MAT-KOL (Banja Luka) ISSN 0354-6969 (p)
XVII (2) (2011), 25-31 ISSN 1986-5228 (o)
Metodika matematike / Euklidska geometrija

O JEDNOJ TEOREMI IZ GEOMETRIJE
(About one geometric theorem)

Dragoljub Milošević[1] i Borisav Simić[2]

Sažetak. Dajemo još sedam dokaza teoreme o pravilnom sedmouglu iz [1].

Ključne riječi: pravilni sedmougao, stranica i dijagonale pravilnog sedmougla, pravougli i jednakokraki trougao, simetrala unutrašnjeg ugla trougla, trapez, lema, Pitagorina, Talesova i Stjuartova teorema, adicione formule za sinus i kosinus.

Abstract. We give seven new proofs of a theorem for the regular septagon (see [1]).

Key words: regular septagon, side and diagonals of regular septagon, right-angled and isosceles triangle, angle-bisector, trapezoid, lemma, Pythagorean, Thales and Stewart's theorem, addition formulas for sine and cosine.

AMS Subject Classification (2010): **51M04, 97G40**
ZDM Subject Classification (2010): **G40**.

U [1] dato je osam dokaza sledeće teoreme:

Teorema. *U pravilnom sedmouglu ABCDEFG važi jednakost*
$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}.$$

Ovde dajemo još sedam različitih dokaza ove teoreme.

Dokaz 1. Neka su a, d i D redom dužine stranice, manje dijagonale i veće dijagonale pravilnog sedmougla $ABCDEFG$. Tada se navedena jednakost može napisati ovako

[1] 17. NOU divizije 43, Gornji Milanovac, Srbija, e – mail: dramil47@gmail.com.
[2] 173. ulica br. 19/14, Jagodina, Srbija

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{d}+\frac{1}{D} \qquad (*)$$

Ako je 2α veličina centralnog ugla nad stranicom datog sedmougla, onda je $2\alpha=\frac{2\pi}{7}$, odnosno $7\alpha=\pi$. Veličina odgovarajućeg periferijskog ugla je α, pa je veličina unutršnjeg ugla tog sedmougla jednaka

$$7\alpha-(\alpha+\alpha)=5\alpha \quad (v.\,\Delta ABC\text{ - sl.1}).$$

Na dijagonalama AC i AD odredimo tačke K i L tako da

$$\overline{CK}=BC=a \text{ i } \overline{AL}=\overline{AC}=d.$$

Tada je

$$\overline{AK}=d\text{ - }a \text{ i } \overline{DL}=D\text{ - }d.$$

U jednakokrakom trouglu BCK je

$$\angle CBK=\angle CKB=3\alpha,$$

pa je

$$\angle ABK=\angle ABC-\angle CBK=5\alpha-3\alpha=2\alpha.$$

Kako je

$$\angle ACD=\angle BCD-\angle ACB=4\alpha \text{ i } \angle ACL=3\alpha,$$

imamo

$$\angle LCD=\angle ACD-\angle ACL=\alpha.$$

U trouglu ACD je $\angle ADC=7\alpha-(\alpha+4\alpha)=2\alpha$. Trouglovi ABK i CDL su podudarni (pravilo USU), pa je $\overline{CL}=\overline{AK}=d\text{ - }a$. Sada koristimo lemu iz [1]: Ako u ΔABC je $\alpha=2\beta$, onda je $a^2=b(b+c)$. Na osnovu ove leme, primijenjene na ΔCDL, je

$$(d-a)^2=(D-d)(D-d+a),$$

a odavde je:

$$D^2-a^2=2Dd-a(D+d) \qquad (1)$$

Četverougao $ADEG$ je jednakokraki trapez, pa je

$$\overline{AN}=\frac{D-d}{2} \text{ i } \overline{ND}=\frac{D+d}{2}, \ (GN\perp AD,\ N\in AD).$$

Primjenom Pitagorine teoreme na pravougle trouglove ANG i DGN dobijamo

$$\overline{GN}^2=a^2-\left(\frac{D-d}{2}\right)^2 \text{ i } \overline{GN}^2=D^2-\left(\frac{D+d}{2}\right)^2,$$

