MAT-KOL (Banja Luka)
ISSN 0354-6969 (p), ISSN 1986-5228 (o)
Vol. XVIII (1)(2012), 17-23

Interesantna primjena Mellinove transformacije

Samra Pirić[1], **Sanela Halilović** [2]

Sažetak. U radu je pokazano kako Mellinova transformacija vakuum stanja adeličkog harmonijskog oscilatora vodi do poznate funkcionalne jednačine za Riemannovu zeta funkciju.

Ključne riječi i fraze: Mellinova transformacija, adelički harmonijski oscilator, vakuum stanje.

Abstract In this paper is shown how Mellin transform of vacuum state of the adelic harmonic oscillator leads to the well-known functional equation for the Riemann zeta-function.

AMS Mathematics Subject Classification (2010): 11F85, 11R56, 42A38

ZDM Subject Classification (2010): I70

Key words and phrases: Mellin transform, adelic harmonic oscillator, vacuum state

1 Uvod

Poznato je da matematički modeli fizičkih fenomena preferiraju kompletiranja polja racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ u odnosu na samo polje $\mathbb{Q}$. Kako se kompletiranjem polja racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ u odnosu na apsolutnu vrijednost dobiva polje realnih brojeva $\mathbb{R}$, analogno kompletiranjem $\mathbb{Q}$ u odnosu na p-adsku normu dobivamo polje p-adskih brojeva $\mathbb{Q}_p$, za svaki prost broj p.[3] Prema Ostrowskom osim $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}_p$, za svaki prost broj p, i ne postoje druga kompletiranja $\mathbb{Q}$.

Definition 1.1 *Neka je p prost broj. $p-$adska norma na polju racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ uvodi se na sljedeći način:*

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-\gamma} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

[1]Univerzitet u Tuzli, Prirodno-matematički fakultet, Odsjek matematika, Univerzitetska 4, 75 000 Tuzla, Bosna i Hercegovina, e-mail: samra.piric@untz.ba

[2]Univerzitet u Tuzli, Prirodno-matematički fakultet, Odsjek matematika, Univerzitetska 4, 75 000 Tuzla, Bosna i Hercegovina, e-mail: sanela.halilovic@untz.ba

[3]p-adske brojeve uveo je njemački matematičar Kurt Hensel krajem XIX vijeka.

gdje je cijeli broj γ *definisan relacijom*

$$x = p^{\gamma}\frac{m}{n},$$

a m *i* n *su cijeli brojevi koji nisu djeljivi s* p.

Definition 1.2 *Skup koji je dobiven kompletiranjem skupa racionalnih brojeva u odnosu na* $p-$*adsku normu naziva se skup* $p-$*adskih brojeva u oznaci* $\mathbb{Q}_p$.

Skup p-adskih brojeva $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ za koje vrijedi $|\alpha|_p \leq 1$ naziva se skup p-adskih cijelih brojeva u oznaci $\mathbb{Z}_p$. Polje $\mathbb{Q}_p$ je lokalno-kompaktna komutativna grupa u odnosu na sabiranje, pa je na njemu moguće definisati pozitivnu Haarovu mjeru dx, koja je invarijantna u odnosu na translaciju tj. $d(x+a) = dx$. Mjera dx može se normirati tako da je

$$\int\limits_{|x|_p \leq 1} dx = 1.$$

Za svaki kompaktan skup $K \subset \mathbb{Q}_p$ mjera definiše pozitivan linearan neprekidan funkcional na $C(K)$ formulom $\int\limits_K f(x)dx,\ f \in C(K)$, gdje je $C(K)$ prostor neprekidnih funkcija na K s normom

$$\|f\|_{C(K)} = \max_{x \in K} |f(x)|.$$

Na multiplikativnoj grupi $\mathbb{Q}_p^* = \mathbb{Q}_p \backslash \{0\}$ definiše se Haarova mjera d^*x invarijantna u odnosu na množenje. Navedene mjere povezane su jednakošću

$$d^*x = \frac{1}{1-p^{-1}}\frac{dx}{|x|_p}.$$

Realni i p-adski brojevi objedinjeni su u formi adela. Kao što je poznato Riemannova zeta funkcija može se predstaviti u obliku Eulerovog proizvoda po svim prostim brojevima

$$\zeta(s) = \sum_{1 \leq n < \infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}},$$

za $Re(s) > 1$. Relacije ovakvog tipa uopštene su u teoriji adela.

