MAT-KOL (Banja Luka)
XVI (2)(2010), 11-18

ISSN 0354-6969 (p)
ISSN 1986-5228 (o)
Metodika matematike

Jedno proširivanje klase $\mathcal{EF}$ elementarnih funkcija

Daniel A. Romano[1], Vladan Todić[2] i Milovan Vinčić[3]

Sažetak: U radu se konstruiše jedno proširenje klase elementarnih funkcija. Dato je nekoliko primjena tako proširene klase.

Ključne riječi i fraze: Osnovne funkcije, Elementarne funkcije, proširenje

Abstract: In this paper we construct an extension of the elementary functions class. We show some interesting applications of so constructed class.

Key words and phrases: Basic functions, Elementary functions, extension
Mathematics Subject Classification (2010): 26A09, 33B10, 97I20
ZDM Subject Classification (2010): D40, I20

1. Ubod

1.1. Klasu $\mathcal{OF}$ osnovnih funkcija u uređenom polju realnih brojeva **R** čine funkcije:

(a) *Konstantna funkcija*:

$$const_{\{a\}}: \mathbf{R} \ni x \to const_{\{a\}}(x) \in \{a\},$$

gdje je a neka konstanta;

(b) *Identitet*:

$$Id: \mathbf{R} \ni x \to x \in \mathbf{R};$$

(c) *Eksponencijalna funkcija*:

$$Exp_a : \mathbf{R} \ni x \to a^x \in \langle 0, +\infty \rangle,$$

gdje je a realna konstanta takva da je $a > 0$ i $a \neq 1$;

(d) *Funkcija sinus*:

$$sin: \mathbf{R} \ni x \to sin x \in [-1,1].$$

[1] Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Pedagoški fakultet Bijeljina, 76300 Bijeljina, Semberskih ratara bb, Bosna i Hercegovina, e-mail: bato49@hotmail.com
[2] Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Pedagoški fakultet Bijeljina, 76300 Bijeljina, Semberskih ratara bb, Bosna i Hercegovina, e-mail: vladantodic@gmail.com
[3] Univerzitet u Banjoj Luci, Mašinski fakultet Banja Luka, 78000 Banja Luka, Vojvode Stepe Stepanovića 75, Bosna i Hercegovina, e-mail: vincicm@yahoo.com

1.2. Klasu $\mathcal{EF}$ elementarnih hunkcija generišemo funkcijama klase $\mathcal{OF}$ tako da klasa $\mathcal{EF}$ bude zatvorena za primjenu konačno mnogo puta postupaka sabiranja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i superpozicije funkcija te uzimanjem inverza restrikcije funkcija do monotonih funkcija. Dakle, na primjer, linearna funkcija f : x $\to$ ax + b se dobija postupkom množenja identiteta i konsatntne funkcuije x $\to$ a te sabiranja dobijenog rezultata sa konstantnom funkcijom x $\to$ b. Zaista, imamo

$$f(x) = ((const_{\{a\}}) \cdot Id + const_{\{b\}})(x).$$

Indukcijom dobijamo stepenu funkciju:

$$st_1\ (x) = Id(x) = x,\ st_2\ (x) = ((Id)\cdot(Id))(x) = x^2,$$
$$st_3\ (x) = (st_2 \cdot st_1)\ (x) = x^3,\ \ st_4\ (x) = (st_3 \cdot st_1)\ (x) = x^4\ \ ...$$
$$st_n\ (x) = (st_{n-1} \cdot st_1)\ (x) = x^n\ (n \in \mathbf{N}).$$

Po definiciji uzimamo da je

$$st_0\ (x) = x^0 = 1.$$

Odavde, lako dobijamo polinom

$$p_n\ (x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k\ (n\in\mathbf{N} \cup \{0\};\ \ a_0\ , a_1\ , ..., a_n \in\mathbf{R})$$

