MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (p)**
XVIII (2)(2012), 5-9 **ISSN 1986-5228 (o)**
Osnove matematike

Jedan interesantan analog faktor-skupa

MIlijana Milovanović[1] i Daniel A. Romano[2]

Pedagoški fakultet, 76300 Bijeljina, Semberskih ratara b.b., BiH

Sažetak: U tekstu se konstruiše analog faktor-skupa
Ključne riječi i fraze: relacija, homomorfizam i izomorfizam između relacija

Abstract. In this article we construct an analog of factor-set.
Key words and phrases: relation, homomorphism and isomorphism between relations

Math. Subject Class. (2010): 97E60
ZDM Subj.Class. (2010): E60

Uvod

Ako je θ relacija ekvivalencije na skup X, tada postoji prirodna surjekcija π: X $\to$ X/θ za koju vrijedi:

$$\theta = \pi^{-1} \circ \pi, \quad \pi \circ \pi^{-1} = \mathrm{Id}_{X/\theta} .$$

U ovom tekstu mi nudimo promišljanje o slijedećoj situaciji: Neka za skup X i podskup Y skupa X postoji skup D takav da postoji injekcija ι: D $\to$ X takva da vrijedi

$$\iota^{-1} \circ \iota = \mathrm{Id}_D, \ \ \iota \circ \iota^{-1} = 1_{Y\times Y} .$$

Analiza je zasnovana na konceptima izloženim u radovima Kahla ([3]) i Schmidta ([5])

Nedefinisane termine i oznake kao i osnovne osobine tih pojmova, čitalac može naći (na primjer) u knjigama [1], [2] i [4].

Prethodni pojmovi

Neka su dati skupovi X i Y. Podskup $R \subseteq X \times Y$ je *relacija* između elemenata skupa X i elemenata skupa Y. Relacije 0 (= $\varnothing$) i $1_{X\times Y}$ (= X×Y) su trivijalne relacije. Za $R \subseteq X \times Y$ i $S \subseteq Y \times Z$ relacija

$$S \circ R = \{(x,z)\in X\times Z: (\exists y\in X)((x,y)\in R \wedge (y,z)\in S\}$$

[1] e-mail: milijanamilovanovic21@gmail.com
[2] e-mail: bato49“hotmail.com

je *komponat* (*proizvod*) relacija R i S. Relacija $\{(y,x)\in Y\times X : (x,y)\in R\}$ je inverz relacije R i obilježavamo je sa R^{-1} .

Nije teško provjeriti da vrijedi

Lema 1.
(i) $0 \circ R = R \circ 0 = 0$;
(ii) $R \subseteq S \Rightarrow Q \circ R \subseteq Q \circ S$,
(ii') $R \subseteq S \Rightarrow R \circ Q \subseteq S \circ Q$;
(iii) $Q \circ (R \cap S) \subseteq Q \circ R \cap Q \circ S$, $(R \cap S) \circ Q \subseteq R \circ Q \cap S \circ Q$;
(iii') $Q \circ (R \cup S) = Q \circ R \cup Q \circ S$, $(R \cup S) \circ Q = R \circ Q \cup S \circ Q$
(iv) $(R^{-1})^{-1} = R$;
(v) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$;
(vi) $R \subseteq S \Leftrightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$;
(vii) $(R^{C})^{-1} = (R^{-1})^{C}$;
(viii) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$; $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;
(ix) $Q \circ R \cap S \subseteq (Q \cap S \circ R^{-1}) \circ (R \cap Q^{-1} \circ S)$. (Dedekindovo pravilo)

Za relaciju $R \subseteq X \times Y$ kažemo da je *univalentna* (ili, da je *parcijalna funkcija*) ako vrijedi $R \circ R^{-1} \subseteq Id_Y$. Ako za relaciju R vrijedi $Id_X \subseteq R \circ R^{-1}$ (ili, ekvivalentno, $1_{X\times Y} \subseteq 1_{Y\times Y} \circ R$) onda za R kažemo da je *totalna*. Kada R zadovoljava oba uslova, tj. kada je univalentna i totalna, tada za R kažemo da je *preslikavanje*. Za relaciju R kažemo da je *injektivna*, *surjektivna* i *bijektivna* ako je R^{-1} univalentna, totalna, ili oboje, respektivno.