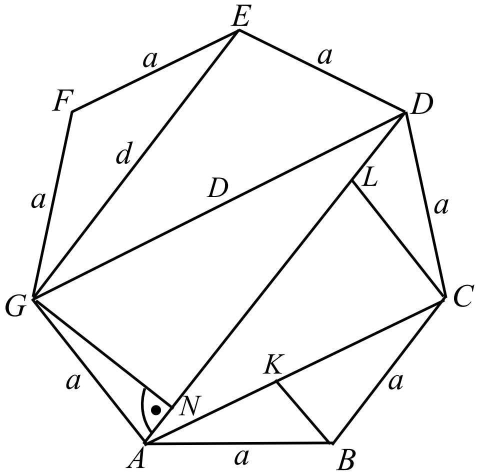
odakle je

$$a^2-\left(\frac{D-d}{2}\right)^2=D^2-\left(\frac{D+d}{2}\right)^2,$$

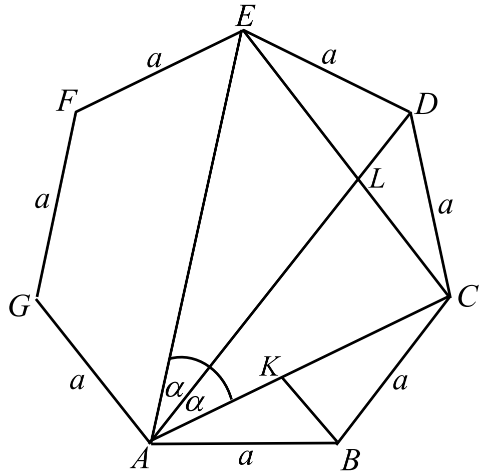
odnosno

$$D^2-a^2=Dd \qquad (2)$$

Iz jednakosti (1) i (2) slijedi $2Dd - a(D + d) = Dd$, ili $Dd = a(D + d)$. Odavde, poslije dijeljenja lijeve i desne strane sa adD , dobijamo traženu jednakost $(*)$.



Sl. 1



Sl. 2

Dokaz 2. Odredimo tačke K i L kao u dokazu 1. Trouglovi ACD i ALE su podudarni, pa je $\overline{LE} = \overline{CD} = a$ (sl. 2). Primjenom Stjuartove teoreme na trouglove ABC i ADE dobijamo

$$d\left((d - a)a + (D - d)^2\right) = a^3 + a^2(d - a)$$

i

$$D\left(d(D - d) + a^2\right) = D^2(D - d) + a^2 d ,$$

odakle, zbog $d \neq 0$ i $D \neq d$, proizlazi

$$D^2 + d^2 - 2a^2 = 2Dd - ad \qquad (3)$$

i

$$D^2 - a^2 = Dd \qquad (4)$$

Na dijagonali AD odredimo tačku Q tako da $\overline{AQ} = a$, pa je $\overline{DQ} = D - a$ (sl. 3). Trougao ACQ je jednakokraki, što znači da je $\overline{CQ} = a$. Na osnovu Stjuartove teoreme primijenjene na ΔACD je

$$D\left(a(D - a) + a^2\right) = d^2(D - a) + a^3 ,$$

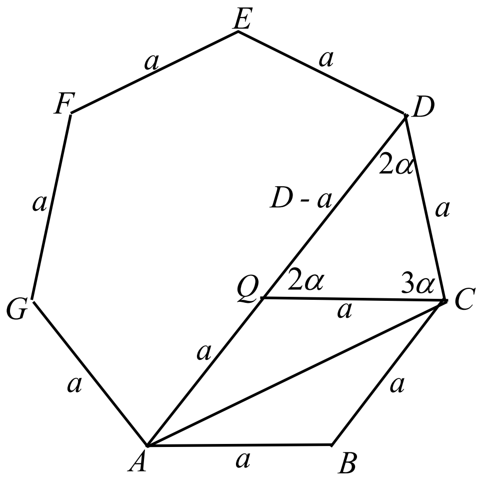
što je, zbog $D \neq a$, ekvivalentno sa

$$d^2 - a^2 = aD \qquad (5)$$

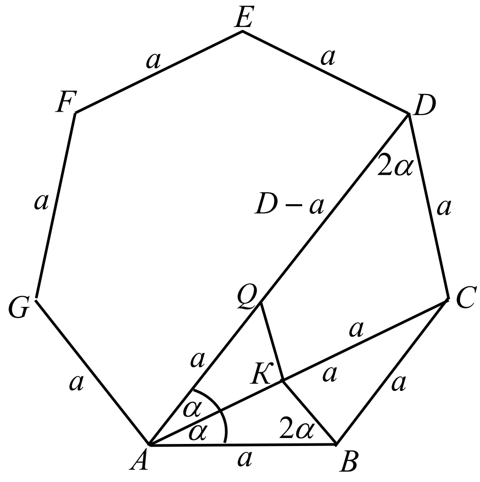
Sabiranjem jednakosti (4) i (5) dobijamo

$$D^2 + d^2 - 2a^2 = Dd + aD \qquad (6)$$

Najzad, iz jednakosti (3) i (6) slijedi $2Dd - ad = Dd + aD$, ili $Dd = a(D + d)$, što je ekvivalentno sa jednakošću $(*)$.



