MAT-KOL (Banja Luka) ISSN 0354-6969 (p)
XIX(1)(2013), 47-56 ISSN 1986-5828 (o)
Metodika matematike / Euklidska geometrija

RAZNI DOKAZI JEDNE TEOREME ZA PRAVILAN PETNAESTOUGAO

(Miscellaneous proofs of one theorem for the regular 15-gon)

Dragoljub Milošević [1]

Sažetak. U radu je dato 11 dokaza jedne teoreme koja se odnosi na pravilan petnaestougao.

Ključne reči: pravilni petnaestougao, dijagonale pravilnog petnaestougla, jednakostraničan trougao, paralelogram, jednakokraki trapez, Pitagorina i Ptolemejeva teorema, Molvajdova formula, kosinusna teorema, kompleksni brojevi.

Abstract. In this paper we give eleven different proofs of one theorem for the regular 15-gon.

Key words and phrases: regular 15-gon, diagonals of regular 15-gon, equilateral triangle, parallelogram, isosceles trapezoid, Pythagorean and Ptolemy's theorem, Mollweide's formula, cosine law, complex numbers.

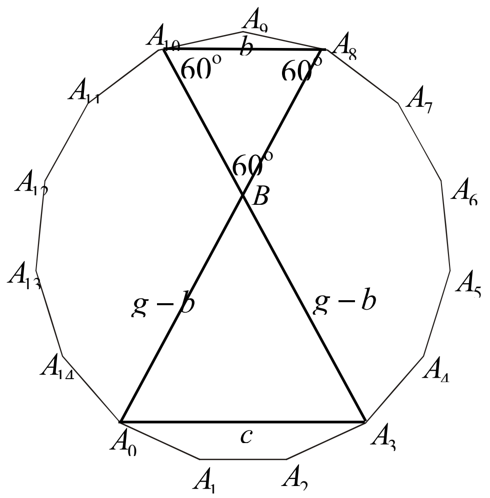
AMS Subject classification (2010): 51M04, 97G40
ZDM Subject classification (2010): G40

Dokazivanje neke teoreme na više načina veoma lepo ilustruje bogatstvo ideja, dosetki, inventivnosti i dosta doprinosi razvoju kvalitetnog razmišljanja i matematičke intuicije. Ovaj članak smatramo poučnim i korisnim za mlade matematičare i nastavnike koji rade sa nadarenim učenicima.

Prikazano je 11 različitih dokaza jedne teoreme koja se odnosi na pravilan petnaestougao. U ovim dokazima korišćeno je mnoštvo činjenica iz geometrije mnogougla, trigonometrije, kompleksne analize, itd. Reč je o sledećoj teoremi:

Teorema. *U pravilnom petnaestouglu* $A_0A_1A_2 \ldots A_{14}$ *važi jednakost* $A_0A_2 + A_0A_3 = A_0A_8$.

[1] 17. NOU divizije 43, 32300 Gornji Milanovac, Srbija; e-mail: dramil 47@gmail.com.



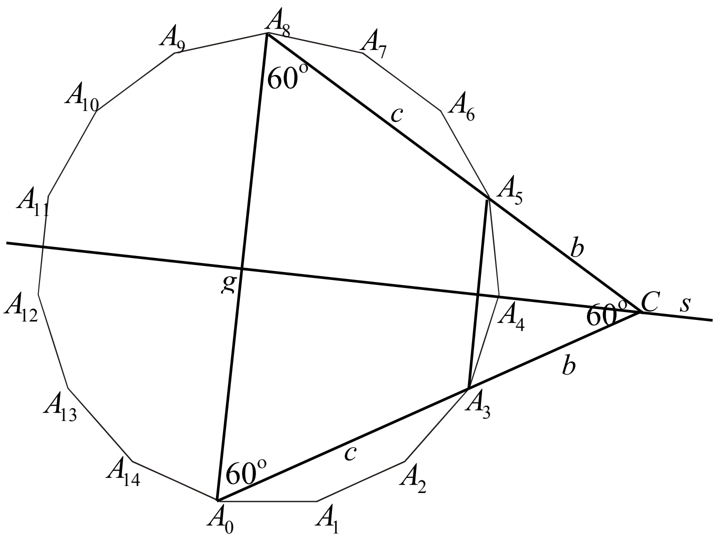
Slika 1.

