje kao i ono korišćenjem integralnog računa, predstavljala još jedan primjer kombinovanog poliformizma u nastavi matematike srednje škole



Slika 8.

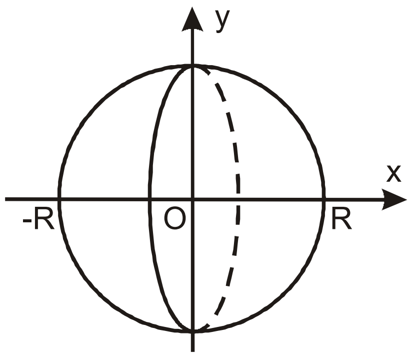
U nekim udžbenicima III razrerda srednjih sručnih škola i gimnazije prirodno-matematičkog smjera može se sresti sljedeća varijanta izvođenja obrasca za izračunavanje površine sfere:

„Neka je data lopta poluprečnika R. Posmatrajmo loptu poluprečnika $R+h$, gdje je $h>0$. Tjelo koje je izvan manje a unutar veće lopte, nazivamo sfernim slojem (slika 8). Ako sa P označimo površinu sfere poluprečnika R i ako je h veličina (broj) bliska nuli, tada je zapremina V sloja približno jednaka $P \cdot h$, odnosno površina P je približno jednaka količniku $\frac{V}{h}$.

Drugim riječima, kada broj h teži nuli tada kiličnik $\frac{V}{h}$ teži površini sfere P. Kako je zapremina sloja jednaka razlici zapremina veće i manje lopte, to je

$$V = \frac{4}{3}\pi(R+h)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi h \cdot (3R^2 + 3Rh + h^2),$$

pa imamo $\frac{V}{h} = 4\pi R^2 + 4\pi Rh + \frac{4}{3}\pi h^2.$



Slika 9.

Za male vrednosti h poslednja dva sabirka na desnoj strani poslednje jednakosti su takođe bliski nuli, pa količnik $\frac{V}{h}$ teži broju $4\pi r^2$, što je površina sfere. U IV razredu srednjih stručnih škola i gimnazije prirodno-matematičkog smjera pruža se mogućnost da se primjenom određenog integrala odredi površina sfere poluprečnika R. Pođimo od jedinične kružnice čija je jednačina $x^2 + y^2 = R^2$, tj. $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ čiji se centar nalazi u koordinantnom početku i čiji je poluprečnik R.

Kad se cio luk kružnice iznad ose Ox obrće oko ose Ox on opisuje obrtnu površ koja se zove sfera ili površ lopte (slika 9). Jednačina kružnice iznad Ox ose u eksplicitnom obliku je $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Dalje je prvi izvod te funkcije:

$$y' = \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)' = \frac{(R - x^2)'}{2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{-2 \cdot x}{2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

$$P = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 - (y')^2}\, dx = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{R^2 - x^2}\right)^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = 2\pi R \int_{-R}^{R} dx = 2\pi R [x]_{-R}^{R} =$$

$$= 2\pi R \cdot [R - (-R)] = 4R^2\pi.$$

Primjenom poznate formule za izračunavanje površine obrtnog tijela dobija se površina sfere P.

Ovim smo dokazali da je površina lopte poluprečnika R: $P = 4\pi R^2$.

КОРИШЋЕНА ЛИТЕРАТУРА

[1] И.Ф.Шарыгин: *Нужна ли школе 21-го века Геометрия?* Математическое Просвещение, Третья серия (Выпуск 8) Издательство МЦНИО, Москва, 2004. 34-52

[2] Strojk J. Dirk, *Kratak pregled istorije matematike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1991.

[3] Miodrag Perović, *Razvoj matematičkih i filizofskih ideja – skripta*, Specijalističke poslijediplomske studije, PMF Podgorica, 2004.

[4] Пенавин Велимир, *Структура и класификација метода у настави аритметике и алгебре*, Завод за издавање уџбеника, Београд, 1971.

[5] Ђоко Г. Марковић, *Геометријска читанка*, Светигора, Никшић, 2003.

[6] Đoko G.Marković, *Geometrijski poliformizam*, 3 Makarije, Podgorica, 2006.