MAT-KOL (Banja Luka)
ISSN 0354-6969 (p), ISSN 1986-5228 (o)
Vol. XVIII (2)(2012), 49-67

Некоторые приложения математического анализа к задачам естествознания. II

В. И. Гаврилов[1], Ж. Павичевич[2], А. В. Субботин[3]

Abstract

Настоящая публикация является второй частью статьи авторов с тем же заголовком (см. [1]).

Ключевые слова и фразы: уравнения с разделяющимися переменными, биология, форма поверхности прожектора, свободное падение тел, гиперболические функции

Present publication is a second part of author's paper with the same title (see [1]).

Key words and phrases: equations with separated variables, biology, shape of spotlight, free fall of bodies, hyperbolic functions.

AMS Mathematics Subject Classification (2010): 97I50, 97I40

§1. Некоторые задачи из биологии

Задачи, рассмотренные в этом и последующих параграфах, используют начальные сведения из теории неопределенных интегралов, позволяющие решить простейшие дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными и уравнения, приводящиеся к ним. От читателя требуется понимание понятия неопределенного интеграла как множества первообразных функций, знание табличных интегралов и

[1]МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, e-mail: 4411066@mail.ru
[2]Университет Черногории, Природно-математический факультет, e-mail: zarkop@ac.me
[3]e-mail: awsubbotin@mail.ru

простейших приемов интегрирования — интегрирование суммы функций, вынесения постоянных за знак интеграла и интегрирования сложных функций приемом поднесения под знак дифференциала. Способ решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными приведен в начальном пункте 1.1, что делает изложение статьи замкнутым в себе.

1.1. Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Функция $\varphi = \varphi(x)$ называется *решением дифференциального уравнения* (1) на интервале I, если для всех $x \in I$ справедливо равенство $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$. Коротко говорят: функция φ удовлетворяет дифференциальному уравнению. *Решить дифференциальное уравнение* — это значит найти все решения этого уравнения. Совокупность всех решений заданного дифференциального уравнения называется общим решением этого уравнения.

Например, для дифференциального уравнения $y' = f(x)$ общее решение решение дается формулой $y = \int f(x)\,dx$.

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида (или приводящееся к виду)

$$g(y)y' = f(x). \tag{2}$$

Теорема. Общее решение дифференциального уравнения (2) дается формулой

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx. \tag{3}$$

Эта формула задает y как функцию от x неявно. Если уравнение (3) решить относительно y, то получим решение явно.

$\lhd$ Для доказательства теоремы надо проверить два факта:

1) каждая функция, удовлетворяющая равенству (3) на некотором интервале I, есть решение уравнения (2) на этом интервале I;

2) каждое решение уравнения (2) на интервале I есть функция, удовлетворяющая уравнению (3) на этом интервале I.

1) Пусть функция φ удовлетворяет уравнению (3) на некотором интервале I. Это значит, что для каждого $x \in I$ выполнено равенство $\int g(\varphi(x))\,d\varphi(x) = \int f(x)\,dx$; т. е.

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(x)\,dx.$$

Дифференцируя это тождество на I, получаем $g(\varphi(x))\varphi'(x) = f(x)$, так что функция φ есть решение уравнения (2) на интервале I.

2) Пусть функция φ есть решение уравнения (2) на интервале I. Это значит, что для любого $x \in I$ выполнено равенство $g(\varphi(x))\varphi'(x) = f(x)$, и поэтому $\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(x)\,dx$, т. е. $\int g(\varphi(x))\,d\varphi(x) = \int f(x)\,dx$, так что функция φ удовлетворяет уравнению (3) на I. $\triangleright$

1.2. Динамика развития биологического вида.

Решение ищем в двух случаях.

Случай 1. *Найдем динамику развития биологического вида, живущего в "идеальных" условиях.*

Состояние популяции (в простейшем понимании — стада) можно охарактеризовать биомассой m этой популяции (т. е. массой всего стада). Биомасса есть функция времени: $m = m(t)$, и мы хотим найти эту неизвестную функцию. Ее производная m' характеризует *скорость развития* (если $m' > 0$) или *вымирания* (если $m' < 0$) этой популяции. *Считается*, что *прирост dm биомассы пропорционален промежутку времени dt и биомассе m* популяции; т. е. $dm = km\,dt$. Отсюда, учитывая, что $m' = \dfrac{dm}{dt}$, получается дифференциальное уравнение динамики популяции

$$m' = km. \tag{4}$$

Вообще говоря, коэффициент $k > 0$ также зависит и от времени, и от m. "Идеальные условия" существования понимают в том смысле, что за время наблюдения коэффициент k постоянен, т. е. условия жизни изучаемой популяции не меняются. Тогда уравнение (4) есть уравнение с разделяющимися переменными, и мы находим его общее решение (учитывая то, что по смыслу задачи $m > 0$): $\int \frac{dm}{m} = k \int dt$, $\ln m = kt + C$ и

$$m = Ce^{kt}. \tag{5}$$

Для рассматриваемой задачи произвольная постоянная C имеет определенное значение. Его можно найти так: в начале, т. е. при $t = 0$, была какая-то начальная биомасса m_0. Подставив эти значения в формулу (5), получаем $m_0 = Ce^{k \cdot 0}$, откуда $C = m_0$, после чего формула (5) принимает вид $m = m_0 e^{kt}$.