Definition 1.3 *Adel* x *je beskonačni niz oblika*

$$x = (x_\infty, x_2, ..., x_p, ...),$$

gdje je $x_\infty \in \mathbb{R}$ *i* $x_p \in \mathbb{Q}_p$ *s restrikcijom da za sve osim za konačan skup* S *prostih brojeva* p *imamo* $x_p \in \mathbb{Z}_p$, *tj.* $|x_p|_p \leq 1$.

Skup svih adela formira prsten adela A ako su sabiranje i množenje definisani po komponentama. Aditivna grupa prstena adela naziva se grupa adela. Elementi adele prstena koji imaju inverzni element nazivaju se ideli. Niz

$$\lambda = (\lambda_\infty, \lambda_2, ..., \lambda_p, ...)$$

je idel ako je $\lambda_p \neq 0$ i $|\lambda_p|_p = 1$ za sve osim za konačno mnogo prostih brojeva p. Skup svih idela formira grupu u odnosu na množenje, u oznaci A^*. U A se uvodi topologija Tihonovog proizvoda topoloških prostora $\mathbb{R}, O_2, ..., O_p, ...$ gdje je O_p podgrupa cijelih p-adskih brojeva. Na taj način niz adela

$$x^{(n)} = \left(x_\infty^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_p^{(n)}, ...\right)$$

konvergira ka adelu $x = (x_\infty, x_2, ..., x_p, ...)$, ako konvergira po komponentama i ako postoji takav N, da su za svako $n \geq N$ brojevi $x_p - x_p^{(n)}$ cijeli p-adski. U odnosu na ovu topologiju A postaje lokalno-kompaktna topološka grupa, što neposredno slijedi iz kompaktnosti grupe O_p. Zbog toga na A postoji Haarova mjera koja se označava s da i koja se može izraziti pomoću mjera da_p na $\mathbb{Q}_p$

$$da = da_\infty \cdot da_2 \cdot \ldots \cdot da_p \cdot \ldots ,$$

gdje su mjere da_p normirane uslovima

$$\int_0^1 da_\infty = 1, \quad \int_{|a_p|_p \leq 1} da_p = 1.$$

Analogno na grupi A^* postoji invarijantna Haarova mjera koja se označava s $d^*\lambda$ i može se izraziti pomoću mjera $d^*\lambda_p$ na multiplikativnoj grupi $\mathbb{Q}_p^*$ na sljedeći način:

$$d^*\lambda = d^*\lambda_\infty \cdot d^*\lambda_2 \cdot \ldots \cdot d^*\lambda_p \cdot \ldots$$

Svaki aditivni karakter na grupi adela A ima oblik

$$\chi_0(ax) = \exp 2\pi i(-a_\infty x_\infty + a_2 x_2 + ... + a_p x_p + ...),$$

gdje je $a \in A$ i $a_p x_p$ predstavlja racionalni dio od $a_p x$. Multiplikativni karakter π na idele grupi A^* može se predstaviti u obliku

$$\pi(\lambda) = |\lambda|^s \theta(\lambda).$$

Elementarne funkcije na grupi adela A predstavljene su u obliku beskonačnog proizvoda

$$\phi(a) = \prod_p \phi_p(a_p),$$

gdje faktori $\phi_p(a_p)$ zadovoljavaju sljedeće uslove:
1) $\phi_\infty(a_\infty)$ je beskonačno diferencijabilna funkcija na $\mathbb{R}$, takva da za $n \in \mathbb{N}$

$$|a_\infty|_\infty^n \phi_\infty(a_\infty) \to 0 \text{ kad } |a_\infty| \to \infty.$$

2) $\phi_p(a_p)$ su lokalno konstantne funkcije sa kompaktnim nosačem.
3) Za skoro sve proste brojeve p je

$$\phi_p(a_p) = 1 \text{ ako je } |a_p|_p \leq 1 \text{ i } \phi_p(a_p) = 0 \text{ ako je } |a_p|_p > 1,$$