Sl. 3



Sl. 4

Dokaz 3. Odredimo tačke K i Q na dijagonalama AC i AD kao u dokazu 2 (sl. 4). Trouglovi ABK i AKQ su podudarni (pravilo SUS), pa je $\angle AQK = \angle ABK = 2\alpha$. Kako je i $\angle ADC = 2\alpha$, zaključujemo da je $CD \| KQ$. Zbog toga možemo koristiti Talesovu teoremu:

$$\overline{AK} : \overline{KC} = \overline{AQ} : \overline{QD}, \text{ odnosno } (d - a) : a = a : (D - a),$$

a ovo je ekvivalentno sa jednakošću $(*)$.

Dokaz 4. Kako je $\angle CAL = \angle EAL = \alpha$ (sl. 2), to možemo primijeniti teoremu o simetrali unutrašnjeg ugla trougla (za ΔACE):

$$\overline{CL} : \overline{LE} = \overline{AC} : \overline{AE}, \text{ ili } (d - a) : a = d : D,$$

a odavde je $Dd = a(D + d)$. Ova jednakost ekvivalentna je sa traženom jednakošću.

Dokaz 5. Kako je (v. [1])

$$a = 2R\sin\alpha, \quad d = 2R\sin 2\alpha \quad D = 2R\sin 3\alpha$$

(R-poluprečnik opisane kružnice oko datog sedmougla), jednakost $(*)$ ekvivalentna je sa

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha}, \text{ za } \alpha = \frac{\pi}{7} \qquad (7)$$

Neka je ΔABC jednakokraki tako da

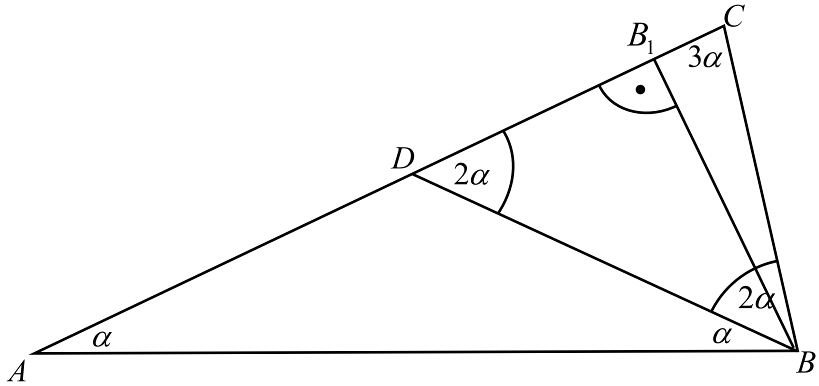
$$\angle ABC = \angle BCA = 3\alpha, \ \angle CAB = \alpha \text{ i } \overline{BB_1} = 1 \ (BB_1 \perp AC \text{ i } B_1 \in AC) \text{ - sl. 5.}$$

Odredimo na kraku AC tačku D tako da je $\angle ABD = \alpha$ .Tada je

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \frac{1}{\sin\alpha}, \quad \overline{BD} = \overline{AD} = \frac{1}{\sin 2\alpha} \quad \text{i} \quad \overline{DC} = \overline{BC} = \frac{1}{\sin 3\alpha}.$$

Kako je $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC}$, zaključujemo da je, zaista: $\dfrac{1}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{\sin 2\alpha} + \dfrac{1}{\sin 3\alpha}$,

tj. važi jednakost (7), a samim tim i tražena jednakost $(*)$.



Sl. 5

Dokaz 6. Zbog $7\alpha = \pi$ $(v.\,\text{dokaz}\,1.)$, odnosno $4\alpha = \pi - 3\alpha$, imamo $\sin 4\alpha = \sin(\pi - 3\alpha) = \sin 3\alpha$, pa je

$$\sin 4\alpha + \sin 2\alpha = \sin 3\alpha + \sin 2\alpha \tag{8}$$

Transformacijom zbira $\sin 4\alpha + \sin 2\alpha$ u proizvod dobijamo

$$\sin 4\alpha + \sin 2\alpha = 2\sin\frac{4\alpha + 2\alpha}{2}\cos\frac{4\alpha - 2\alpha}{2} = 2\sin 3\alpha\cos\alpha,$$

što znači da se jednakost (8) pretvara u $2\sin 3\alpha\cos\alpha = \sin 3\alpha + \sin 2\alpha$.

