MAT-KOL (Banja Luka)
XIX(1)(2013), 17- 23

ISSN 0354-6969 (p)
ISSN 1986-5828 (o)
Aritmetika / Teorija brojeva

O JEDNOJ CIKLIČKOJ ALGEBARSKOJ NEJEDNAKOSTI
(About one cyclic algebraic inequality)

Šefket Arslanagić[*)]

Sažetak. U ovom radu se razmatra jedna poznata ciklička algebarska nejednakost oblika:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+...+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geq\frac{n}{2},$$

gdje je $a_i>0$, $a_i+a_{i+1}>0$ $\left(a_{n+1}=a_1, i=1,2,...,n\right)$.
Dati su dokazi ove nejednakosti za $n=3,4,5,6$ koristeći nejednakost

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+...+\frac{a_n^2}{x_n}\geq\frac{\left(a_1+a_2+...+a_n\right)^2}{x_1+x_2+...+x_n},$$

gdje su $x_i>0; a_i\in ¡$ $\left(i=1,2,...,n\right)$.

Ključne riječi i izrazi: ciklička algebarska nejednakost, matematička indukcija, generalizacija, specijalni slučajevi nejednakosti, Nesbitova nejednakost.

Abstract. In this paper we consider one well known cyclic algebraic inequality

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+...+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geq\frac{n}{2},$$

where is $a_i>0$, $a_i+a_{i+1}>0$ $\left(a_{n+1}=a_1, i=1,2,...,n\right)$.
We give the proofs of this inequality for $n=3,4,5,6$ by using the inequality

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+...+\frac{a_n^2}{x_n}\geq\frac{\left(a_1+a_2+...+a_n\right)^2}{x_1+x_2+...+x_n},$$

where $x_i>0; a_i\in ¡$ $\left(i=1,2,...,n\right)$.

Key words and phrases: cyclic algebraic inequality, mathematical induction, generalisation, special cases of inequality, Nesbitt's inequality.

AMS Subject Classification (2010): 97 F 50
ZDM Subject Classification (2010): F 50, N 50

[*)] University of Sarajevo, Faculty of sciences and mathematics, Department of Mathematics, Zmaja od Bosne 35, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina; e-mail:asefket@pmf.unsa.ba

1. UVOD (Introduction)

Neka je data nejednakost:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geq\frac{n}{2}, \tag{1}$$

gdje je $a_i > 0$, $a_i + a_{i+1} > 0$ $\left(a_{n+1} = a_1, i = 1,2,\ldots,n\right)$.

Mnogo relevantnih činjenica u vezi nejednakosti (1) se nalazi u [5], s. 128-134. Ova nejednakost je izazvala živo interesovanje među matematičarima, što će moći da se vidi iz sljedećeg izlaganja (vidi [5]):

Najprostiji slučaj ($n = 3$) pojavio se u literaturi 1903. godine (A.M. Nesbitt, Problem 15114, Časopis Educational Times (2) 3(1903), 37-38) pa se nejednakost (1) za $n = 3$ često naziva Nesbitova nejednakost. H.S. Shapiro postavio je 1954. godine u časopisu The American Mathematical Monthly 61(1954), 571 Problem 4603 da se dokaže (1) za svako $n = 3,4,\ldots$. Godine 1956. je ovaj matematičar u istom časopisu br. 63(1956), 191-192. dao dokaz ove nejednakosti za $n = 3$ i $n = 4$, dok je C.R. Phelps dao dokaz za $n = 5$. U istom broju časopisa editori su objavili da je M.J. Lighthill uspio da dokaže da (1) ne važi za $n = 20$. Kontra-primjer koji je dao ovaj matematičar detaljno je prikazan u [4].