Dokaz 1. Uvedimo sledeće oznake: $A_0A_2 = b$, $A_0A_3 = c$, $A_0A_8 = g$. Tada navedena jednakost postaje

$$b + c = g. \qquad (*)$$

Tačku preseka dijagonala A_0A_8 i A_3A_{10} označimo sa B (slika 1). S obzirom da je $\angle A_8A_{10}B = \angle A_{10}A_8B = 60^{o}$ (periferijski nad trećinom kružnice opisane oko datog pravilnog 15-ougla) imamo $\angle A_8BA_{10} = 180^{o} - 2\cdot 60^{o} = 60^{o}$, što znači da je $\Delta A_8A_{10}B$ jednakostranični. Tada je $A_8B = A_{10}B = A_8A_{10} = b$, pa je $A_0B = A_3B = g - b$. Kako je $\angle A_0BA_3 = \angle A_8BA_{10} = 60^{o}$ (unakrsni) i $A_0B = A_3B$, zaključujemo da je i ΔA_0A_3B jednakostranični. Zbog toga je $A_0A_3 = A_3B$, ili $c = g - b$. Ova jednakost je ekvivalentna sa traženom jednakošću $(*)$.

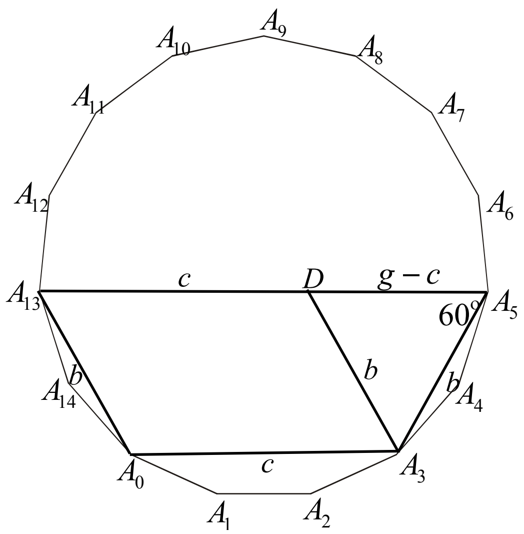
Dokaz 2. Prave kojim pripadaju dijagonale A_0A_3 i A_5A_8 seku se u tački C (slika 2). Uglovi $\angle A_8A_0C$ i $\angle A_0A_8C$ su periferijski nad trećinom kružnice opisane oko datog mnogougla, pa su jednaki 60^{o}, što znači da je ΔA_0CA_8 jednakostranični. S obzirom da je pravilan 15-ougao osno simetrična figura, zaključujemo da su tačke A_0 i A_8, odnosno A_3 i A_5 simetrične u odnosu na osu s koja sadrži teme A_4 i središte stranice $A_{11}A_{12}$. To znači da je $A_0A_8 \perp s$ i $A_3A_5 \perp s$, pa je $A_0A_8 \| A_3A_5$. Budući da je $\angle A_5A_3C = \angle A_3A_0A_8 = 60^{o}$ (oštri uglovi sa paralelnim kracima) i $\angle A_3CA_5 = 60^{o}$, proizlazi da je ΔA_3CA_5 jednakostranični, tj. $A_3C = A_5C = A_3A_5 = b$. Kako je $A_0A_3 = c$ i $A_0A_8 = g$, u jednakostraničnom trouglu A_0CA_8 je $A_0C = A_0A_8$, ili $c + b = g$, tj. jednakost $(*)$ važi.



Slika 2

Dokaz 3. Četvorougao $A_0A_3A_5A_{13}$ je jednakokraki trapez, jer $A_0A_3 \| A_{13}A_5$ i $A_3A_5 = A_0A_{13} = b$ (slika 3). Na duži $A_{13}A_5$ odredimo tačku D tako da $A_3D \| A_0A_{13}$. Tada je četvorougao $A_0A_3DA_{13}$ paralelogram, što znači da je $A_0A_{13} = A_3D = b$ i $A_{13}D = A_0A_3 = c$. Zbog toga je $A_5D = g - c$. Kako je $A_3D = A_3A_5 = b$ i $\angle A_3A_5D = 60^o$ (periferijski nad trećinom kružnice opisane oko pravilnog petnaestougla), zaključujemo da je ΔA_3A_5D jednakostranični. Otuda je

