MAT-KOL (Banja Luka) ISSN 0354-6969 (p)
XVIII (2)(2012), 11-17 ISSN 1986-5228 (o)

JOŠ PET RAZNIH NAČINA IZRAČUNAVANJA $tg\frac{5\pi}{24}$

(Yet five different manners of calculation of $tg\frac{5\pi}{24}$)

Šefket Arslanagić[1] i Dragoljub Milošević[2]

Sažetak: U radu [1] je dato devet raznih načina izračunavanja tangensa ugla od $\frac{5\pi}{24}$ (ili $\frac{1}{2}\cdot 75^0 = 37^0 30'$), a u ovom radu je dato još pet raznih načina izračunavanja $tg\frac{5\pi}{24}$.

Ključne riječi: ugao, tangens ugla, tangens zbira, jednakokraki trougao, pravougli trougao, jednakostranični trougao, Pitagorina teorema, kosinusna teorema, romb, deltoid, Molvajdove formule.

Abstract: In paper [1] we give nine different manners of calculation of $tg\frac{5\pi}{24}$ (or $\frac{1}{2}\cdot 75^0 = 37^0 30'$) and in this paper we give yet five different manners of calculation of $tg\frac{5\pi}{24}$.

Key words: angle, tangent of angle, tangent of sum, isosceles triangle, right triangle, equilateral triangle, Pythagoras theorem, law of cosines, rhombus, deltoid, Mollweides formulas.

AMS Subject Classification (2010): **51M94, 97G40**
ZDM Subject Classification (2010): **G40**

U radu [1] smo dali devet raznih načina izračunavanja tangensa ugla od $\frac{5\pi}{24}$ (ili $37^0 30'$), tj. $tg\frac{5\pi}{24}$ koristeći razne činjenice iz algebre, geometrije i trigonometrije. Rukovodeći se činjenicom da je izuzetno važno riješiti jedan matematički zadatak na

1) Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu, Odsjek za matematiku, Zmaja do Bosne 35, 71000 Sarajevo, BiH; e-mail:asefket@pmf.unsa.ba
2) 17. NOU divizije 43, 32300 Gornji Milanovac, Srbija; e-mail: dramil47@gmail.com

dva ili više načina, mi smo u našem istraživanju otišli korak dalje te našli još pet raznih načina rješavanja ovog zadatka. Sigurno je da će i ovaj rad kao i onaj prethodni biti od velike koristi učenicima i studentima koji pokazuju veći interes za matematiku kao i nastavnicima koji rade sa ovim učenicma i studentima.

Evo tih novih pet rješenja.

Rješenje 1. Korištenjem formule za tangens zbira $tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$ i činjenice $\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{3}$ dobijamo:

$$tg\frac{\pi}{3}=tg\left(\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{tg\frac{5\pi}{24}+tg\frac{\pi}{8}}{1-tg\frac{5\pi}{24}tg\frac{\pi}{8}},$$

odakle, zbog $tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ i $tg\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-cos\frac{\pi}{4}}{1+cos\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2}-1$, slijedi:

$$\sqrt{3}=\frac{tg\frac{5\pi}{24}+\sqrt{2}-1}{1-\left(\sqrt{2}-1\right)tg\frac{5\pi}{24}},$$

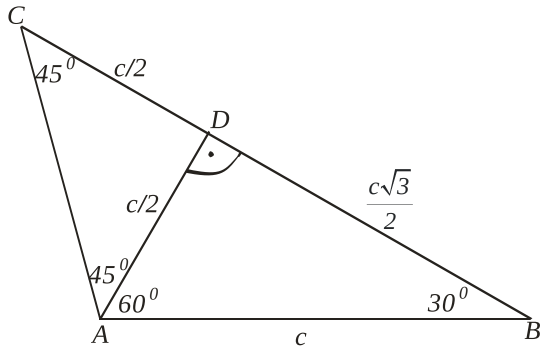
odnosno

$$tg\frac{5\pi}{24}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}+1}.$$

Kako je $\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2\right)=\sqrt{3}-\sqrt{2}+1$, iz posljednje jednakosti dobijamo da je:

$$tg\frac{5\pi}{24}=\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2.$$

Rješenje 2: Neka je u trouglu ΔABC (sl.1): $\alpha=105^0$, $\beta=30^0$ i $\gamma=45^0$. Na stranici BC odredimo tačku D tako da bude ∠CAD = 45°. Tada je trougao ΔADC jednakokraki i pravougli, a trougao ΔABD čini polovinu jednakostraničnog trougla stranice c. Zbog toga je $\overline{AD}=\overline{CD}$ i $\overline{AD}=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{c}{2}$.



sl.1

Primjenom Pitagorine teoreme na pravougle trouglove ΔABD i ΔADC, imamo: $b=\overline{AC}=\frac{c\sqrt{2}}{2}$ i $\overline{BD}=\frac{c\sqrt{3}}{2}$, pa je $a=\overline{BC}=\frac{c}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Sada koristimo Molvajdove formule:

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \quad \text{i} \quad \frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Dijeljenjem ovih jednakosti, zbog $\gamma=180^0-(\alpha+\beta)$ i $ctg\left(90^0-x\right)=tgx$, dobijamo:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{tg\frac{\alpha-\beta}{2}}{ctg\frac{\gamma}{2}}=\frac{tg\frac{\alpha-\beta}{2}}{ctg\left(90^0-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\frac{tg\frac{\alpha-\beta}{2}}{tg\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

tj.

$$tg\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}tg\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Kako je $a=\frac{c}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$, $b=\frac{c\sqrt{2}}{2}$, $\alpha=105^0$ i $\beta=30^0$, imamo

$$tg\frac{105^0-30^0}{2}=\frac{\frac{c}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)-\frac{c\sqrt{2}}{2}}{\frac{c}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)+\frac{c\sqrt{2}}{2}}tg\frac{105^0+30^0}{2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}tg\frac{135^0}{2}.$$

Odavde, zbog

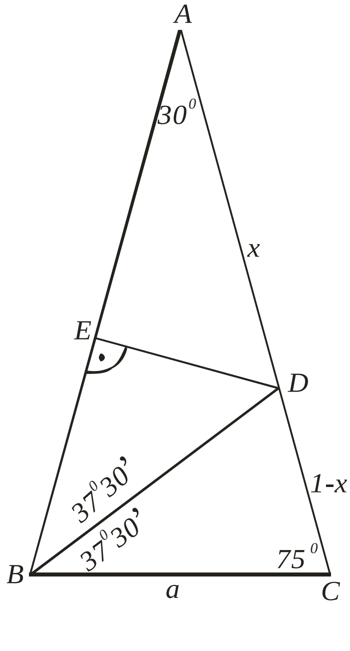
$$tg\frac{135^0}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 135^0}{1+\cos 135^0}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1,$$ slijedi

$$rg\frac{5\pi}{24}=tg37^0 30'=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$$, tj.

$$rg\frac{5\pi}{24}=\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2.$$

Rješenje 3. Nacrtajmo jednakokraki trougao ΔABC kod koga je $\overline{AB}=\overline{AC}=1$ i $\measuredangle BAC=30^0$ (sl.2). Konstruišimo simetralu ugla $\angle$ABC = 75° a njen presjek sa AC neka je tačka D. Uvedimo oznake $\overline{BC}=a$ i $\overline{AD}=x$. Na osnovu teoreme o simetrali unutrašnjeg ugla trougla možemo pisati $\overline{AD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{BC}$, ili $x:(1-x)=1:a$. Odavde dobijamo $x=\frac{1}{a+1}$. Podnožje (nožište) normale iz tačke d na stranicu AB obilježimo sa E. U pravouglom trouglu ΔAED je $\overline{AD}=x=\frac{1}{a+1}$ i $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{AD}$, pa je $\overline{DE}=\frac{1}{2(a+1)}$.

Primjenom Pitagorine teoreme na taj trougao dobijamo:



slika 2.

$$\overline{AE}^2=\left(\frac{1}{a+1}\right)^2-\left(\frac{1}{2(a+1)}\right)^2$$, tj. $\overline{AE}=\frac{\sqrt{3}}{2(a+1)}$. Zbog toga je $\overline{BE}=\overline{AB}-\overline{AE}=1-\frac{\sqrt{3}}{2(a+1)^2}$, odnosno

$$\overline{BE}=\frac{2a+2-\sqrt{3}}{2(a+1)}.$$

Na osnovu sinusne teoreme primjenjene na trougao ΔABC dobijamo $\frac{a}{\sin 30^0}=\frac{1}{\sin 75^0}$.

Odavde, zbog:

$$\sin 75^0=\sin\left(90^0-15^0\right)=\cos 15^0$$

i

$$\cos 15^0=\sqrt{\frac{1+\cos 30^0}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right),$$

proizilazi

$$a=\frac{\sin 30^0}{\cos 15^0}=\frac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\text{, tj. } a=\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right).$$

U pravouglom trouglu ΔBDE je:

$$tg37^0 30'=tg\frac{5\pi}{24}=\frac{\overline{DE}}{\overline{BE}}=\frac{1}{2a+2-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}}.$$

Odavde, zbog:

$$\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2\right)=1$$

slijedi

$$tg\frac{5\pi}{24}=\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2.$$

Rješenje 4. Neka je četverougao $ABCD$ romb stranice 1 i oštrog ugla od 75^0 (sl.3). Označimo dužine njegovih dijagonala AC i BD redom sa $2x$ i $2y$. Na osnovu kosinusne teoreme primjenjene na jednakokraki trougao ΔABC imamo

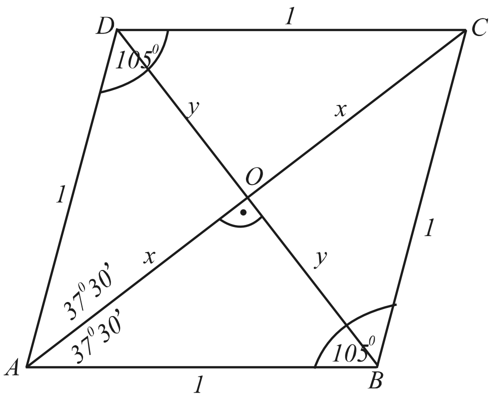
$$(2x)^2=1^2+1^2-2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos 105^0,$$

odakle, zbog

$$\cos 105^0=\cos\left(90^0+15^0\right)=-\sin 15^0=-\sqrt{\frac{1-\cos 30^0}{2}}=-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}=-\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right),$$

slijedi

$$x^2=\frac{1}{8}\left(4+\sqrt{6}-\sqrt{2}\right).$$



slika 3.

Primjenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao ΔABO (O - tačka presjeka dijagonala), dobijamo $y^2 = 1 - x^2$, tj.:

$$y^2 = 1^2 - \frac{1}{8}\left(4 + \sqrt{6} - \sqrt{2}\right), \text{ tj.}$$

$$y^2 = \frac{1}{8}\left(4 - \sqrt{6} + \sqrt{2}\right).$$

Kako je

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{4 - \sqrt{6} + \sqrt{2}}{4 + \sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{4 - \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)}{4 + \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)} \cdot \frac{4 - \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)}{4 - \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)} = \frac{6 - \sqrt{3} - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{2 + \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{6 - \sqrt{3} - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = 15 + 10\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 6\sqrt{6} = \left(\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2\right)^2, \text{ tj.}$$

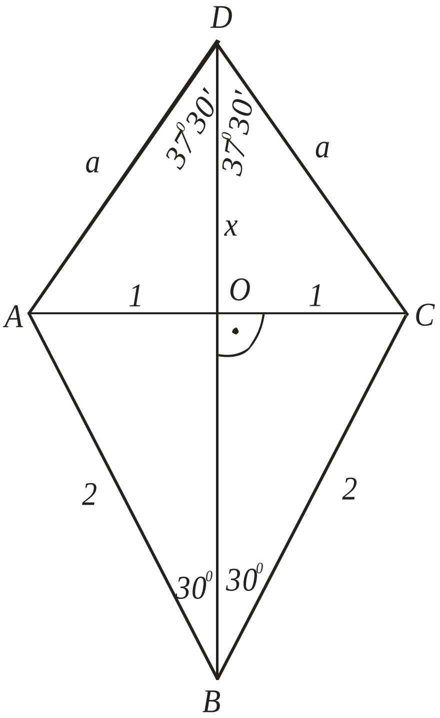
$$\frac{y}{x} = \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2,$$

te konačno dobijamo

$$tg\,37^0 30' = tg\,\frac{5\pi}{24} = \frac{y}{x} = \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2.$$

Rješenje 5. Dat je deltoid $ABCD$: $\overline{AB} = \overline{BC} = 2$, $\measuredangle ADC = 75^0$ i $\measuredangle ABC = 60^0$ (sl.4). Neka je $\overline{AD} = \overline{DC} = a$ i $\overline{DO} = x$ (O - tačka presjeka dijagonala). Kako je $\measuredangle ABO = 30^0$, u pravouglom trouglu ΔABO je $\overline{AO} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 1$ pa je $\overline{AC} = 2$. Na osnovu kosinusne teoreme primjenjene na jednakokraki trougao ΔACD možemo pisati $2^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos 75^0$, a odavde, zbog $\cos 75^0 = \cos\left(90^0 - 15^0\right) = \sin 15^0$ i $\sin 15^0 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$ (vidjeti prethodno rješenje), slijedi:

$$a^2 = \frac{8}{4 - \sqrt{6} + \sqrt{2}}.$$



Slika 4

Primjenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao ΔAOD imamo:

$$\overline{OD}^2 = x^2 = \frac{8}{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}} - 1, \text{ tj.}$$

$$x^2 = \frac{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}.$$

Konačno, iz trougla ΔAOD dobijamo:

$$tg37^0 30' = tg\frac{5\pi}{24} = \frac{1}{x} = \sqrt{\frac{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}} = \sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2.$$

Zaključak

Vidimo da se za prvo rješenje zadatka koristi standardna formula za tangens zbira. U preostala četiri koriste se znanja iz geometrije i trigonometrije (jednakokraki, pravougli i jednakostranični trougao, Pitagorina teorema, romb, deltoid, kosinusna teorema i Molvajdove formule.) Biće nam drago ukoliko neko od čitalaca ovog članka pronađe makar još jedno rješenje ovog zadatka ili pak da ih ovaj članak inspiriše da riješe neki drugi zadatak na više načina.

LITERATURA

[1] Arslanagić, Š., Milošević, D, *Devet raznih načina izračunavanja* $tg\frac{5\pi}{24}$, MAT-KOL (Banja Luka), XVII (2) (2011), 9-16.
[2] Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
[3] Kurnik, Z., *Posebne metode rješavanja matematičkih problema*, Element, Zagreb, 2010.
[4] Mintaković, S., Franić,S.M., *Trigonometrija*, Element, Zagreb, 1999.
[5] Polya, G., *Matematičko otkriće*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2003.

Primljeno u redakciju 20.02.2012. Dostupno na internetu od 24.02.2012.