MAT-KOL (Banja Luka)
XVI(2)(2010), 23-29

ISSN 0354-6969 (p)
ISSN 1986-5228 (o)
Metodika matematike

TRI INTERESANTNE NEJEDNAKOSTI U VEZI S TROUGLOM

(Three interesting inequalities for a triangle)

Šefket Arslanagić[1)]

Sažetak: U radu su dokazane tri interesantne nejednakosti u vezi s trouglom koje se odnose na elemente trougla. Ove nejednakosti imaju jenake desne strane.

Ključne riječi: nejednakosti za trougao, elementi trougla, stranice, uglovi, težišnice, visine, simetrale unutrašnjih uglova, radijusi opisane i upisane kružnice, poluobim i površina trougla.

Abstract: In this paper we prove three interesting inequalities for a triangle, i.e. for elements of triangle. These inequalities have equal the right parts.

Key word and phrases: inequalities for a triangle, elements of triangle, sides, angles, medians, altitudes, angle-bisectors, radius of circumcircle, radius of incircle, semi-perimeter and area of triangle.

AMS Subject Classification (2010): **51M04, 97G40**
ZDM Subject Classification (2010): **G40**

U ovom radu ćemo dokazati tri interesantne nejednakosti u vezi sa elementima trougla. Neka su a,b,c dužine stranica; m_a, m_b, m_c dužine težišnica; h_a, h_b, h_c dužine visina; $s_\alpha, s_\beta, s_\gamma$ dužine simetrala unutrašnjih uglova α, β i γ trougla ΔABC, te R i r radijusi opisanog i upisanog kruga tog trougla, a s i P njegov poluobim i površina.
Dokazat ćemo da važe sljedeće nejednakosti:

$$\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c} \le \frac{R+r}{r}, \tag{1}$$

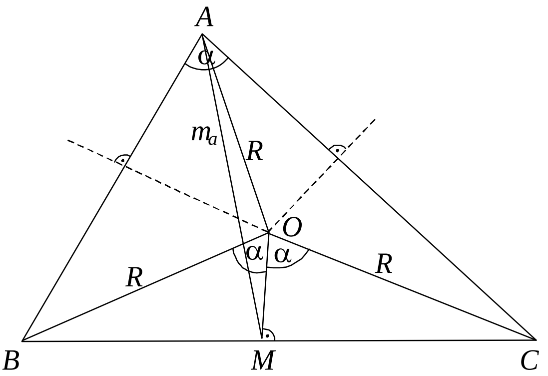
1) Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu, Odsjek za matematiku, 71000 Sarajevo, Zmaja od Bosne 35, BiH; e-mail:asefket@pmf.unsa.ba

$$\frac{s_\alpha}{h_a}+\frac{s_\beta}{h_b}+\frac{s_\gamma}{h_c}\le\frac{R+r}{r}\,, \qquad (2)$$

$$\frac{m_a}{s_\alpha}+\frac{m_b}{s_\beta}+\frac{m_c}{s_\gamma}\le\frac{R+r}{r}\,. \qquad (3)$$

1^0 Dokažimo nejednakost (1). Prvo ćemo dokazati nejednakost:

$$am_a\le aR\left(1+\cos\alpha\right). \qquad (4)$$



sl.1

Neka je tačka M središte stranice BC. Imamo iz nejednakosti trougla ΔAOM:

$$\overline{AM}\le\overline{AO}+\overline{OM}=R+R\cos\alpha\text{, tj.}$$

$$\overline{AM}\le R\left(1+\cos\alpha\right)$$

(jer je $\sphericalangle BOM=\sphericalangle COM=\sphericalangle BAC=\alpha$ (teorema o periferijskom i centralnom uglu kruga)). Kako je $\overline{AM}=m_a$, to dobijamo:

$$m_a\le R\left(1+\cos\alpha\right),$$

odnosno

$$am_a\le aR\left(1+\cos\alpha\right),$$

a ovo je (4). Analogno, imamo i sljedeće nejednakosti:

$$bm_b\le bR\left(1+\cos\beta\right) \qquad (5)$$

i

$$cm_c\le cR\left(1+\cos\gamma\right). \qquad (6)$$

Nakon sabiranja nejednakosti (4), (5) i (6), dobijamo:

$$am_a + bm_b + cm_c \le (a+b+c)R + R(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)$$

$$= 2sR + R^2(2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin\beta\cos\beta + 2\sin\gamma\cos\gamma)$$

$$= 2sR + R^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma),$$

a odavde zbog identiteta:

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

i

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{rs}{2R^2}:$$

$$am_a + bm_b + cm_c \le 2sR + 4R^2 \cdot \frac{rs}{2R^2}, \text{ tj.}$$

$$am_a + bm_b + cm_c \le 2s(R+r). \tag{7}$$

Kako je $a = \frac{2P}{h_a}, b = \frac{2P}{h_b}, c = \frac{2P}{h_c}$ i $P = rs$, to slijedi iz (7):

$$2rs\left(\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c}\right) \le 2s(R+r),$$

odnosno

$$\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \le \frac{R+r}{r}, \text{ q.e.d.}$$

Vrijedi jednakost u (1) ako i samo ako je $a = b = c$, tj. ako je u pitanju jednakostranični trougao.