Мы решили уравнение (4) при $m > 0$, исходя из реального смысла переменной m. В общем же случае формула (5) тоже дает общее решение уравнения (4). Действительно, если функция $m = m(t)$ есть решение уравнения (4), то

$$(me^{-kt})' = m'e^{-kt} + me^{-kt}(-k) = kme^{-kt} - mke^{-kt} = 0,$$

и по признаку постоянства функции $me^{-kt} = C$, т. е. $m = Ce^{kt}$.

Случай 2. *Найдем динамику популяции с учетом среды обитания.*

Простейшая постановка задачи состоит в следующем: ареал обитания популяции обеспечивает нормальное существование для ее биомассы и a есть характеристика среды обитания. Если биомасса популяции $m < a$, то условия жизни хорошие — популяция развивается, и поэтому $m' > 0$; если $m > a$, то условия жизни популяции плохие — популяция вымирает, и поэтому $m' < 0$. Перепишем уравнение (4) с учетом отмеченных фактов

$$m' = -b(m - a)m. \tag{6}$$

В общем случае коэффициент $b > 0$ и тоже переменный. Мы рассмотрим простейший случай: b постоянно. Тогда дифференциальное уравнение (6) есть уравнение с разделяющимися переменными; его решение имеет вид $-\int \frac{dm}{bm(m-a)} = \int dt$, $t = C - \frac{1}{ab} \ln\left|\frac{a}{m} - 1\right|$, поскольку

$$\int \frac{dm}{m(m-a)} = \int \frac{dm}{m^2(1-\frac{a}{m})} = \int \frac{d(\frac{a}{m}-1)}{a(\frac{a}{m}-1)} = \frac{1}{a} \ln\left|\frac{a}{m} - 1\right| + C.$$

Отсюда можно найти m как функцию времени t, но мы не будем этого делать, а будем строить график функции t от аргумента m. При этом достаточно построить график при $C = 0$, поскольку остальные графики получаются при помощи переноса параллельно оси Ot на расстояние C. Прежде всего видно, что при $m = a$ функция не определена и прямая $m = a$ есть асимптота. Из уравнения (6) видно, что $m' > 0$ при $0 < m < a$; т. е. функция $m(t)$ возрастает, а при $m > a$ производная $m' < 0$ и функция $m(t)$ убывает (см. рис. 1).

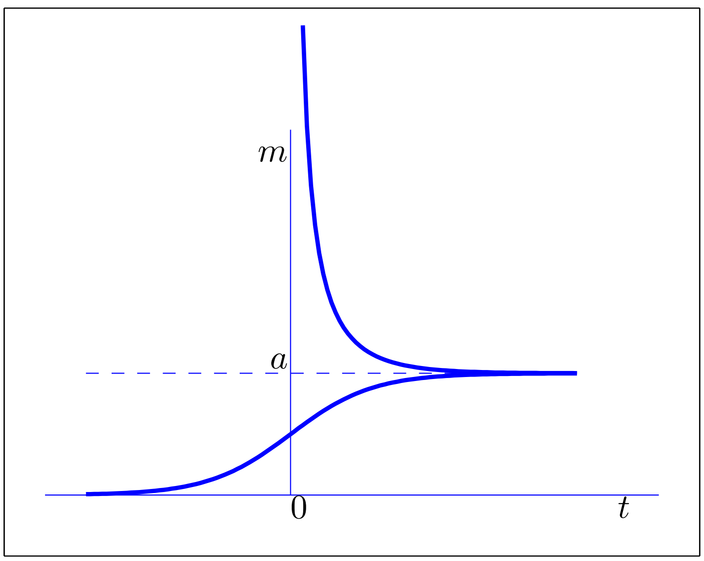

Рис. 1.

Полученные кривые дают ясное представление о графике функции $m(t)$ — нижняя для случая, когда при $t = 0$ было $m < a$, а верхняя для случая, когда при $t = 0$ было $m > a$.

Заметим еще, что $m = a$ тоже удовлетворяет уравнению (6). Это решение не получается из общего хода интегрирования, так как мы делили на $m - a$ и этим исключили решение $m = a$. Кроме того, здравый смысл подсказывает, что должны наблюдаться затухающие колебания около прямой $m = a$. При нашем решении этого не получилось, поскольку схема процесса была слишком грубой. При более детальной схеме это колебательное явление появляется, но зато дифференциальное уравнение становится очень сложным.