što znači da su funkcije $\phi_p(a_p)$ jednake karakterističnoj funkciji skupa cijelih p-adskih brojeva $\mathbb{Z}_p$ u oznaci $\Omega\left(|x_p|_p\right)$. Konačne linearne kombinacije elementarnih funkcija čine skup $S(A)$ Schwartz-Bruhatovih adeličkih funkcija. Fourierova transformacija funkcija iz prostora $S(A)$ data je formulom

$$\widetilde{\varphi}(b) = \int\limits_A \varphi(a)\,\chi_0(ba)\,da.$$

Mellinova transformacija funkcija iz prostora $S(A)$ u oznaci $\Phi(s)$ definisana je u odnosu na multiplikativni karakter $\pi(x) = |x|^s$ s

$$\Phi(s) = \int\limits_{A^*} \varphi(x)\,|x|^s\,d^*x, \tag{1}$$

za $Re(s) > 1$. Funkcija $\Phi(s)$ može se analitički produžiti na cijelu kompleksnu ravan izuzev tačaka $s = 0$ i $s = 1$ gdje ima proste polove. U [2] je pokazano da ako se s $\widetilde{\Phi}$ označi Mellinova transformacija funkcije $\widetilde{\varphi}$, onda vezu izmedu Φ i $\widetilde{\Phi}$ daje formula poznata kao formula Tatea

$$\Phi(s) = \widetilde{\Phi}(1-s). \tag{2}$$

2 Adelički harmonijski oscilator

Jedna od važnijih primjena p-adskih brojeva jeste formulacija p-adske kvantne mehanike. Za ilustraciju p-adskih i kvantno-mehaničkih modela najadekvatniji primjer je model harmonijskog oscilatora. Harmonijski oscilator predstavlja jednostavan teoretski model s izuzetno bogatom strukturom, koji se može riješiti egzaktno, klasičnim kao i kvantno-mehaničkim metodama i ima široku primjenu, jer se veliki broj problema u fizici svodi na rješavanje problema harmonijskog oscilatora. Prema [4] p-adski harmonijski oscilator definisan je uredjenom trojkom $(L_2(\mathbb{Q}_p), W(z), U(t))$, gdje je $L_2(\mathbb{Q}_p)$ Hilbertov prostor kompleksnih funkcija kvadratno integrabilnih u odnosu na Haarovu mjeru na $\mathbb{Q}_p$, $W(z)$ je unitarna reprezentacija Heisenberg-Weylove grupe, $z = (q,p) \in \mathbb{Q}_p^2$ tačka u p-adskom faznom prostoru i $U(t)$ unitarna reprezentacija aditivne podgrupe od $\mathbb{Q}_p$ (evolucioni operator). Spektralni problem u p-adskoj kvantnoj mehanici povezan je s istraživanjem svojstvenih vrijednosti i svojstvenih funkcija evolucionog operatora. Prema [3] u standardnoj kvantnoj mehanici nad poljem realnih brojeva razmatraju se spektralne osobine Hamiltonijana, tj. problem se svodi na rješavanje stacionarne Schrödingerove jednačine čijim rješavanjem se dolazi do svojstvenih funkcija

$$\psi_n(x) = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{(2^n n!)^{\frac{1}{2}}} e^{-\pi x^2} H_n\left(x\sqrt{2\pi}\right),$$

gdje su H_n Hermiteovi polinomi. Svojstvene funkcije koje odgovaraju najnižoj svojstvenoj vrijednosti definišu osnovno stanje fizičkog sistema (vakuum). Osnovno stanje kvantnomehaničkog harmonijskog oscilatora dobiva se za $n = 0$ tj.

$$\psi_0(x) = 2^{\frac{1}{4}} e^{-\pi x^2}. \tag{3}$$

Osnovno stanje p-adskog harmonijskog oscilatora dato je funkcijom $\Psi \in L_2(\mathbb{Q}_p)$ koja zadovoljava jednačinu

$$U(t)\Psi = \Psi,$$

za $|t|_p \leqslant \frac{1}{p}$. U [4] je pokazano da je u slučaju $p \equiv 1 \pmod 4$, koji dopušta najkompletniju analizu, osnovno stanje jednako karakterističnoj funkciji skupa $\mathbb{Z}_p$, tj.