2^0 Pređimo sada na dokaz nejednakosti (2). Imamo poznate obrasce:

$$s_\alpha = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{s(s-a)},$$

$$s_\beta = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{s(s-b)},$$

$$s_\gamma = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{s(s-c)},$$

a odavde zbog nejednakosti $(A \ge G)$ između aritmetičke i geometrijske sredine dva pozitivna broja:

$$s_\alpha \le \sqrt{s(s-a)};\ s_\beta \le \sqrt{s(s-b)}\ \text{ i }\ s_\gamma \le \sqrt{s(s-c)}$$

te na osnovu Heronovog obrasca $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$:

$$s_\alpha \le \frac{P}{\sqrt{(s-b)(s-c)}};$$

$$s_\beta \le \frac{P}{\sqrt{(s-a)(s-c)}};$$

$$s_\gamma \le \frac{P}{\sqrt{(s-a)(s-b)}}.$$

Sada imamo

$$\frac{s_\alpha}{h_a}+\frac{s_\beta}{h_b}+\frac{s_\gamma}{h_c} \le \frac{P}{\sqrt{(s-b)(s-c)}}\cdot\frac{a}{2P}+\frac{P}{\sqrt{(s-a)(s-c)}}\cdot\frac{b}{2P}+\frac{P}{\sqrt{(s-a)(s-b)}}\cdot\frac{c}{2P}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{(s-b)(s-c)}}+\frac{b}{\sqrt{(s-a)(s-c)}}+\frac{c}{\sqrt{(s-a)(s-b)}}\right),$$

a odavde zbog poznatih obrazaca:

$$tg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}};\ tg\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}\ \text{ i }\ tg\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}:$$

$$\frac{s_\alpha}{h_a}+\frac{s_\beta}{h_b}+\frac{s_\gamma}{h_c} \le \frac{1}{2r}\left(a\sqrt{tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\gamma}{2}}+b\sqrt{tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\gamma}{2}}+c\sqrt{tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2}}\right)$$

$$\overset{(G\le A)}{\le} \frac{1}{4r}\left(a\left(tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\gamma}{2}\right)+b\left(tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\gamma}{2}\right)+c\left(tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{4r}\cdot\frac{a\cos^2\frac{\alpha}{2}+b\cos^2\frac{\beta}{2}+c\cos^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Sada koristeći poznate jednakosti:

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{s}{4R}$$

i

$$a\cos^2\frac{\alpha}{2}+b\cos^2\frac{\beta}{2}+c\cos^2\frac{\gamma}{2}=s\left(1+\frac{r}{R}\right),$$

dobijamo:

$$\frac{s_\alpha}{h_a}+\frac{s_\beta}{h_b}+\frac{s_\gamma}{h_c}\le\frac{1}{4r}\cdot\frac{s\left(1+\frac{r}{R}\right)}{\frac{s}{4R}},\ \text{tj.}$$

$$\frac{s_\alpha}{h_a}+\frac{s_\beta}{h_b}+\frac{s_\gamma}{h_c}\le\frac{R+r}{r},\ \text{q.e.d.}$$

Vrijedi jednakost u (2) ako i samo ako je u pitanju jednakostranični trougao.

3^0 Dokažimo na kraju i nejednakost (3). Kako je $s_\alpha\ge h_a, s_\beta\ge h_b$ i $s_\gamma\ge h_c$, odnosno:

$$\frac{1}{s_\alpha}\le\frac{1}{h_a};\ \frac{1}{s_\beta}\le\frac{1}{h_b}\ \text{i}\ \frac{1}{s_\gamma}\le\frac{1}{h_c},$$

to slijede sljedeće nejednakosti:

$$\frac{m_a}{s_a}\le\frac{m_a}{h_a};\ \frac{m_b}{s_\beta}\le\frac{m_b}{h_b}\ \text{i}\ \frac{m_c}{s_\gamma}\le\frac{m_c}{h_c},$$

a odavde nakon sabiranja ovih nejednakosti:

$$\frac{m_a}{s_a}+\frac{m_b}{s_\beta}+\frac{m_c}{s_\gamma}\le\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c},\tag{8}$$

te zbog (1):

$$\frac{m_a}{s_\alpha}+\frac{m_b}{s_\beta}+\frac{m_c}{s_\gamma}\le\frac{R+r}{r},\ \text{q.e.d.}$$

Vrijedi jednakost u (3) ako i samo ako je u pitanju jednakostranični trougao.