$$A_3A_5 = A_5D\text{, ili } b = g - c\text{, tj. } b + c = g.$$

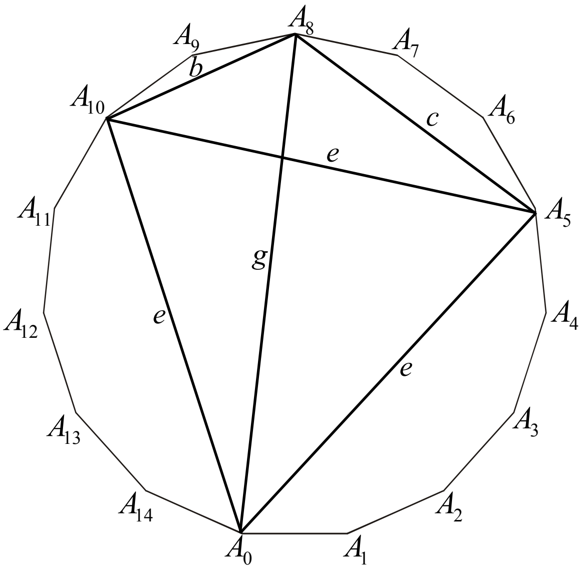


Slika 3

Dokaz 4. Stranicu jednakostraničnog trougla $A_0A_5A_{10}$ obeležimo sa *e*. Primenom Ptolemejeve teoreme na tetivni četvorougao $A_0A_5A_8A_{10}$ (slika 4), dobijamo

$$A_0A_8 \cdot A_5A_{10} = A_0A_5 \cdot A_8A_{10} + A_0A_{10} \cdot A_5A_8\text{, ili } g \cdot e = e \cdot b + e \cdot c\,.$$

Odavde, posle deljenja sa *e*, sledi $g = b + c$,tj. $(*)$ važi.



Slika 4

Dokaz 5. Na dijagonali A_0A_8 odredimo tačku *E* tako da bude $A_0E = A_0A_3 = c$ (slika 5). Kako je $\angle A_3A_0E = 60^{\circ}$ (periferijski nad trećinom kružnice opisane oko datog mnogougla) i $A_0E = A_0A_3$, zaključujemo da je ΔA_0A_3E jednakostranični. Tada je $A_3E = c$ i $\angle A_0EA_3 = 60^{\circ}$, pa je

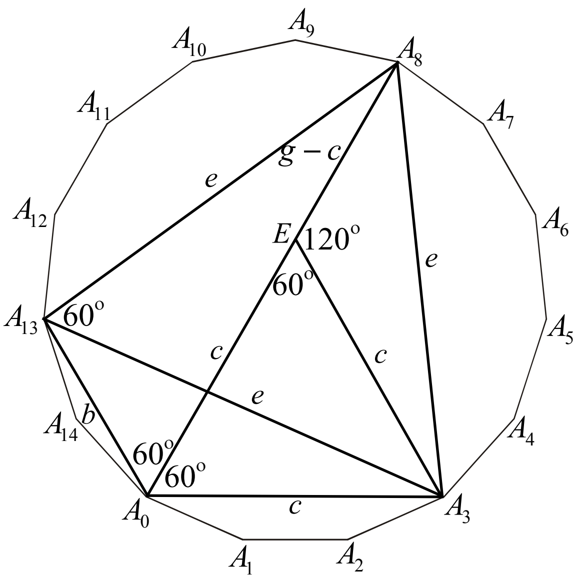
$$\angle A_3EA_8 = 180^{\circ} - 60^{\circ} = 120^{\circ} \text{ i } A_8E = g - c\,.$$

Budući da je $\angle A_3A_0A_8 = 60^{\circ}$ i $\angle A_{13}A_0E = 60^{\circ}$, imamo

$$\angle A_3A_{10}A_{13} = 60^{\circ} + 60^{\circ} = 120^{\circ}.$$

Trouglovi $A_0A_3A_{13}$ i A_3A_8E su podudarni (pravilo SSU), što znači da je

$$A_0A_{13} = A_8E\text{, ili } b = g - c\text{, tj. } b + c = g\,.$$



Slika 5

Dokaz 6. Uvedimo sledeće oznake: $A_0A_1 = a$, $A_0A_4 = d$, $A_0A_5 = e$, $A_0A_6 = f$ i $A_{14}A_6 = g$. Četvorougao $A_0A_1A_4A_5$ je jednakokraki trapez, jer je $A_1A_4 \| A_0A_5$ i $A_0A_1 = A_4A_5 = a$ (slika 6). Neka je $A_4F \perp A_0A_5$, $F \in A_0A_5$. Tada je $A_5F = \dfrac{e-c}{2}$ i $A_0F = \dfrac{e+c}{2}$. Primenom Pitagorine teoreme na pravougle trouglove A_0A_4F i A_4A_5F dobijamo

$$A_4F^2 = d^2 - \left(\frac{e+c}{2}\right)^2 \text{ i } A_4F^2 = a^2 - \left(\frac{e-c}{2}\right)^2,$$

a odavde je

$$d^2 - \left(\frac{e+c}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{e-c}{2}\right)^2.$$