Lemma 2. Neka je θ ($\subseteq X \times X$) relacija ekvivalencije na X a α i β bilo koje dvije relacije na skupu X. Vrijedi:

$$\theta \circ (\theta \circ \alpha \cap \beta) = \theta \circ \alpha \cap \theta \circ \beta = \theta \circ (\alpha \cap \theta \circ \beta).$$

Dokaz: Očigledno da vrijedi

$$\theta \circ (\theta \circ \alpha \cap \beta) \subseteq \theta \circ \theta \circ \alpha \ \wedge \ \theta \circ (\theta \circ \alpha \cap \beta) \subseteq \theta \circ \beta .$$

Odavde imamo jednu inkluziju

$$\theta \circ (\theta \circ \alpha \cap \beta) \subseteq \theta \circ \alpha \cap \theta \circ \beta .$$

Obrnuta inkluzija dokazujer se, na primjer, na slijedeći način:

$$\begin{aligned}
(a,c)\in \theta \circ \alpha \cap \theta \circ \beta &\Leftrightarrow ((a,c)\in \theta \circ \alpha \ \wedge (a,c)\in \theta \circ \beta) \\
&\Leftrightarrow (\exists b')((a,b')\in\alpha \ \wedge (b',c)\in\theta) \wedge (\exists b'')((a,b'')\in\alpha \ \wedge (b'',c)\in\theta)) \\
&\Rightarrow (\exists b')(\exists b'')((a,b')\in\alpha \wedge (a,b'')\in\beta \wedge (b'.c)\in\theta \wedge (c,b'')\in\theta) \\
&\Rightarrow (\exists b')(\exists b'')((a,b')\in\alpha \wedge (b',b'')\in\theta \circ \theta \subseteq \theta \wedge (a,b'')\in\beta \wedge (b'',c)\in\theta) \\
&\Rightarrow (\exists b'')((a,b'')\in\theta \circ \alpha \wedge (a,b'')\in\beta \wedge (b'',c)\in\theta) \\
&\Rightarrow (\exists b'')((a,b'')\in\theta \circ \alpha \cap \beta \wedge (b'',c)\in\theta) \\
&\Rightarrow (a,c)\in \theta \circ (\theta \circ \alpha \cap \beta).
\end{aligned}$$

Jednakost $\theta \circ \alpha \cap \theta \circ \beta = \theta \circ (\alpha \cap \theta \circ \beta)$ se dokazuje na isti način. □

Homomorzimam između relacija

Definicija. ([5]) Neka su $R \subseteq X \times Y$ i $S \subseteq X \times Y$ zadane relacije. Za par (Φ, Ψ) preslikavanja $\Phi: X \to X$ i $\Psi: Y \to Y$ kažemo da je *homomorfizam od* R *prema* S ako vrijedi

$$\Psi \circ R \subseteq S \circ \Phi.$$

Definicija. ([5]) Neka su R i S kao u prethodnoj definiciji i neka je (Φ, Ψ) homomorfizam između relacije R i relacije S. Za (Φ, Ψ) kažemo da je *izomorfizam* između R i S ako i samo ako je (Ψ^{-1}, Φ^{-1}) homomorfizam od relacije S prema relaciji R.

Sledeća tvrdnja će nam omogućiti da identifikujemo jednu vrstu izomorfizma.

Lemma 3. Neka za relacije $R \subseteq X \times Y$ i $S \subseteq X \times Y$ i homomorfizam (Φ, Ψ) vrijedi:
(1) Φ i Ψ su bijekcije; i
(2) $\Psi \circ R = S \circ \Phi$.
Tada, par (Φ, Ψ) je izomorfizam.
Dokaz: Treba dokazati da vrijedi $\Psi^{-1} \circ S \subseteq R \circ \Phi^{-1}$. Imamo:

$$\begin{aligned}\Psi^{-1} \circ S &= \Psi^{-1} \circ S \circ Id_Y = \Psi^{-1} \circ S \circ (\Phi \circ \Phi^{-1}) = \Psi^{-1} \circ (S \circ \Phi) \circ \Phi^{-1}\\ &= \Psi^{-1} \circ (\Psi \circ R) \circ \Phi^{-1} = (\Psi^{-1} \circ \Psi) \circ (R \circ \Phi^{-1})\\ &= Id_Y \circ (R \circ \Phi^{-1}) = (Id_Y \circ R) \circ \Phi^{-1} = R \circ \Phi^{-1}. \quad \square\end{aligned}$$

Factor-skup i njegov analog

Teorem 1 (Faktorski skup)**.** *Za dati skup* X, *na njemu zadana relacija ekvivalencije* θ *determiniše faktor-skup* X/θ *i prirodnu projekciju* $\pi: X \to X/\theta$ *koja zadovoljava slijedeće dvije jednakosti:*

$$\theta = \pi^{-1} \circ \pi, \quad \pi \circ \pi^{-1} = Id_{X/\theta}.$$

Prirodnia projekcija π *je određena jednoznačno do izomorfizma*.
Dokaz: Prvi dio tvrdnje je opšte poznat.