Odmah se vidi da je $p_0(x) = a_0$, $p_1\ (x) = a_0 + a_1\ x$, ...
Familija svih ovih funkcija je komutativni prsten **R**[x] polinoma nad poljem realnih brojeva **R** u varijabli x. Dalje, na uobičajeni način[4], konstruišemo prsten razlomaka $Q_{\mathbf{R}}[x]$ prstena **R**[x]. Elementi tog prstena su racionalne funkcije

$$R : x \to R(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}\ .$$

Trigonometrijske funkcije *cos*, *tg* i *ctg* definišemo koristeći se funkcijom *sin* na slijedeći način:

$$cos : x \to sin(x - \frac{\pi}{2}),$$

(Funkcija *cos* je superpozicija jedne linearne funkcije $x \to x - \frac{\pi}{2}$ i funkcije *sin*.)

$$tg\text{: } x \to \frac{\sin}{\cos}(x)$$

$$ctg\text{: } x \to \frac{\cos}{\sin}(x)$$

Inverzi *Arcsin*, *Arccos*, *Arctg* i *Arcctg* funkcija *sin*, *cos*, *tg* i *ctg* nisu funkcije, ali su zato inverzi *arcsin*, *arccos*, *arctg* i *arcctg* njihovih restrikcija

$$sin_{[-\pi/2,\ \pi/2]}\ , cos_{[0,\pi]}\ , th_{[-\pi/2,\ \pi/2]}\ \text{i}\ ctg_{[0,\pi]}$$

respektivno takođe funkcije. Dalje, na primjer, linearne kombinacije

$$sh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ ch\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ ,$$

[4] Postupak konstruisanja prstena $Q_{\mathbf{R}}[x]$ nije elementaran.

gdje je *e* mali Eulerov broj, i količnici

$$tgh\mathrm{x} = \frac{shx}{chx},\ ctgh\mathrm{x} = \frac{chx}{shx}$$

i njihovi inverzi

$$Arsh = \mathrm{sh}^{-1} \quad (\mathrm{Arshx} = ln(\mathrm{x} + \sqrt{x^2+1})),$$

$$\mathrm{a}rch = (\mathrm{ch}|_{[0,+\infty>})^{-1} \quad (\mathrm{archx} = \ln(\mathrm{x}+\sqrt{x^2-1})),$$

$$Artgh = \mathrm{th}^{-1} \quad (Arth\mathrm{x} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x})$$

$$Arctgh = \mathrm{cgh}^{-1} \quad (Arcgh\mathrm{x} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{x-1})$$

takođe spadaju u elementarne funkcije, tj spadaju u klasu $\mathcal{EF}$.

Elementarne funkcije uopšte uzev nisu jednostavne. Na primjer, prema datoj definiciji, slijedeća funkcija

$$f(x) = \frac{e^{\sin(x^2)} + \sqrt[3]{15+\arccos(\log(\sin(x^2)))}}{\cos^{x+\sin e^z}(12x) + \sqrt{\dfrac{\cos x}{th(th(\sqrt{z}))}}} \quad (\mathrm{z} \in \mathbf{R})$$

je elementarna funkcija.

Primjer funkcije koja ne spada u klasu elementarnih funkcija je slijedeća tzv. '*funkcija greške*' (takođe se naziva i '*the Gauss error function'*)[5]

$$erf(\mathrm{x}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt\ .$$

Članak je namijenjen profesorima matematike - realizatorina nastave u višim razredima srednjih škola kao podsticaj promišljanju o alatima (višeg) matematičkog mišljenja koje bi trebalo razvijati kod starijih učenika.