Posle kvadriranja i sređivanja odavde sledi

$$d^2 - a^2 = ce. \qquad (1)$$

Dalje, četvorougao $A_0A_5A_6A_{14}$ je, takođe, jednakokraki trapez. Neka je $A_0G \perp A_{14}A_6$, $G \in A_{14}A_6$. Tada je $A_{14}G = \dfrac{g-e}{2}$ i $A_6G = \dfrac{g+e}{2}$, pa je $A_0G^2 = a^2 - \left(\dfrac{g-e}{2}\right)^2$ i $A_0G^2 = f^2 - \left(\dfrac{g+e}{2}\right)^2$ (Pitagorina teorema!),odakle je

$$f^2 - a^2 = ge. \qquad (2)$$

Na sličan način, iz jednakokrakog trapeza $A_0A_5A_9A_{11}$ imamo

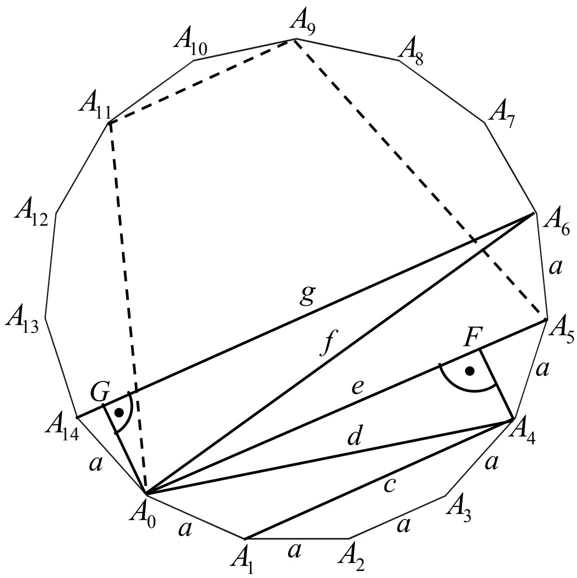
$$f^2 - d^2 = be \qquad (3)$$

Ako od zbira jednakosti (3) i (1) oduzmemo jednakost (2) dobijamo

$$0 = be + ce - ge \,/ : e$$

$$\Rightarrow \quad 0 = b + c - g$$

$$\Rightarrow \quad b + c = g\,, \quad q, e, d.$$

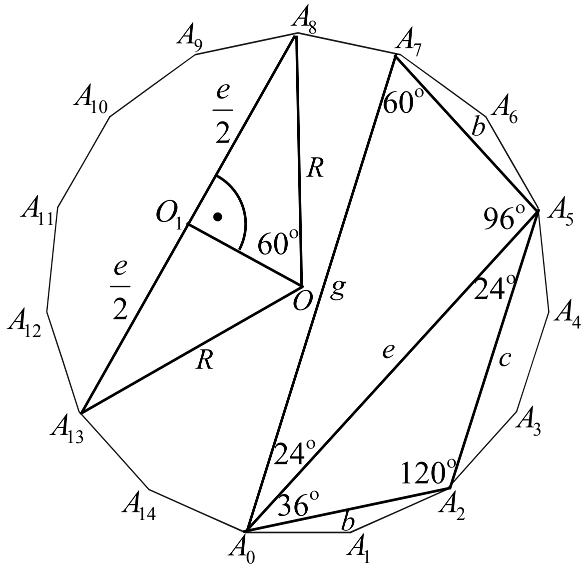


Slika 6

Dokaz 7. Koristićemo Molvajdovu formulu $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\gamma}{2}}$, gde su *a, b, c* stranice i α, β, γ odgovarajući unutrašnji uglovi trougla *ABC.*