L.J. Mordell je dokazao 1958. godine da (1) važi za $n = 3,4,5,6$. Uz navedeni Mordellov članak dodata je kratka nota [6] od A. Zulaufa. U toj noti dat je kontra-primjer koji dokazuje da (1) ne važi za $n = 14$. Ovaj rezultat implicira da (1) ne važi za n parno i $n \geq 14$. Jedan drugi kontra-primjer za $n = 14$ dali su kasnije, 1960. godine M. Herschorn i J.E.L. Peck. D.Ž. Đoković je 1963. godine dokazao da (1) važi za $n = 8$. Na osnovu toga rezultata P.H. Diananda i B. Bajšanski su iste godine, nezavisno jedan od drugog, dokazali da je (1) tačno i za $n = 7$. P.H. Diananda je također dokazao da (1) ne važi za $n = 27$. Ostalo je još neispitanih slučajeva. (Prema saznanjima autora ovog rada od prije 30-40 godina, to su slučajevi $n = 11,12,13,15,17,19,21,23,25$).

Pošto je pokazano da ne važi nejednakost (1) za sve $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 3)$, mnogi matematičari su pokušali utvrditi za koje $\lambda \in \mathbb{R}^+$ važi nejednakost:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geq\lambda n, \tag{1'}$$

gdje je $a_i > 0, a_i + a_{i+1} > 0$ $\left(a_{n+1} = a_1,\ i = 1,2,\ldots,n\right)$.

Godine 1958. R.A. Rankin je dokazao da mora biti $\alpha < \frac{1}{2} - 7\cdot 10^{-8} < \frac{1}{2}$, a u jednom kasnijem članku on je deokazao da je $\lambda > 0{,}3307\ldots$. Gornju granicu za λ je poboljšao A. Zulauf 1959. godine. U istom članku on je dokazao da (1) ne važi za $n = 53$.

P.H. Diananda je 1962/63 godine dokazao da (1') važi ako je

$$0,461238 < \lambda < 0,499197 .$$

V.G. Drinfeljd[1] je kao srednjoškolac na pripremama za IMO u Bukureštu 1969. godine (kao član ekipe SSSR je osvojio zlatnu medalju sa osvojenih 40 poena od mogućih 42) dao metod kako se može izračunati λ sa proizvoljnom preciznošću. Dokazao je da je $\lambda = \frac{g(0)}{2}$, gdje je $y = g(x)$ jednačina zajedničke tangente povučene na krive čije su jednačine $y = e^{-x}$ i $y = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$. Dobio je da je $\lambda = 0,494...$. Ovo je objavljeno 1971. godine u [4].

2. GLAVNI REZULTATI (Main results)

Neka je data nejednakost:

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + ... + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n}, \tag{2}$$

gdje su $x_i > 0; a_i \in$ ¡ $(i = 1,2,...,n)$.

Sada ćemo dati dokaze nejednakosti (1) za $n = 3,4,5,6$ uz pomoć nejednakosti (2). Inače, nejednakost (2) se lako dokazuje pomoću principa matematičke indukcije. (Ovaj dokaz se nalazi u [1], s. 53-54).

1^0 ***n* = *3***: Nejednakost (1) sada glasi

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}; \ (a,b,c > 0). \tag{3}$$

(Uzeli smo u (1) da je $a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c$).

Recimo i to da se deset dokaza ove nejednakosti nalazi u [1], s. 40-52, a još jedanaest dokaza u [2], s. 25-35.

Pređimo sada na dokaz nejednakosti (3) pomoću nejednakosti (2). Imamo

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a^2}{a(b+c)} + \frac{b^2}{b(c+a)} + \frac{c^2}{c(a+b)}$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)} = \frac{(a+b+c)^2}{2ab + 2bc + 2ca}. \tag{4}$$

Kako je

$$\frac{(a+b+c)^2}{2ab + 2bc + 2ca} \geq \frac{3}{2} \tag{5}$$

[1] Vladimir Geršanovič Drinfeljd je rođen 04. februara 1954. godine u gradu Harkovu u Ukrajini koja je tada bila u sastavu SSSR. Diplomirao je na studiju matematike na Državnom univerzitetu u Moskvi. Nekoliko godina kasnije je doktorirao na Matematičkom institutu Steklov u tadašnjem SSSR-u. Godine 1998. odlazi u SAD gdje od decembra 1998. radi i danas na Univerzitetu u Čikagu. U japanskom gradu Kjotu na 21. međunarodnom matematičkom kongresu dobio je najveće matematičko priznanje Fieldsovu medalju za svoje radove iz algebarske geometrije i teorije kvantnih grupa.