1.3. Почему для каждого вида деревьев, кустарников и трав есть свой характерный (типичный) размер?

Обозначим через x высоту дерева. С течением времени t дерево растет; т. е. его высота есть функция времени: $x = x(t)$. Чтобы найти ее, составим дифференциальное уравнение, исходя из следующих соображений:

1) объем дерева увеличивается как ax^3;

2) площадь поверхности листьев увеличивается как bx^2;

3) энергию дерево получает только за счет фотосинтеза; т. е. пропорционально поверхности листьев, или как cx^2;

4) полученная энергия расходуется на: а) затраты энергии на фотосинтез hx^2 (причем $h < c$); б) увеличение объема $r(x^3)'$ (чем быстрее растет, тем больше энергии надо, поэтому взята производная); в) перенос веществ из почвы по всему объему px^4 (весь объем ax^3 и по всему объему надо равномерно распределить вещество, поднимая его на высоту x).

Приравнивая полученную и израсходованную энергию, будем иметь уравнения: $cx^2 = hx^2 + r(x^3)' + px^4$, $cx^2 = hx^2 + 3rx^2x' + px^4$, $c = h + 3rx' + px^2$, $x' = \lambda(\omega^2 - x^2)$ (так как все коэффициенты положительны и $c > h$, то $\lambda = \dfrac{p}{3r} > 0$ и можно положить $\dfrac{c-h}{p} = \omega^2$, $\omega > 0$).

Получилось дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными; его решение $\int \frac{dx}{\lambda(\omega^2 - x^2)} = \int dt$, откуда $t = \frac{1}{2\lambda\omega} \ln\left|\frac{\omega + x}{\omega - x}\right| + C$. Поскольку рост дерева начинается с нуля; т. е. $x = 0$ при $t = 0$, то, подставив эти значения в решение, находим, что $C = 0$. Итак, $t = \frac{1}{2\lambda\omega} \ln\left|\frac{\omega + x}{\omega - x}\right|$.

Как и в пункте 1.2, не будем находить $x(t)$, а сразу построим график. При этом надо иметь в виду, что при $0 < x < \omega$ производная $x' > 0$ (что видно из дифференциального уравнения) и поэтому функция $x(t)$ возрастает. При $x = \omega$ функция не определена и прямая $x = \omega$ есть асимптота (см. рис. 2). Из этого рисунка видно, что функция $x(t)$ имеет горизонтальную асимптоту, $x(t) < \omega$ при любом t, и ω определяется коэффициентами c, h, r и p, которые характеризуют данную породу дерева.

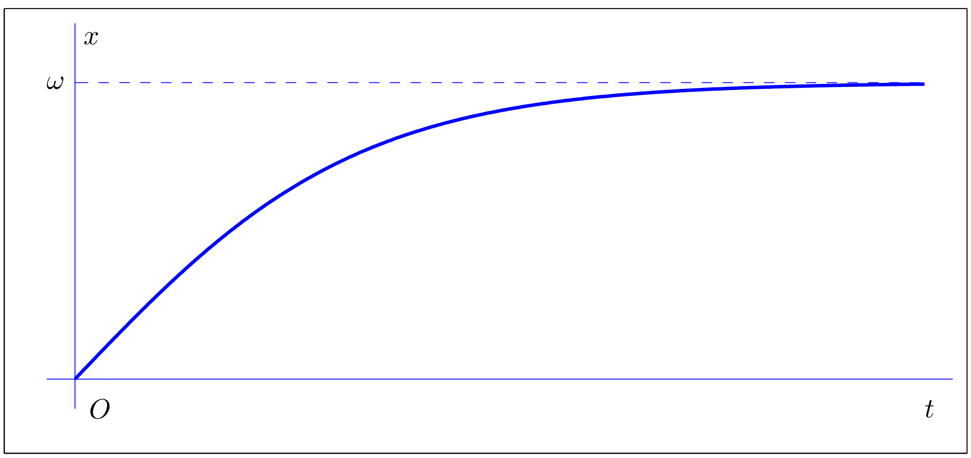

Рис. 2.

§2. Уравнение химической реакции

Рассмотрим химический процесс, состоящий в превращении взаимодействующих веществ A, B, … в вещества M, N, …. Для оценки количества вещества, участвующего в реакции, его выражают в грамм-молекулах или *молях. Молем какого-либо вещества называется такое его весовое количество, которое выражается в граммах числом, равным его молекулярному весу.* В моле любого вещества всегда содержится одно и то же количество молекул, независимо от вещества.