S obzirom da je $\angle A_2A_0A_5 = 36^\circ$ (periferijski ugao nad petinom opisane kružnice oko pravilnog petnaestougla) i $\angle A_0A_5A_2 = 24^\circ$ (periferijski ugao nad dve petnaestine te kružnice), imamo u $\Delta A_0A_2A_5$: $\angle A_0A_2A_5 = 180^\circ - \left(36^\circ + 24^\circ\right) = 120^\circ$. Primenom navedene formule (slika 7) dobijamo

$$\frac{b+c}{e} = \frac{\cos\dfrac{36^\circ - 24^\circ}{2}}{\sin\dfrac{120^\circ}{2}} = \frac{\cos 6^\circ}{\sin 60^\circ}. \qquad (4)$$



Slika 7

Kako je u $\Delta\ A_0A_2A_5$ $e = 2R\sin 120^{\circ} = 2R\sin 60^{\circ}$ i u $\Delta\ A_0A_5A_7$ $g = 2R\sin 96^{\circ} = 2R\sin 84^{\circ}$ (R – poluprečnik opisane kružnice oko pravilnog 15-ougla), imamo $\dfrac{e}{g} = \dfrac{2R\sin 60^{\circ}}{2R\sin 84^{\circ}} = \dfrac{\sin 60^{\circ}}{\sin 84^{\circ}}$, a odavde, zbog $\sin 84^{\circ} = \sin\left(90^{\circ} - 6^{\circ}\right) = \cos 6^{\circ}$, proizlazi

$$\frac{e}{g} = \frac{\sin 60^{\circ}}{\cos 6^{\circ}}. \qquad (5)$$

Sada je $\dfrac{b+c}{e}\cdot\dfrac{e}{g} = \dfrac{\cos 6^{\circ}}{\sin 60^{\circ}}\cdot\dfrac{\sin 60^{\circ}}{\cos 6^{\circ}} = 1 \Rightarrow \dfrac{b+c}{g} = 1 \Rightarrow b + c = g$. *q. e. d.*

Dokaz 8. Primenom kosinusne teoreme na trouglove $A_0A_2A_5$ i $A_0A_5A_7$ (slika 8), dobijamo

$$A_0A_5^2 = A_0A_2^2 + A_2A_5^2 - 2A_0A_2\cdot A_2A_5\cdot\cos 120^{\circ} \text{ i}$$
$$A_0A_5^2 = A_5A_7^2 + A_0A_7^2 - 2A_5A_7\cdot A_0A_7\cdot\cos 60^{\circ},$$

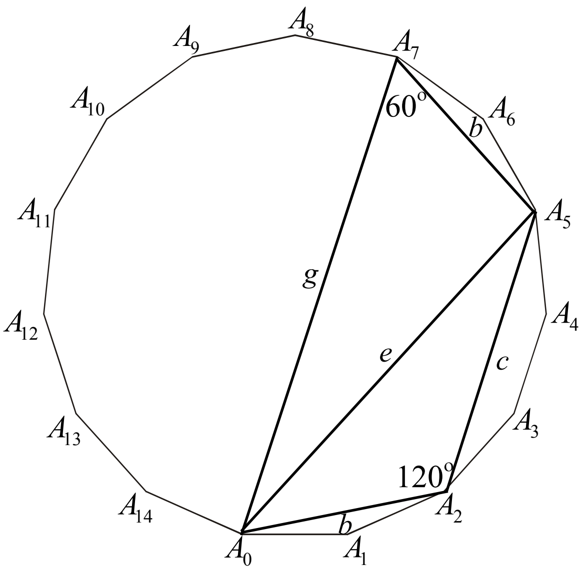
ili $e^2 = b^2 + c^2 + bc$ i $e^2 = b^2 + g^2 - bg$ (jer $\cos 120^{\circ} = -\dfrac{1}{2}$ i $\cos 60^{\circ} = \dfrac{1}{2}$).

Tada je

$$b^2 + c^2 + bc = b^2 + g^2 - bg, \text{ odnosno } bc + bg = g^2 - c^2.$$

Odavde, zbog $bc + bg = b(c+g)$ i $g^2 - c^2 = (g-c)(g+c)$, произлази

$$b(c+g) = (g-c)(g+c)\,/:(c+g) \Rightarrow b = g - c \Rightarrow b + c = g, \ q.e.d.$$



Slika 8

Dokaz 9. Kako je u trouglovima $A_0A_5A_7$ i $A_0A_2A_5$ (slika 7): $b = 2R\sin 24^\circ$, $c = 2R\sin 36^\circ$ i $g = 2R\sin 84^\circ$, postavljena jednakost $(*)$ ekvivalentna je sa

$$\sin 24^\circ + \sin 36^\circ = \sin 84^\circ. \qquad (6)$$

Imamo redom:

$$\sin 84^\circ - \sin 36^\circ = 2\sin\frac{84^\circ - 36^\circ}{2}\cos\frac{84^\circ + 36^\circ}{2} =$$
$$= 2\sin 24^\circ \cos 60^\circ = \sin 24^\circ, \text{ jer } \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

tj.

