MAT-KOL (Banja Luka)
XVII (2) (2011), 5-7

ISSN 0354-6969 (p)
ISSN 1986-5228 (o)
Metodika matematike

O JEDNOJ ALGEBARSKOJ NEJEDNAKOSTI

(About one algebraic inequality)

Dragoljub Milošević[1)]

Sažetak: U radu su data dva dokaza jedne generalizacije Nesbittove nejednakosti.

Ključne riječi: pozitivni brojevi, nejednakost, ekvivalentno, Nesbittova nejednakost, aritmetičko-geometrijska nejednakost.

Abstract: In this paper two proofs are given for the generalization of Nesbitt's inequality.

Key words and phrases: positive numbers, inequality, equivalent, Nesbitt's inequality, arithmetic-geometric inequality.

AMS Subject Classification (2010): 97 F 50
ZDM Subject Classification (2010): F 50, N 50

Nejednakost oblika

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}, \quad (a,b,c>0) \tag{1}$$

poznata je kao Nesbittova nejednakost.

U [1] je dat jedan dokaz njenog uopštenja (generalizacije):

$$M=\frac{a}{kb+c}+\frac{b}{kc+a}+\frac{c}{ka+b}\geq\frac{3}{1+k}, \tag{2}$$

gdje su a,b,c,k pozitivni realni brojevi. Prikazat ćemo još dva dokaza nejednakosti (2).

Dokaz 1. Ako uvedemo oznake

[1)] 17. NOU divizije 43, 32300 Gornji Milanovac, Srbija, e-mail:dramil47@gmail.com

$$A = kb + c,\ B = kc + a \text{ i } C = ka + b$$

tada, poslije sabiranja ovih jednakosti imamo

$$A + B + C = (1 + k)(a + b + c), \text{ tj.}$$

$$a + b + c = \frac{1}{1+k}(A + B + C).$$

Sada je

$$a = \frac{1}{2k}\left(B + C - \frac{2}{1+k}A\right),\ b = \frac{1}{2k}\left(C + A - \frac{2}{1+k}B\right),\ c = \frac{1}{2k}\left(A + B - \frac{2}{1+k}C\right). \quad (3)$$

Poslije ove smjene dobijamo

$$M = \frac{1}{2k}\left(\frac{B+C}{A} + \frac{C+A}{B} + \frac{A+B}{C} - 3\cdot\frac{2}{1+k}\right),$$

što je isto kao

$$M = \frac{1}{2k}\left(\frac{B}{A} + \frac{A}{B} + \frac{C}{A} + \frac{A}{C} + \frac{C}{B} + \frac{B}{C} - \frac{6}{1+k}\right). \quad (4)$$

Na bazi nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine dva pozitivna broja, imamo

$$\frac{B}{A} + \frac{A}{B} \geq 2\sqrt{\frac{B}{A}\cdot\frac{A}{B}} = 2,\ \frac{C}{A} + \frac{A}{C} \geq 2 \text{ i } \frac{C}{B} + \frac{B}{C} \geq 2,$$

pa iz (4) slijedi

$$M \geq \frac{1}{2k}\left(2 + 2 + 2 - \frac{6}{1+k}\right) = \frac{6}{2k}\left(1 - \frac{1}{1+k}\right),$$

odnosno

$$M \geq \frac{3}{1+k},$$

što je i trebalo dokazati.

Napomena 1. Jednakost u (2) važi samo ako je $a = b = c$ i $k = 1$.

Dokaz 2. Za pozitivne brojeve x, y, z i realne brojeve a,b,c vrijedi sljedeća nejednakost ([2]):

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}, \quad (5)$$

jer je ekvivalentna sa

$$\left(x+y+z\right)\left(a^2yz+b^2zx+c^2xy\right)\ge xyz\left(a+b+c\right)^2,$$

tj. sa

$$x\left(bz-cy\right)^2+y\left(az-cx\right)^2+z\left(ay-bx\right)^2\ge 0,$$

što je očigledno tačno pri $x,y,z>0$.

Primjenom nejednakosti (5), dobijamo

$$M=\frac{a^2}{a\left(kb+c\right)}+\frac{b^2}{b\left(kc+a\right)}+\frac{c^2}{c\left(ka+b\right)}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{\left(1+k\right)\left(ab+bc+ca\right)}. \qquad (6)$$

Tačna nejednakost $\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2\ge 0$ ekvivalentna je sa

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca,$$

tj. sa

$$\left(a+b+c\right)^2\ge 3\left(ab+bc+ca\right),$$

pa iz (6) slijedi

$$M\ge\frac{3}{1+k},$$

tj. (2).

Napomena 2. Ako u nejednakosti (2) stavimo $\frac{k}{r}$ umjesto k, dobijamo

$$\frac{a}{\frac{k}{r}b+c}+\frac{b}{\frac{k}{r}c+a}+\frac{c}{\frac{k}{r}a+b}\ge\frac{3}{1+\frac{k}{r}},\ \left(r>0\right)$$

što je ekvivalentno sa

$$\frac{a}{kb+rc}+\frac{b}{kc+ra}+\frac{c}{ka+rb}\ge\frac{3}{k+r},$$

a ovo je nejednakost (8') iz [1].

LITERATURA

[1] Š. Arslanagić, *Jedno poboljšanje Nesbittove nejednakosti i neke njene generalizacije*, MAT-KOL (Banja Luka), XVII (1) (2011), 5-11.

[2] D. Milošević, *Jedna nejednakost i njene primene*, Tangenta (Beograd), 55/3 (2008/09), 8-10.

[3] D.S. Mitrinović, *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.