Если *предположить* (первое условие для рассматриваемой нами модели процесса), что во взаимодействие вступают на каждую молекулу одного вещества по одной молекуле другого, то на каждый моль одного придется один моль другого. По истечении времени t от начала реакции от каждого из взаимодействующих веществ вступит в реакцию одно и то же количество x молей. *Скорость возрастания x относительно времени t*; т. е. производная $\frac{dx}{dt}$, называется *скоростью химической реакции.*

Пусть в процессе участвуют два вещества (простейшая модель) A и B, первоначальное количество которых (в молях) обозначим через a и b (при этом, пусть, скажем, $b > a$). Через промежуток времени t будем иметь количество $a - x$ вещества A и количество $b - x$ вещества B. *Естественно допустить* (второе условие для модели), что *скорость* химической реакции в момент t *пропорциональна произведению* реагирующих масс; т. е. произведению количеству реагентов, не подвергшихся еще превращению. Это приводит к такому дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x) \text{ или } \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = kdt, \quad k > 0.$$

Интегрируя, получим

$$\int k\,dt = \int \frac{dx}{(a-x)(b-x)}, \quad \int k\,dt = kt + C_1, \quad \int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} =$$
$$= \int \frac{1}{b-a}\Big[\frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x}\Big]\,dx = \frac{1}{b-a}\int \frac{dx}{a-x} - \frac{1}{b-a}\int\frac{dx}{b-x} =$$
$$= -\frac{1}{b-a}\int \frac{d(a-x)}{a-x} + \frac{1}{b-a}\int\frac{d(b-x)}{b-x} = -\frac{1}{b-a}\ln(a-x) + \frac{1}{b-a}\ln(b-x) + C_2,$$

откуда

$$\frac{1}{b-a}\ln\frac{a-x}{b-x} = -kt + C. \tag{7}$$

Так как при $t = 0$ мы должны иметь $x = 0$, то $C = \frac{1}{b-a}\ln\frac{a}{b}$. Подставляя это значение C в формулу (7), получим

$$\ln\frac{(a-x)b}{(b-x)a} = -k(b-a)t, \quad b-a > 0, \quad k > 0,$$

откуда легко находим, что

$$x = ab\frac{1-e^{-k(b-a)t}}{b-ae^{-k(b-a)t}}. \tag{8}$$

При возрастании t ($t \to +\infty$) показательное выражение в (8) стремится к нулю, и x стремится к a; через конечный промежуток времени выражение становится настолько малым, что x практически уже не отличить от a, и реакция заканчивается.

§3. Зеркало для прожектора

3.1. Покажем, что зеркало для прожектора можно брать в виде поверхности, получающейся при вращении параболы $y = ax^2$ вокруг оси Oy. При этом точечный источник света надо поместить в точке $F\big(0, \frac{1}{4a}\big)$, называемой *фокусом параболы*.

К параболе $y = ax^2$ $(a > 0)$ в произвольной точке M проведем касательную MT, возьмем точку $F\big(0, \frac{1}{4a}\big)$ (см. рис. 3) и докажем, что из равенства $\angle FMP = \angle NMT$ следует, что $MN \parallel Oy$.

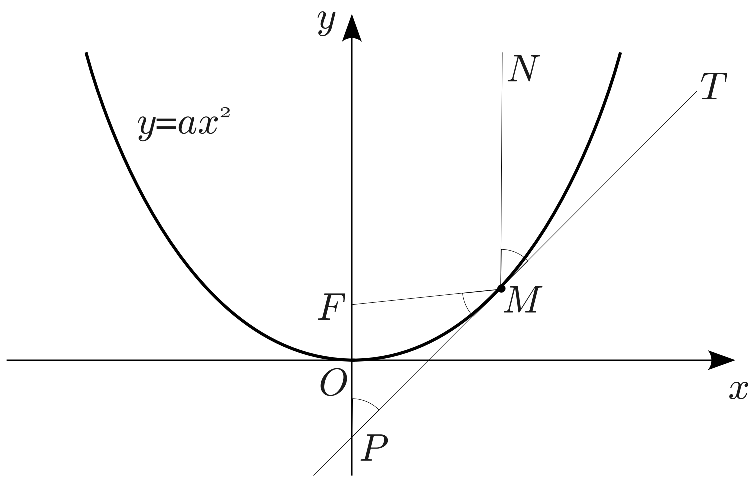

Рис. 3.

◁ Точка $M(x_M, y_M)$ лежит на параболе и поэтому $y_M = ax_M^2$. Напишем уравнение касательной MT: $y - y_M = 2ax_M(x - x_M)$ или $y = 2ax_M x - y_M$. Следовательно, ордината точки P равна $-y_M$ и $FP = y_M + \frac{1}{4a}$. Покажем, что $FP = FM$, т. е. что $\triangle FPM$ — равнобедренный. Действительно,

$$FM = \sqrt{x_M^2 + \left(y_M - \frac{1}{4a}\right)^2} = \sqrt{\frac{y_M}{a} + y_M^2 - \frac{y_M}{2a} + \left(\frac{1}{4a}\right)^2} = \\ = \sqrt{y_M^2 + \frac{y_M}{2a} + \left(\frac{1}{4a}\right)^2} = y_M + \frac{1}{4a}.$$

Но тогда $\angle FPM = \angle FMP$ (углы при основании равнобедренного треугольника равны) и $\angle NMT = \angle FMP$ по условию. Следовательно, $\angle NMT = \angle FPM$, и поэтому $MN \parallel Oy$, так как равны соответствующие углы. ▷

3.2. Какого вида может быть зеркало у прожектора?