2. Proširenje baze $\mathcal{OF}$

Klasa funkcija $\mathcal{EF}$ često se susreće u domenima u kojima se primjenjuje matematika. Međutim, unutar domene 'Metodike matematike', ova klasa funkcija je dosta 'neugodna'. Prvo, neke fukcije koje ulaze u tu klasu uopšte nisu jednostavne za razumijevanje. Na primjer, uobičajeni postupak determinisanja funkcije *sin* u sebi sadrži pojmove 'kretanja' i 'dužine luka', koje, sa svoje strane, zahtijevaju seriozno determinisanje. Dalje, uobičajeno determinisanje funkcije Exp_{a} prevazilazi kognitivne sposobnosti prosječnog učenika srednje škole iako se ona izučava u višim razredima svake srednje škole. Drugo, neke jednostavne pojave nije moguće ilustrovati pomoću funkcija ove klase funkcija. Na primjer, prekidna funkcija, koja

[5] Da ovako determinisana funkcija nije elementarna funkcija utvrđuje se pomoću Risch'ovog algoritma.

ima svojstvo jednostrane neprekidnosti, nije elementarna funkcija budući da je svaka elementarna funkcija neprekidna u svakoj tački svog domena.

Klasi osnovnih funkcija pridružimo neelementarnu funkciju – *signum funkciju*, zadana na slijedeći način:

$$sgn(\mathrm{x}) = \begin{Bmatrix} 1, & ako\ je\, x \rangle 0 \\ 0, & ako\ je\ x = 0 \\ -1, & ako\ je\ x \langle 0 \end{Bmatrix} \tag{1}$$

Cilj ovog rada je da procijenimo proširenje $\mathcal{EF}^*$ klase $\mathcal{EF}$ koja se dobija generisanjem na uobičajeni način iz klase $\mathcal{OF} \cup \{sgn\}$. Očigledno je da vrijedi

$$\mathcal{EF} \subseteq \mathcal{EF}^*.$$

Ovo proširivanje od klase $\mathcal{OF}$ do klase $\mathcal{OF} \cup \{sgn\}$, u psihološkom smislu, nije uopšte zahtijevno. Ova funkcija je poznata gotovo svakom učeniku viših razreda osnovne škole. To znači da kognitivnu ravan u kojoj će se nalaziti pojmovi i razumijevanja ovako proširene klase funkcija dosta jednostavno konstruišemo jednostavnom translacijom ranije konstruisane kognitivne ravni u kojoj se nalaze pojmovi i razumijevanja klase $\mathcal{OF}$. Logički, ova funkcija je veoma jednostavna. Jednostavnija je od, na primjer, funkcija Exp_{a} i *sin*, ili, na primjer, funkcije $log_{\mathrm{a}} = (Exp_{\mathrm{a}})^{-1}$.

U cilju upotpunjena izloženog materijala, podsjetimo se kako se u višim razredima srednjih škola uvodi funkcija Exp_{a}. Neka je a pozitivan realan broj različit od 1. Prvo se determiniše funkcija

$$Exp_{\mathrm{a}} : \mathbf{N} \ni \mathrm{n}\ \alpha\ \mathrm{a}^{\mathrm{n}} \in \mathbf{R}.$$

uz pretpostavku da učenici poznaju niz stepena realnog broja a:

$$\mathrm{a}^1, \mathrm{a}^2, \mathrm{a}^3, \ldots, \mathrm{a}^{\mathrm{n}}, \ldots$$

koji uvodimo indukcijom

$$\mathrm{a}^1 = \mathrm{a},\ \mathrm{a}^2 = \mathrm{a}\cdot\mathrm{a},\ \mathrm{a}^3 = \mathrm{a}\cdot\mathrm{a}\cdot\mathrm{a}, \ldots, \mathrm{a}^{\mathrm{n}} = \mathrm{a}^{\mathrm{n}-1}\cdot\mathrm{a} = \mathrm{a}\cdot\mathrm{a}^{\mathrm{n}-1}\ (\mathrm{n} \geq 2), \ldots$$

Dalje, ako pretpostavimo da učenici poznaju radikale nenegativnih realnih brojeva, možemo gornju funkciju proširiti do fukcije

$$Exp_{\mathrm{a}} : \mathbf{Q} \ni \frac{n}{m}\ \alpha\ a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \in \mathbf{R}.$$