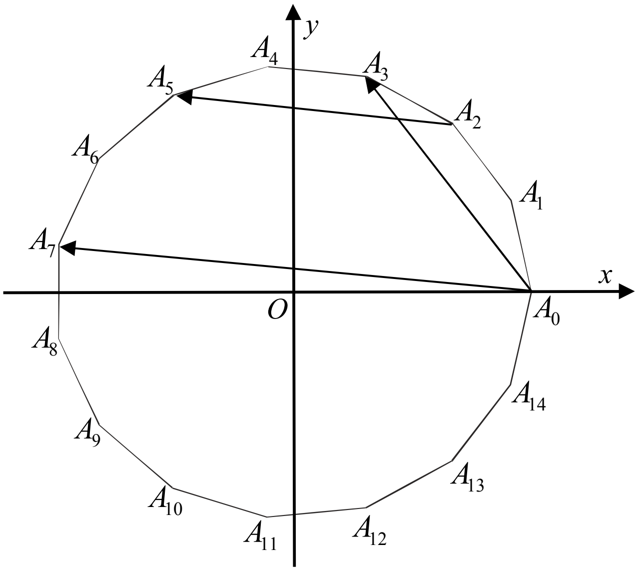
$$\sin 84^\circ - \sin 36^\circ = \sin 24^\circ \iff \sin 24^\circ + \sin 36^\circ = \sin 84^\circ,$$

tj. (6) važi, pa važi i $(*)$.

Dokaz 10. Neka je pravilan petnaestougao $A_0A_1A_2 \ldots A_{14}$ u Gausovoj ravni upisan u jediničnu kružnicu sa centrom u koordinatnom početku (slika 9). Tada su brojevi

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{15} + i\sin\frac{2k\pi}{15} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, 14)$$

afiksi tačaka $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{14}$ redom.



Slika 9

Imamo $A_0A_7 - A_0A_3 = A_0A_7 - A_2A_5$. Kako su vektori $\overrightarrow{A_0A_7}$ i $\overrightarrow{A_2A_5}$ kolinearni i istog smera te kako važi $A_0A_7 = |z_7 - z_0|$ i $A_2A_5 = |z_5 - z_2|$, to je

$$A_0A_7 - A_2A_5 = |(z_7 - z_0) - (z_5 - z_2)| = |z_1^7 - 1 - z_1^5 + z_1^2| =$$
$$= |(z_1^7 - z_1^5) + (z_1^2 - 1)| = |z_1^5(z_1^2 - 1) + (z_1^2 - 1)| =$$
$$= |(z_1^2 - 1)(z_1^5 + 1)| = |z_1^2 - 1| \cdot |z_1^5 + 1|$$

S obzirom da je $z^{15} - 1 = 0$, то je $(z_1^5 - 1)(z_1^{10} + z_1^5 + 1) = 0$. Zbog $z_1^5 - 1 \neq 0$ imamo $z_1^{10} + z_1^5 + 1 = 0$, odnosno $z_1^5 + 1 = -z_1^{10}$. Tada je $|z_1^5 + 1| = |-z_1^{10}| = |z_1|^{10} = 1$, pa je

$$A_0A_7 - A_0A_3 = |z_1^2 - 1| = |z_2 - z_0| = A_0A_2, \text{ ili } A_0A_2 + A_0A_3 = A_0A_7, \ q.e.d.$$

Dokaz 11. Tražena jednakost $(*)$ sledi na osnovu Van Schoutenove teoreme ([1]). Naime, trougao $A_0A_5A_{10}$ je jednakostranični (slika 4), pa na osnovu te teoreme imamo

$$A_8A_{10} + A_5A_8 = A_0A_8, \text{ tj. } b + c = g.$$

Napomena. Jednakost $(*)$ može se dokazati primenom: a) vektora, b) metode koordinata.

LITERATURA

[1] Š.Arslanagić, *Generalizacija Van Schoutenove teoreme*, MAT-KOL (Banja Luku), XVI (2) (2010), 19 – 22.
[2] M. Prvanović, *Osnovi geometrije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1987.

Primljeno u redakciju 29.05.2012, revidirana verzija 11.06.2012, dostupno na internetu od 30.06.2012.