Dokazaćemo samo drugi dio tvrdnje, o jednoznačnoj određenosti surjekcije π. Uzmimo da pored surjekcije $\pi : X \to X/\theta$ postoji i surjekcija $\pi_1 : X \to X/\theta$ takva da je $\theta = \pi_1^{-1} \circ \pi_1$ and $\pi_1 \circ \pi_1^{-1} = Id_{X/\theta}$. Stavimo da je $\Phi = \pi_1 \circ \pi^{-1}$ ($\subseteq X/\theta \times X/\theta$). Imamo:

$$\begin{aligned}\Phi \circ \Phi^{-1} &= (\pi_1 \circ \pi^{-1})\circ(\pi_1 \circ \pi^{-1})^{-1} && \text{(prema definiciji } \Phi)\\ &= (\pi_1 \circ \pi^{-1})\circ(\pi \circ \pi_1^{-1})\\ &= \pi_1 \circ (\pi^{-1} \circ \pi) \circ \pi_1^{-1} && \text{(prema asocijativnosti operacije '}\circ\text{')}\\ &= \pi_1 \circ \theta \circ \pi_1^{-1} && \text{(budući da je } \theta = \pi^{-1} \circ \pi)\\ &= \pi_1 \circ (\pi_1^{-1} \circ \pi_1) \circ \pi_1^{-1} && \text{(vudući da je } \theta = \pi_1^{-1} \circ \pi_1)\\ &= (\pi_1 \circ \pi_1^{-1}) \circ (\pi_1 \circ \pi_1^{-1}) && \text{(prema asocijativnosti operacije '}\circ\text{')}\end{aligned}$$

$= \mathrm{Id}_{X/\theta} \circ \mathrm{Id}_{X/\theta}$ (budući da je $\pi_1 \circ \pi_1^{-1} = \mathrm{Id}_{X/\theta}$)

$= \mathrm{Id}_{X/\theta}$ (budući da je $\mathrm{Id}_{X/\theta} \circ \mathrm{Id}_{X/\theta} = \mathrm{Id}_{X/\theta}$).

Analogno se pokazuje da je $\Phi^{-1} \circ \Phi = \mathrm{Id}_{X/\theta}$. Prema tome, par $(\mathrm{Id}_{X/\theta}, \Phi)$ je jedan izomorfizam između π i π_1 u skladu sa prethodnom lemom. Zaista, imamo:

$$\Phi \circ \pi = (\pi_1 \circ \pi^{-1}) \circ \pi = \pi_1 \circ (\pi^{-1} \circ \pi) = \pi_1 \circ \theta = \pi_1 \circ (\pi_1^{-1} \circ \pi_1) =$$
$$(\pi_1 \circ \pi_1^{-1}) \circ \pi_1 = \mathrm{Id}_{X/\theta} \circ \pi_1 = \pi_1 .$$
□

Neka za skup X i podskup Y skupa X postoji skup D takav da postoji injekcija $\iota: D \to X$ takva da vrijedi

(*) $$\iota^{-1} \circ \iota = \mathrm{Id}_D, \ \iota \circ \iota^{-1} = 1_{Y\times Y} .$$

Sad sebi postavljamo slijedeći zadatak: Procijeniti vezu između skupa D i injekcije $\iota: D \to X$

Teorem 2. (Analog faktor-skupa). *Neka za zadani podskup* Y *skupa* X *i skup* D *postoji injekcija* $\iota: D \to X$ *takva da vrijedi jedankosti* (*). *Prirodna injekcija* $\iota: D \to X$ *jednoznačno je određena do izomorfiozma*.