Na kraju, uz pretpostavku da učenici znaju (jednu od najvažnijih) osobina uređenog polja **R** realnih brojeva: '*Svaki odozgo ograničen podskup skupa realnih brojeva ima supremum u skupu realnih brojeva.*' možemo determinisati funkciju

$$Exp_{\mathrm{a}} : \mathbf{R} \ni \mathrm{x}\ \alpha\ \mathrm{a}^{\mathrm{x}} = sup\{\mathrm{a}^{\mathrm{r}} : \mathrm{r} \in \mathbf{Q} \wedge \mathrm{r} \leq \mathrm{x}\} \in \mathbf{R}.$$

Iz ove sažete rekapitulacije metodološkog uvođenja funkcije Exp_{a} vidi se dubina problematike u kognitivnim ciljevima nastave matematike pri upoznavanju učenika viših razreda sa ovom funkcijom. Iako je ova funkcija veoma važna u razumijevanju velikog broja prirodnih pojava, sasvim opravdano se postavlja pitanje kakvi su ishodi nastave matematike u toku konstruisanja školskih znanja u vezi sa ovom funkcijom.[6]

---

[6] Bilo bi vrlo interesantno napraviti bar jedno istraživanje o školskom znanju o ovoj funkciji koje su sa sobom ponijeli svršeni učenici srednjih škola kod nas.

Pomoću funkcije *sgn* dosta dobro možemo opisati neke pojave. Naime, na primjer, pomoću linearne funkcije opisujemo pravolinijsko ravnomjerno kretanje, pomoću kvadratne funkcije opisujemo pravolinijsko kretanje sa konstantnim ubrzanjem, funkciju sinus koristimo za opisivanje oscilatornih kretanja, a eksponencijalnu funkciju za opisivanje prirodnog rasta i radioaktivnog raspada. S druge strane, funkcijom signum opisujemo izmjene koeficijenata prelamanja svijetlosti na granici između dvije sredine, a takođe izmjene potencijalne energije materijalne tačke.

Neke od jednostavnijih elementarnih osobina ove funkcije su:

(a) $sgn(-x) = -sgn(x)$;

(b) $|x| = sgn(x)\cdot x$;

(c) $x \neq 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}|x| = sgn(x)$.

Posmatrajmo neelementarnu funkciju δ, definisanu na slijedeći način:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & ako\ je\ x \neq 0 \\ 1, & ako\ je\ x = 0 \end{cases} \quad (x\in\mathbf{R})$$

Očigledno je da ova funkcija pripada klasi $\mathcal{EF}^*$. Zaista, lako se provjerava da vrijedi

$$\delta(x) = 1 - sgn^2 x \qquad (2)[7]$$

Razmotrimo još neke neelementarne funkcije koje pripadaju klasi $\mathcal{EF}^*$.

2.1. *Dirichleova funkcija*. Za funkcija *d*, definisana na slijedeći način

$$d(x) = \begin{cases} 1, & ako\ je\ x \in Q \\ 0, & ako\ je\ \neg(x \in Q) \end{cases} \quad (x\in\mathbf{R})$$

vrijedi

$$d(x) = \sum_{a\in Q}\delta(x-a).$$

Metodološki, prethodna jednakost, kojom pokazujemo da je funkcija *d* linearna kombinacija funkcija $x \to \delta(x - a)$ ($a\in\mathbf{Q}$) mogla bi pretstavljati problem pri intuitivnom pristupu sumi ovih funkcija po svim racionalnim brojevima a.[8] Međutim, ako problem sagledavamo analitički, lako se uočava da je $\delta(x - a) = 0$ za svako iracionalno x, $\delta(x - a) = 0$ za svako racionalno $x \neq a$ i $\delta(x - a) = 1$ za $x = a\in\mathbf{Q}$. Dakle, kompletna suma se reducira na 0 za iracionalno x i racionalno $x \neq a$, i na 1 za $x = a \in\mathbf{Q}$.