В пункте 3.1 показано, что зеркало у прожектора может быть поверхность, полученная при вращении параболы вокруг ее оси симметрии. Точечный источник света при этом надо поместить в фокусе параболы — тогда отраженные лучи пойдут параллельно оси симметрии. Покажем, что *только парабола годится для получения зеркала прожектора (как поверхность вращения)*.

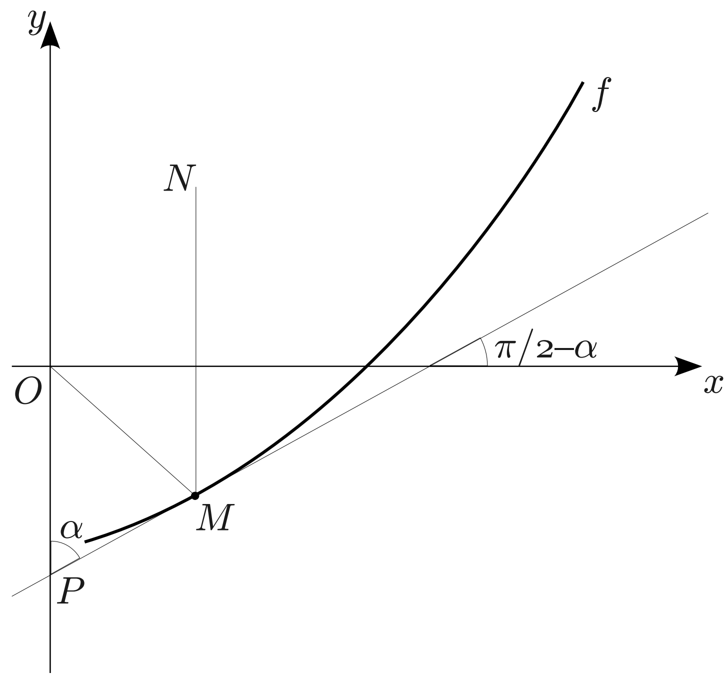

Рис. 4.

$\lhd$ Итак, ищется такая функция $f(x)$ при $x > 0$, чтобы при вращении ее графика вокруг оси ординат получилось зеркало прожектора, у которого точечный источник света находится в начале координат, точке O. Для этого необходимо и достаточно, чтобы в любой точке $M(x, f(x))$ графика функции f выполнялись следующие условия (см. рис. 4): $\angle OMP = \angle NMT$ и $MN \parallel Oy$. Тогда $\alpha = \angle OPM = \angle NMT$ (как соответственные углы при параллельных) и $\angle MOy = 2\alpha$ (как внешний угол $\triangle OPM$), так что

$$y' = f'(x) = \operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{2} - \alpha\Big) = \operatorname{ctg}\alpha, \quad \operatorname{tg}\angle MOy = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{x}{y}$$

(где $y = f(x)$). Поэтому

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{y'}}{1 - \big(\frac{1}{y'}\big)^2} = \frac{2y'}{(y')^2 - 1};$$

т. е. $(y')^2 - 2\frac{y}{x}y' - 1 = 0$, откуда $y' = +\frac{y}{x} \pm \sqrt{\big(\frac{y}{x}\big)^2 + 1}$.

Если потребовать, чтобы отраженные лучи шли в положительном направлении оси ординат, то $y' > 0$ и, следовательно,

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\Big(\frac{y}{x}\Big)^2 + 1}.$$

Полагая $y = xu$, $u = u(x)$, приходим к уравнению $u + xu' = u + \sqrt{u^2 + 1}$, или $\dfrac{u'}{\sqrt{u^2+1}} = \dfrac{1}{x}$; т. е. к уравнению с разделяющимися переменными. Его решение:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln(u + \sqrt{u^2+1}) = \ln x + \ln C_1, \quad u + \sqrt{u^2+1} = C_1 x,$$

откуда

$$u - \sqrt{u^2+1} = -\frac{1}{u + \sqrt{u^2+1}} = -\frac{1}{C_1 x}$$

и

$$u = \frac{1}{2}\Big(C_1 x - \frac{1}{C_1 x}\Big), \quad u = Cx - \frac{1}{4Cx}, \quad y = Cx^2 - \frac{1}{4C}.$$