$$\Psi_0(x) = \Omega(|x_p|_p) \tag{4}$$

Adelički harmonijski oscilator je prirodna ilustracija matematičke analize na adelima. To je jednostavan i egzaktan adelički model koji je definisan uredjenom trojkom

$$(L_2(A), W(z), U(t)),$$

gdje je A prsten adela, $z = \begin{pmatrix} q \\ k \end{pmatrix}$ adelička tačka klasičnog faznog prostora, a t je adeličko vrijeme (vidjeti [1]). $L_2(A)$ je Hilbertov prostor kompleksnih funkcija adeličkog argumenta, kvadratno-integrabilnih u odnosu na Haarovu mjeru na A, $W(z)$ označava unitarnu reprezentaciju Heisenberg-Weylove grupe na $L_2(A)$, a $U(t)$ (evolucioni operator) je unitarna reprezentacija podgrupe G aditivne grupe A^+ na $L_2(A)$. Ortonormirana baza adeličkog Hilbertovog prostora za harmonijski oscilator je

$$\psi_{\alpha\beta}(x) = \psi_{n0}^{(\infty)}(x_\infty) \prod_p \psi_{\alpha_p\beta_p}^{(p)}(x_p), x \in A, \tag{5}$$

gdje su $\psi_{n0}^{(\infty)}(x_\infty) \equiv \psi_n(x_\infty)$ i $\psi_{\alpha_p\beta_p}^{(p)}(x_p)$ ortonormirane svojstvene funkcije u realnom i p-adskom slučaju, respektivno. Sada uvrštavanjem (3) i (4) u (5) dolazi se do formule za osnovno stanje adeličkog harmonijskog oscilatora

$$\psi_{00}(x) = 2^{\frac{1}{4}} e^{-\pi x^2} \prod_p \Omega(|x_p|_p) \tag{6}$$

3 Mellinova transformacija vakuum stanja adeličkog hramonijskog oscilatora

Primjenom Mellinove transformacije na vakuum stanje $\psi_{00}(x)$ dato sa (6), dobiva se

$$\Phi(s) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} 2^{\frac{1}{4}} e^{-\pi x^2} |x|^{s-1} \, dx \right) \cdot \left(\prod_p \int_{|x_p|_p \le 1} |x_p|_p^s \, d^* x_p \right),$$

Pomoću smjene $\pi x^2 = y$ u prvom integralu dobiva se

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} 2^{\frac{1}{4}} e^{-\pi x^2} |x|^{s-1} \, dx &= 2^{\frac{1}{4}} \pi^{-\frac{s}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{\frac{s}{2}-1} dy \\ &= 2^{\frac{1}{4}} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right), \end{aligned}$$

gdje je Γ klasična gama funkcija. Za drugi integral imamo

$$\begin{aligned} \int_{|x_p|_p \le 1} |x_p|_p^s \, d^* x_p &= \frac{1}{1-p^{-1}} \sum_{\gamma=-\infty}^{0} \int_{|x_p|_p = p^\gamma} |x_p|_p^{s-1} \, dx_p \\ &= \frac{1}{1-p^{-1}} \sum_{\gamma=-\infty}^{0} \int_{|x_p|_p = p^\gamma} (p^\gamma)^{s-1} \, dx \\ &= \frac{1}{1-p^{-1}} \sum_{\gamma=-\infty}^{0} (p^\gamma)^{s-1} \left(1-p^{-1}\right) p^\gamma \\ &= \sum_0^\infty p^{-\gamma s} \\ &= \frac{1}{1-p^{-s}}, \end{aligned}$$

pa je

$$\prod_p \int_{|x_p|_p \le 1} |x_p|_p^s \, d^* x_p = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \zeta(s),$$

gdje je $\zeta(s)$ Riemannova zeta funkcija. Dakle,

$$\Phi(s) = 2^{\frac{1}{4}} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s).$$

Kako je Fourierova transformacija osnovnog stanja adeličkog harmonijskog oscilatora $\widetilde{\Psi} = \Psi$ to je i $\widetilde{\Phi} = \Phi$ [2] , pa se uvrštavanjem $\widetilde{\Phi}(1-s) = \Phi(1-s)$

u formulu Tatea dolazi do poznate funkcionalne jednačine za Riemannovu zeta funkciju

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta\left(s\right)=\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\zeta\left(1-s\right).$$

References

[1] B. Dragovich, Adelic Harmonic Oscillator, *Int. J. Mod. Phys.* A10 (1995), 2349-2365

[2] I. M. Geljfand, M. I. Graev, I.I. Pjatecki-Šapiro, *Teoriya predstavlenij i avtomorfnye funkcii*, Nauka, Moskva, 1966.

[3] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, Prentice Hall, 1995.

[4] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, E. I. Zelenov, *p-adic Analysis and Mathematical Physics,* World Scientific, Singapore, 1994.

(Pristiglo u redakciju 07.10.2011. revdirana verzija 22.11.2011. Dostupno na internetu od 23.11.2011.)