Množenjem ove jednakosti sa $\sin\alpha$, imamo

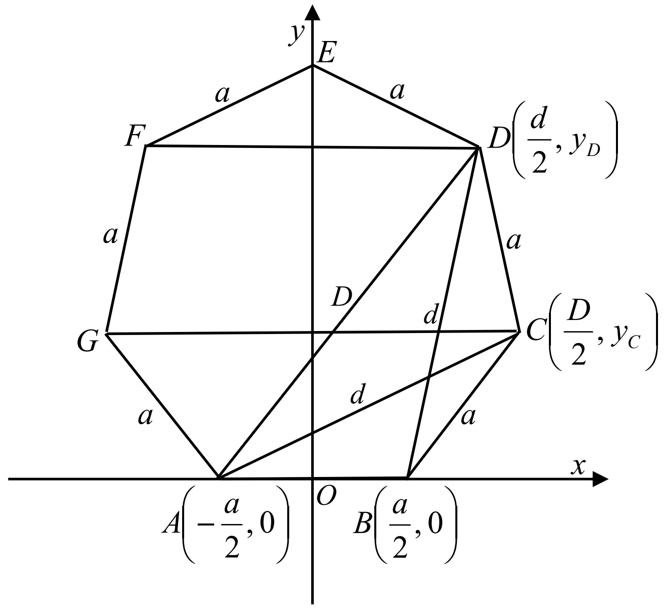
$$2\sin 3\alpha\cos\alpha\sin\alpha = (\sin 3\alpha + \sin 2\alpha)\sin\alpha,$$

što je, zbog $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$, ekvivalentno sa

$$\sin 2\alpha\sin 3\alpha = \sin\alpha(\sin 2\alpha + \sin 3\alpha),$$

odnosno sa jednakošću (7) nakon dijeljenja sa $\sin\alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha > 0$.

Dokaz 7. Izaberimo Dekartov pravougli koordinatni system u ravni tako da vrhovi A i B pravilnog sedmougla $ABCDEFG$ budu simetrični u odnosu na koordinatni početak O (središte stranice AB) i da stranica AB pripada apscisnoj osi (sl. 6). Zbog $\overline{AB} = a$, $\overline{DF} = d$ i $\overline{CG} = D$ $(DF \| CG \| AB)$, koordinate vrhova sedmougla su: $A\left(-\frac{a}{2},0\right)$, $B\left(\frac{a}{2},0\right)$, $C\left(\frac{D}{2},y_C\right)$, $D\left(\frac{d}{2},y_D\right)$, $E(0,y_E)$, $F\left(-\frac{d}{2},y_F\right)$ i $G\left(-\frac{D}{2},y_G\right)$.



Sl. 6

Koristit ćemo formulu za kvadrat dužine rastojanja između dviju tačaka:

$$\overline{MN}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2, \text{ gdje je } M(x_1,y_1) \text{ i } N(x_2,y_2).$$

Na osnovu te formule je

$$\overline{AC}^2=d^2=\left(\frac{D}{2}+\frac{a}{2}\right)^2+y_C{}^2 \quad \text{i} \quad \overline{BC}^2=a^2=\left(\frac{D}{2}-\frac{a}{2}\right)^2+y_C{}^2,$$

odakle, poslije oduzimanja druge jednakosti od prve, slijedi

$$d^2-a^2=aD \tag{9}$$

Također, imamo

$$\overline{AD}^2=D^2=\left(\frac{d}{2}+\frac{a}{2}\right)^2+y_D{}^2 \quad \text{i} \quad \overline{BD}^2=d^2=\left(\frac{d}{2}-\frac{a}{2}\right)^2+y_D{}^2,$$

pa je nakon oduzimanja ovih nejednakosti

$$D^2-d^2=ad \tag{10}$$

Sabiranjem jednakosti (9) i (10) dobijamo

$$D^2-a^2=a(D+d) \tag{11}$$

Trouglovi *ADE* i *DEL* sa slike 2 su slični, pa je $D:a=a:(D-d)$. Odavde je

$$D^2-a^2=Dd \tag{12}$$

Jednakosti (12) i (11) daju $Dd = a(D+d)$, što je ekvivalentno sa traženom jednakošću $(*)$.

Napomena. Jedan dokaz relacije $(*)$ nalazi se u [2].

LITERATURA

[1] Dragoljub Milošević, *Razni dokazi jedne teoreme u geometriji*, MAT-KOL (Banja Luka), XVII (1) (2011), 49 – 54.

[2] *www.imomath,com/index/pripremni*

Prispjelo u Redakciju 15.08.2011.