Таким образом, решением поставленной задачи является множество любых парабол $y = Cx^2 - \dfrac{1}{4C}$, $C \neq 0$ — произвольная постоянная, для которых начало координат — фокус. $\triangleright$

§4. Падение тела в сопротивляющейся среде и гиперболические функции

4.1. Падение тела в сопротивляющейся среде.
Когда тело падает в пустоте, то ускорение движения есть величина постоянная; если же падение происходит в некоторой среде, то тело испытывает сопротивление, величина которого, как установлено опытом, при больших скоростях пропорциональна квадрату скорости. Это значит, что если в момент времени t скорость равна v, то сопротивление среды равно kv^2, где $k > 0$ — некоторая постоянная. Таким образом, в момент t тело находится под действием двух сил: тяжести и сопротивления среды.

Сила тяжести равна mg, где m масса тела; сила сопротивления среды направлена в сторону, противоположную движению, и равна, как сказано, kv^2. Следовательно, результирующая этих двух сил равна $mg - kv^2$. С другой стороны, величина силы, действующей на тело, пропорциональна ускорению движения j и равна mj.

Итак, имеем равенство

$$mj = mg - kv^2. \tag{9}$$

Если длина пути, считая от начала отсчета пути, равна s, то $v = \dfrac{ds}{dt}$, и при прямолинейном движении $j = \dfrac{d^2s}{dt^2}$. Равенство (9) принимает вид $m\dfrac{d^2s}{dt^2} = mg - k\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2$ или

$$ms'' = mg - k(s')^2. \tag{10}$$

Будем решать дифференциальное уравнение (10); т. е. находить закон движения $s = s(t)$, в простейшем случае *свободного падения*, когда в начальный момент времени $t = 0$ тело находилось в начале отсчета пути $s = 0$ и стало падать с начальной скоростью, равной нулю: $s = 0$, $v = 0$ при $t = 0$.

$\triangleleft$ Так как $s' = v$, то $s'' = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{ds} \cdot \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{dv}{ds} \cdot v$ и уравнение (10) преобразуется к виду

$$m\frac{dv}{ds}v = mg - kv^2$$

или

$$\frac{mv\,dv}{mg - kv^2} = ds,$$

откуда

$$\int \frac{mv\,dv}{mg - kv^2} + C = \int ds$$

или

$$-\frac{m}{2k}\ln|mg - kv^2| + C = s. \tag{11}$$

Подставляя в уравнение (11) $s = 0$ и $v = 0$, найдем C:

$$-\frac{m}{2k}\ln mg + C = 0, \quad C = \frac{m}{2k}\ln mg.$$

Теперь имеем

$$-\frac{m}{2k}\ln|mg - kv^2| + \frac{m}{2k}\ln mg = s,$$

или

$$s = \frac{m}{2k}\ln\left|\frac{mg}{mg - kv^2}\right|.$$

Так как $v = s'$, то

$$s = \frac{m}{2k}\ln\left|\frac{mg}{mg - ks'^2}\right|,$$

и снова имеем дифференциальное уравнение первого порядка, которое перепишем в виде

$$\ln\left|\frac{mg}{mg - ks'^2}\right| = \frac{2k}{m}s.$$

Согласно уравнению (10), $mg - ks'^2 = ms''$. Так как тело падает, то $ms'' > 0$ и, следовательно, $mg - ks'^2 > 0$, $\dfrac{mg}{mg - ks'^2} > 0$, так что

$$\frac{mg}{mg - ks'^2} = \exp\left(\frac{2k}{m}s\right).$$

Тогда $\dfrac{mg-ks'^2}{mg}=\exp\Bigl(-\dfrac{2k}{m}s\Bigr)$ и

$$s'=\pm\frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{mg\Bigl[1-\exp\Bigl(-\frac{2k}{m}s\Bigr)\Bigr]}.$$

Так как s есть возрастающая функция аргумента t, то $s'>0$, и поэтому перед корнем берем знак плюс:

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\frac{mg}{k}}\sqrt{1-\exp\Bigl(-\frac{2k}{m}s\Bigr)}.$$

Разделив переменные, получим

$$\frac{ds}{\sqrt{1-\exp\Bigl(-\dfrac{2k}{m}s\Bigr)}}=\sqrt{\frac{mg}{k}}\,dt,$$

откуда

$$\int\frac{ds}{\sqrt{1-\exp\Bigl(-\dfrac{2k}{m}s\Bigr)}}=\sqrt{\frac{mg}{k}}t+C. \tag{12}$$