$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)^2 \geq 6(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0,$$

a ova nejednakost je tačna, pa je i nejednakost (5) tačna. Sada iz (4) i (5) slijedi da je nejednakost (3) tačna. Vrijedi jednakost u (3) ako i samo ako je $a=b=c$.

2^0 ***n* = *4*** : Nejednakost (1) glasi

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} \geq 2;\ \left(a,b,c,d>0\right). \tag{6}$$

(Ovdje je $a_1=a,\ a_2=b,\ a_3=c,\ a_4=d$). Imamo zbog (2):

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}=\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+d)}+\frac{c^2}{c(d+a)}+\frac{d^2}{d(a+b)}$$

$$\geq \frac{(a+b+c+d)^2}{a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b)}=\frac{(a+b+c+d)^2}{ab+ac+bc+bd+cd+ac+ad+bd}$$

$$=\frac{(a+b+c+d)^2}{ab+bc+ad+cd+2ac+2bd}. \tag{7}$$

Imamo dalje

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{ab+bc+ad+cd+2ac+2bd} \geq 2 \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c+d)^2 \geq 2ab+2bc+2ad+2cd+4ac+4bd$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-c)^2+(b-d)^2 \geq 0,$$

a ova nejednakost je tačna gdje vrijedi jednakost ako i samo ako je $a=c$ i $b=d$. Sada iz (7) i (8) slijedi da je nejednakost (6) tačna. Vrijedi jednakost u (6) ako i samo ako je $a=b=c=d$.

3^0 ***n* = *5*** : Nejednakost (1) sada glasi:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+a}+\frac{e}{a+b}\geq\frac{5}{2};\ \left(a,b,c,d,e>0\right). \tag{9}$$

(Ovdje je $a_1=a, a_2=b, a_3=c,\ a_4=d, a_5=e$).
Na osnovu nejednakosti (2) dobijamo

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+a}+\frac{e}{a+b}=\frac{a^2}{a\left(b+c\right)}+\frac{b^2}{b\left(c+d\right)}+\frac{c^2}{c\left(d+e\right)}+\frac{d^2}{d\left(e+a\right)}+\frac{e^2}{e\left(a+b\right)}$$

$$\geq\frac{\left(a+b+c+d+e\right)^2}{a\left(b+c\right)+b\left(c+d\right)+c\left(d+e\right)+d\left(e+a\right)+e\left(a+b\right)}$$

$$=\frac{\left(a+b+c+d+e\right)^2}{ab+ac+bc+bd+cd+ce+de+ad+ae+be}. \tag{10}$$

Imamo dalje

$$\frac{\left(a+b+c+d+e\right)^2}{ab+ac+bc+bd+cd+ce+de+ad+ae+be}\geq\frac{5}{2} \tag{11}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a+b+c+d+e\right)^2\geq 5\left(ab+ac+bc+bd+cd+ce+de+ad+ae+be\right)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2+2d^2+2e^2-ab-ac-bc-bd-cd-ce-de-ad-ae-be\geq 0\,/\cdot 2$$

$$\Leftrightarrow \left(a-b\right)^2+\left(a-c\right)^2+\left(a-d\right)^2+\left(a-e\right)^2+\left(b-c\right)^2+$$

$$+\left(b-d\right)^2+\left(b-e\right)^2+\left(c-d\right)^2+\left(c-e\right)^2+\left(d-e\right)^2\geq 0,$$

a ova nejednakost je tačna, gdje vrijedi jednakost ako i samo ako je $a=b=c=d=e$. Sada iz (10) i (11) slijedi nejednakost (9) sa jednakošću ako i samo ako je $a=b=c=d=e$.