Obrnuto, neka za zadani podskup Y *skupa* X *i skup* D *za koji postoji postoji injekcija* $\iota: D \to X$ *takva da vrijede jedankosti* (*). *Skup* D *je jednoznačno određen do bijekcije.*

Dokaz: Pretpostavimo da takav skup D sa injekcijom $\iota: D \to X$ koji zadovoljava uslove (*) postoji i neka, osim toga, postoji injekcija $\iota_1: D \to X$ koja također zadovoljava uslove (*)

$$\iota_1^{-1} \circ \iota_1 = \mathrm{Id}_D, \ \iota_1 \circ \iota_1^{-1} = 1_{Y\times Y} .$$

Ako stavimo $\Phi = \iota_1^{-1} \circ \iota$, imamo:

$$\Phi \circ \Phi^{-1} = (\iota_1^{-1} \circ \iota) \circ (\iota_1^{-1} \circ \iota)^{-1} = (\iota_1^{-1} \circ \iota) \circ (\iota^{-1} \circ \iota_1) = \iota_1^{-1} \circ (\iota \circ \iota^{-1}) \circ \iota_1$$
$$= \iota_1^{-1} \circ 1_{Y\times Y} \circ \iota_1 = \iota_1^{-1} \circ (\iota_1 \circ \iota_1^{-1}) \circ \iota_1 = (\iota_1^{-1} \circ \iota_1) \circ (\iota_1^{-1} \circ \iota_1)$$
$$= \mathrm{Id}_D \circ \mathrm{Id}_D = \mathrm{Id}_D .$$

Analogno se pokazuje da je $\Phi^{-1} \circ \Phi = \mathrm{Id}_D$. Sem toga, par (Φ, Id) zadovoljava i uslov (2) Lemme 3:

$$\mathrm{Id}_X \circ \iota = \iota = \iota \circ \mathrm{Id}_D = \iota \circ (\iota^{-1} \circ \iota) = (\iota \circ \iota^{-1}) \circ \iota = 1_{Y\times Y} \circ \iota =$$
$$(\iota_1 \circ \iota_1^{-1}) \circ \iota = \iota_1 \circ (\iota_1^{-1} \circ \iota) = \iota_1 \circ \Phi.$$

Dakle, injekcija ι je jednoznačno određena do izomorfizma.

Neka sada, osim skupa D i injekcije $\iota: D \to X$ sa svojstvima (*) postoji i skup D' i injekcija $j: D' \to X$ sa osobinama

$$j^{-1} \circ j = \mathrm{Id}_{D'}, \ j \circ j^{-1} = 1_{Y\times Y}.$$

Procijenimo $u = j^{-1} \circ \iota$. Imamo:

$$u \circ u^{-1} = (j^{-1} \circ \iota) \circ (j^{-1} \circ \iota)^{-1} = (j^{-1} \circ \iota) \circ (\iota^{-1} \circ j) = j^{-1} \circ (\iota \circ \iota^{-1}) \circ j$$
$$= j^{-1} \circ 1_{Y\times Y} \circ j^{-1} = j^{-1} \circ (j \circ j^{-1}) \circ j = (j^{-1} \circ j) \circ (j^{-1} \circ j)$$
$$= \mathrm{Id}_{D'} \circ \mathrm{Id}_{D'} = \mathrm{Id}_{D'} .$$

Analogno se pokazuje da je $u^{-1} \circ u = \mathrm{Id}_D$. Prema tome, u je bijekcija. Dakle, skup D je jednoznačno određen do bijekcije. □

Literatura:

[1] Stanley Burris and H. P. Sankappanavar: *A Course in Universal Algebra*; © S. Burris and H.P. Sankappanavar, 2000.

[2] G.Gratzer: *Universal Algebra*, 2nd Ed. Springer-Verlag, 1978

[3] W.Kahl: *A Relation-Algebraic Approach to Graph Structure Transformation*. Technical Report 2002/03, Fakultat fur Informatik, Universitat der Bundeswehr Munchen, 2002. http://ist.unibw-muenchen.de/Publications/TR/2002-03/.

[4] D.A.Romano: *Osnove matematike, Drugi dio: Teorija skupova – Knjiga 1: Naivna teorija skupova;* MAT-KOL (Banja Luka), XII (2) (2006), A5, 1-122 pp.

[5] Gunther Schmidt: *Homomorphism and Isomorphism Theorems Generalized from a Relational Perspective*; In: R.A.Shmidr (Ed.) *Relations and Kleene Algebra in Computer Science*; LNCS, 4136, Springer – Verlag, Berlin, Heidelberg 2006, 228-342

(Primljeno u redakciju 05.12.2012. Revidirana verzija 31.01.2012. Dostupno na internetu od 02.02.2012)