Napomena 1. Kako je $\frac{s_\alpha}{h_a}\ge 1, \frac{s_\beta}{h_b}\ge 1$ i $\frac{s_\gamma}{h_c}\ge 1$, te $\frac{m_a}{h_a}\ge 1, \frac{m_b}{h_b}\ge 1$ i $\frac{m_c}{h_c}\ge 1$, to vrijede nejednakosti:

$$\frac{s_\alpha}{h_a}+\frac{s_\beta}{h_b}+\frac{s_\gamma}{h_c}\ge 3$$

i

$$\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}\ge 3,$$

gdje jednakost vrijedi ako i samo ako je u pitanju jednakostranični trougao.

Napomena 2. U [2], str. 37 je dokazano da vrijede nejednakosti $m_a \geq s_\alpha, m_b \geq s_\beta$ i $m_c \geq s_\gamma$, a odavde:

$$\frac{m_a}{s_\alpha}+\frac{m_b}{s_\beta}+\frac{m_c}{s_\gamma} \geq 3,$$

gdje vrijedi jednakost ako i samo ako je u pitanju jednakostranični trougao. Za dokaz gornje nejednakosti smo posmatrali, npr:

$$\left(\frac{m_a}{s_\alpha}\right)^2=\frac{\frac{1}{4}\left(2b^2+2c^2-a^2\right)}{\frac{bc}{(b+c)^2}\left[(b+c)^2-a^2\right]}=\frac{(b+c)^2}{4bc}\cdot\frac{2b^2+2c^2-a^2}{(b+c)^2-a^2} \geq 1,$$

jer je

$$\frac{(b+c)^2}{4bc} \geq 1 \ (A \geq G) \ \text{ i } \ \frac{2b^2+2c^2-a^2}{(b+c)^2-a^2} \geq 1 \Leftrightarrow (b-c)^2 \geq 0.$$

Napomena 3. Iz nejednakosti (8) očigledno slijedi da je nejednakost (1) bolja (jača) od nejednakosti (3). Ostaje otvoreno pitanje da li je nejednakost (2) bolja (jača) ili slabija od nejednakosti (1) i (3).

Napomena 4. U [4], str. 26 je dokazana nejednakost 3.2.1. koja glasi

$$h_a \geq \sqrt{\frac{2r}{R}}s_\alpha,$$

odnosno

$$\frac{s_\alpha}{h_a} \leq \sqrt{\frac{R}{2r}},$$

te analogno

$$\frac{s_\beta}{h_b} \leq \sqrt{\frac{R}{2r}}, \ \frac{s_\gamma}{h_c} \leq \sqrt{\frac{R}{2r}},$$

odnosno nakon sabiranja gornje tri nejednakosti:

$$\frac{s_\alpha}{h_a}+\frac{s_\beta}{h_b}+\frac{s_\gamma}{h_c} \leq 3\sqrt{\frac{R}{2r}}. \qquad (9)$$

Lako se pokaže da je nejednakost (9) bolja jača od nejednakosti (2) jer je:

$$3\sqrt{\frac{R}{2r}} \le \frac{R+r}{r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2}\cdot\frac{R}{r} \le \left(\frac{R}{r}\right)^2 + 2\cdot\frac{R}{r} + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{R}{r}\right)^2 - \frac{5}{2}\cdot\frac{R}{r} + 1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2R^2 - 5Rr + 2r^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (R-2r)(2R-r) \ge 0$$

a ova nejednakost je tačna zbog nejednakosti Eulera $R \ge 2r$.
Vrijedi jednakost u (9) ako i samo ako je u pitanju jednakostranični trougao.

LITERATURA

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
[2] Š. Arslanagić, *O simetralama uglova trougla*, Nastava matematike (Beograd), Vol. LV, br. 1-2 (2010), 30-39
[3] I.V. Maftei, P.G. Popescu, M. Piticari, C. Lupu, M.A. Tataram, *Inegalitati alese in matematica*, Editura Niculescu, Bukuresti, 2005.
[4] N. Minculete, *Egalitati si inegalitati geometrice in triunghi*, Editura Euroca-rpatica, Sfantu Gheorghe, 2003.

Primljeno, 17. Septembar 2010.