Для вычисления интеграла в левой части (12) положим $\exp\bigl(\frac{k}{m}s\bigr)=z$, $\frac{k}{m}\exp\bigl(\frac{k}{m}s\bigr)\,ds=dz$, $ds=\frac{m}{k}\exp\bigl(-\frac{k}{m}s\bigr)\,dz=\frac{m}{k}\,\frac{dz}{z}$, и получим

$$\int\frac{ds}{\sqrt{1-\exp\Bigl(-\dfrac{2k}{m}s\Bigr)}}=\frac{m}{k}\int\frac{dz}{z\sqrt{1-\dfrac{1}{z^2}}}=\frac{m}{k}\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}=$$

$$=\frac{m}{k}\ln(z+\sqrt{z^2-1})=\frac{m}{k}\ln\Bigl(\exp\Bigl(\frac{k}{m}s\Bigr)+\sqrt{\exp\Bigl(\frac{2k}{m}s\Bigr)-1}\Bigr).$$

Теперь, согласно (12), имеем

$$\frac{m}{k}\ln\Bigl(\exp\Bigl(\frac{k}{m}s\Bigr)+\sqrt{\exp\Bigl(\frac{2k}{m}s\Bigr)-1}\Bigr)=\sqrt{\frac{mg}{k}}t+C.$$

Подставляя сюда начальные условия: $s = 0$ при $t = 0$, найдем, что $C = 0$. Итак, решение уравнения (10) имеет вид

$$\frac{m}{k}\ln\Big(\exp\Big(\frac{k}{m}s\Big)+\sqrt{\exp\Big(\frac{2k}{m}s\Big)-1}\Big)=\sqrt{\frac{mg}{k}}t,$$

или

$$\exp\Big(\frac{k}{m}s\Big)+\sqrt{\exp\Big(\frac{2k}{m}s\Big)-1}=\exp\Big(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\Big). \tag{13}$$

Выражение (13) равносильно выражению

$$\frac{1}{\exp\Big(\frac{k}{m}s\Big)+\sqrt{\exp\Big(\frac{2k}{m}s\Big)-1}}=\exp\Big(-\sqrt{\frac{kg}{m}}t\Big)$$

или, уничтожая иррациональность в знаменателе его левой части,

$$\exp\Big(\frac{k}{m}s\Big)-\sqrt{\exp\Big(\frac{2k}{m}s\Big)-1}=\exp\Big(-\sqrt{\frac{kg}{m}}t\Big). \tag{14}$$

Складывая почленно формулы (13) и (14), получим

$$\exp\Big(\frac{k}{m}s\Big)=\frac{1}{2}\Big[\exp\Big(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\Big)+\exp\Big(-\sqrt{\frac{kg}{m}}t\Big)\Big]$$

и, окончательно,

$$s=\frac{m}{k}\ln\frac{\exp\Big(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\Big)+\exp\Big(-\sqrt{\frac{kg}{m}}t\Big)}{2}; \tag{15}$$

это и есть закон движения падающего тела.

Формулу (15) можно записать в компактном виде, если воспользоваться гиперболическими функциями, простейшие свойства которых рассмотрены в следующем пункте 4.2.

4.2. Гиперболические функции.
Гиперболическим синусом (sinus hyperbolicus или, в сокращенном обозначении, sh) и гиперболическим косинусом (cosinus hyperbolicus — ch) называют функции, определяемые формулами (см. [2])

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in (-\infty, +\infty). \tag{16}$$

Из определения (16) непосредственно следует, что функция $\operatorname{sh} x$ нечетная и $\operatorname{sh} 0 = 0$, а функция $\operatorname{ch} x$ четная и $\operatorname{ch} x \geqslant 1$, а также что $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$. Их производные

$$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x \text{ и } \operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x, \quad x \in (-\infty, +\infty) \tag{17}$$

и, следовательно, обе функции бесконечно дифференцируемы на $(-\infty, +\infty)$, функция $\operatorname{sh} x$ строго возрастает на $(-\infty, +\infty)$, а функция $\operatorname{ch} x$ строго возрастает на интервале $(0, +\infty)$ и строго убывает на $(-\infty, 0)$. Графики функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ изображены на рис. 5.

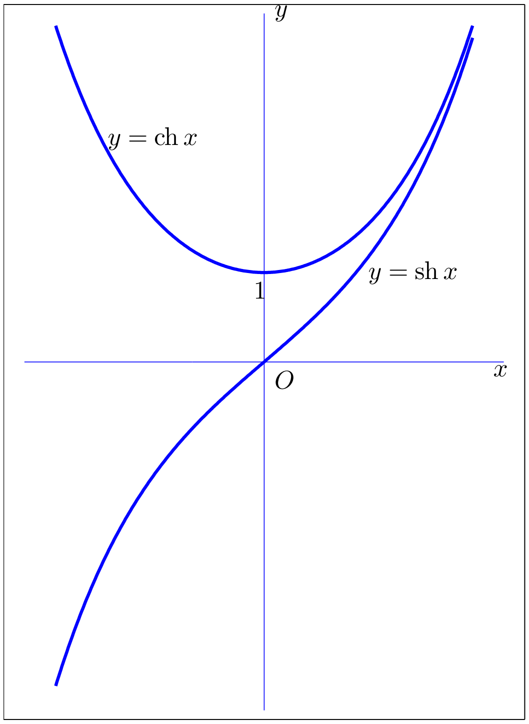

Рис. 5.