4^0 $\boldsymbol{n=6}$: Nejednakost (1) sada glasi

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+f}+\frac{e}{f+a}+\frac{f}{a+b}\geq 3;\ \left(a,b,c,d,e,f>0\right). \tag{12}$$

Na osnovu nejednakosti (2) dobijamo

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+f}+\frac{e}{f+a}+\frac{f}{a+b}=\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+d)}+\frac{c^2}{c(d+e)}+\frac{d^2}{d(e+f)}+\frac{e^2}{e(f+a)}+\frac{f^2}{f(a+b)}$$

$$\geq \frac{(a+b+c+d+e+f)^2}{ab+ac+bc+bd+cd+ce+de+df+ef+ae+af+bf}. \tag{13}$$

Neka je

$$S = ab+ac+bc+bd+cd+ce+de+df+ef+ae+af+bf\,,$$

tada je

$$2S = (a+b+c+d+e+f)^2 - \left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+2ad+2be+2cf\right). \tag{14}$$

Također imamo

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+2ad+2be+2cf =$$

$$=(a+d)^2+(b+e)^2+(c+f)^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c+d+e+f)^2$$

(na osnovu nejednakosti između kvadratne i aritmetičke sredine za tri pozitivna broja), a odavde

$$-\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+2ad+2be+2cf\right) \leq -\frac{1}{3}(a+b+c+d+e+f)^2. \tag{15}$$

Sada slijedi iz (14) i (15):

$$2S \leq (a+b+c+d+e+f)^2 - \frac{1}{3}(a+b+c+d+e+f)^2, \text{ tj.}$$

$$2S \leq \frac{2}{3}(a+b+c+d+e+f)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c+d+e+f)^2}{S} \geq 3. \tag{16}$$

Najzad iz nejednakosti (13) i (16) dobijamo nejednakost (12), q.e.d. Vrijedi jednakost u (12) ako i samo ako je $a=b=c=d=e=f$.

3. NAPOMENE (Remarks)

1. Recimo na kraju da je A. Zulauf dokazao 1958. godine u [6] modificiranu cikličku nejednakost

$$1 < \frac{a_1}{a_1+a_2} + \frac{a_2}{a_2+a_3} + \frac{a_3}{a_3+a_4} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+a_n} + \frac{a_n}{a_n+a_1} < n-1$$

gdje su $a_i > 0\ (i=1,2,\ldots,n)$ i $n \geq 3$. Gornje granice su najbolje moguće.

2. Dokazaćemo da vrijedi i sljedeća nejednakost (generalizacija od (1)) koja glasi

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+\ldots+a_n} + \frac{a_2}{a_1+a_3+\ldots+a_n} + \ldots + \frac{a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}} \geq \frac{n}{n-1}, \tag{17}$$

gdje su $a_i > 0\ (i=1,2,\ldots,n)$, $n \geq 2$.

Dokaz: Neka je $s = a_1+a_2+\ldots+a_n$, a

$$S=\frac{a_1}{a_2+a_3+...+a_n}+\frac{a_2}{a_1+a_3+...+a_n}+...+\frac{a_n}{a_1+a_2+...+a_{n-1}}\text{, tj.}$$

$$S=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i-s+s}{s-a_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{s-a_i}-n=s\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-a_i}-n\ .$$

Sada na osnovu najprije, nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine a zatim na osnovu nejednakosti između geometrijske i harmonijske sredine za n pozitivnih brojeva, dobijamo

$$S\geq ns\sqrt[n]{\frac{1}{(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_n)}}-n\text{, tj.}$$

$$S\geq s\cdot\frac{n^2}{(s-a_1)+(s-a_2)+\cdots+(s-a_n)}-n\text{, te}$$

$$S\geq\frac{n^2s}{(n-1)s}-n=\frac{n}{n-1}\text{, q.e.d.}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1=a_2=...=a_n$.

LITERATURA (References)

[1] Arslanagić, Š., *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.
[2] Arslanagić, Š., *Matematička čitanka 1*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009.
[3] Cvetkovski, Z., *Inequalities*, Springer-Verlag, Heidelberg/Dordrecht/London/ New York, 2012.
[4] Drinfeljd, V.G., *A cyclic inequality (Russian)*, Mat. Zametki 9 (1971), 113-118.
[5] Durell, C.V., *Query*, Math. Gaz. 40(1956), 266.
[6] Mitrinović, D.S., *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.
[7] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht/Boston/London, 1993.
[8] Zulauf, A., *Note on a conjecture of L.J. Mordell*, Abh Math. Sem. Univ. Hamburg 22(1958), 240-241.

Primljeno u redakciju 20.04.2012. Revidirana verzija 05.06.2012. Dostupno na internetu od 30.06.2012.