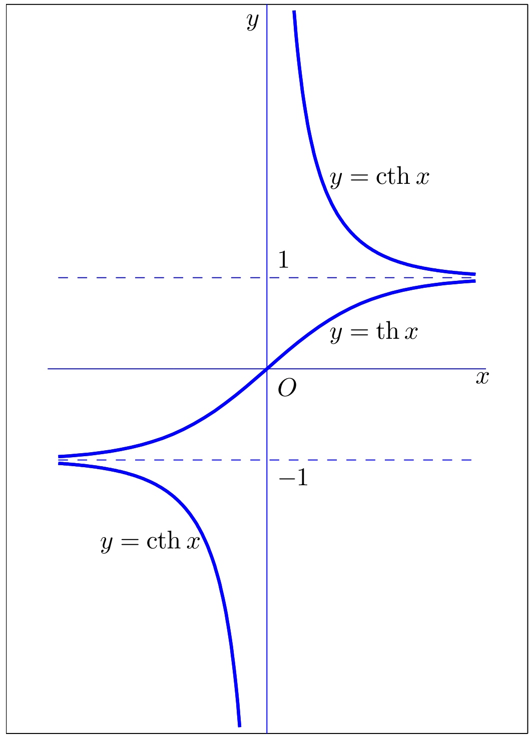

Рис. 5′.

По аналогии с тригонометрическими функциями, отношения $\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x$ и $\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{cth} x$ называют гиперболическим тангенсом и гиперболическим котангенсом (см. [2]); графики этих функций изображены на рис. 5′, и, в частности, $|\operatorname{th} x| < 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$. На этом аналогии с тригонометрическими функциями не заканчиваются. Из формулы (16) непосредственно следует гиперболическое тождество

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad x \in (-\infty, +\infty), \tag{18}$$

на основании которого и формул (17), в частности, заключаем, что производные

$$\operatorname{th}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \text{ и } \operatorname{cth}' x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \neq 0.$$

Другим следствием формул (16) и (18) служат утверждения:

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Тождество (18) объясняет название "гиперболический" для функций sh и ch. Для этого обозначим аргументы у этих функций символом φ: $\operatorname{sh}\varphi$ и $\operatorname{ch}\varphi$, $\varphi \in (-\infty, +\infty)$. Тождество (18) принимает вид

$$\operatorname{ch}^2 \varphi - \operatorname{sh}^2 \varphi = 1, \quad \varphi \in (-\infty, +\infty). \tag{18'}$$

Если ввести обозначения $x = \operatorname{ch}\varphi$ и $y = \operatorname{sh}\varphi$, то формула (18$'$) запишется в виде

$$x^2 - y^2 = 1. \tag{19}$$

Уравнение (19) задает *равностороннюю гиперболу с полуосями, равными единице*, а гиперболические функции $x = \operatorname{ch}\varphi$ и $y = \operatorname{sh}\varphi$ являются абсциссой и ординатой точек равнобочной гиперболы (19), подобно тому, как тригонометрические функции $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ можно рассматривать как координаты точек на окружности единичного радиуса (вот почему эти функции называют *круговыми*).

Более детальное изучение гиперболических функций (в частности, выяснение геометрического смысла параметра φ) требует привлечения достаточно глубоких знаний из интегрального исчисления, выходящих за формат этой статьи.

4.3. Приложения гиперболических фукнций к задаче свободного падения тела в сопротивляющейся среде.

На основании формул (16) запишем закон движения (15) падающего тела в виде

$$s = \frac{m}{k} \ln \operatorname{ch}\Big(\sqrt{\frac{kg}{m}} t\Big). \tag{20}$$

Формула (20) интересна не только своим компактным видом, но полезна и с физической точки зрения. Например, она позволяет легко показать, что *с увеличением* t *скорость движения увеличивается, оставаясь, однако, всегда меньше значения* $\sqrt{\frac{mg}{k}}$.

$\lhd$ Согласно (20) и формулам (17), скорость

$$v = s' = \frac{m}{k}\sqrt{\frac{kg}{m}}\frac{1}{\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right)} \cdot \mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\,\mathrm{th}\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right)$$

растет при $t \to +\infty$, но всегда $v < \sqrt{\frac{mg}{k}}$, так как $\mathrm{th}\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right) < 1$ для всех $t \in (0, +\infty)$. $\rhd$

Список литературы

[1] В. И. Гаврилов, Ж. Павичевич, А. В. Субботин. Некоторые приложения математического анализа к задачам естествознания I.

[2] V. I. Gavrilov, Žarko Pavićević. Matematička Analiza I.