2.2. *Karakteristična funkcija razmaka*. Direktnim provjeravanjem, bez većih poteškoća, provjerava se da vrijedi:

$$\chi_{[0,+\infty>}(x) = \begin{cases} 1, & ako\ je\ x \geq 0 \\ 0, & ako\ je\ x\langle 0 \end{cases} = \frac{1}{2}(\operatorname{sgn} x + \delta(x) + 1) \qquad (4)$$

[7] Razliku $1 - sgn^2 x$, u metodološkom smislu, posmatramo kao transformaciju grafika funkcije *sgn* posredstvom niza funkcija

$$sgn x,\ sgn^2 x,\ -sgn^2 x,\ 1 - sgn^2 x$$

u kontekstu teme 'Tansformacije grafova funkcija'.

[8] Sasvim prirodno se postavlja pitanje: 'Da li je *d*(x) funkcija iz proširenja klase $\mathcal{EF}$?'

$$\chi_{<0,+\infty>}(x) = \begin{bmatrix} 1 \; ako \; je \; x \rangle 0 \\ 0 \; ako \; je \; x \le 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\operatorname{sgn} x - \delta(x) + 1) \quad (5)$$

$$\chi_{[0,1>}(x) = \begin{bmatrix} 1, \; ako \; je \; 0 \le x \langle 1 \\ 0, \; ako \; je \; x \notin [0,1) \end{bmatrix} = \chi_{[0,+\infty>}(x) + \chi_{<0,+\infty>}(x) - 1 \quad (6)$$

odakle zaključujemo da svaka od gore navedenih funkcija pripada klasi $\mathcal{EF}^*$.

2.3. *Funkcija cijeli dio broja*. Ako se podsjetimo da za fiksiran prirodan broj n imamo

$$\chi_{[0,1>}(x - n) = \begin{bmatrix} 1, \; ako \; je \; x \in [n, n+1\rangle \\ 0, \; ako \; je \; x \notin [n, n+1) \end{bmatrix},$$

lako se vidi da vrijedi

$$[x] = \sum_{n \in Z} n \chi_{[0,1)}(x - n) \quad (7)$$

Ako provedemo razmatranje analogno razmatranju izloženom u fusnoti [3] uvjeravamo se da i ova funkcija pripada klasi $\mathcal{EF}^*$.

2.4. *Funkcija razlomljeni dio broja*. Lako se vidi da vrijedi

$$(x) = x - [x]$$

pa i ova funkcija pripada klasi $\mathcal{EF}^*$.

2.5. Funkcija povezana sa funkcijom *sgn* je tzv. *Heaviside step funkcija*, definisana ovako,

$$H(x) = \begin{Bmatrix} 1, \; ako \; je \, x \rangle 0 \\ \frac{1}{2}, \; ako \; je \; x = 0 \\ 0, \; ako \; je \; x \langle 0 \end{Bmatrix}.$$

Motivacija za jednakost $H(0) = \frac{1}{2}$ proističe iz slijedećih jednakosti koje vrijede za ovu funkciju

$$H(x) = \frac{1}{2}(sgn(x)+1),$$

$$H(-x) = 1 - H(x).$$

Dakle, funkcija H pripada klasi $\mathcal{EF}^*$.

2.6. Neka su a i b realni brojevi takvi da je $a < b$. Tada za realnu funkciju f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definisanu sa $f(x) = 4$ za $x \in \langle a,b \rangle$, $f(a) = f(b) = 2$ i $f(x) = 0$ za $x \notin [a,b]$. imamo:

$$f(x) = 4(H(x-a) - H(x-b)).$$

Dakle, uvažavajći gore navedene primjere, zaključujemo da je $\mathcal{EF} \subset \mathcal{EF}^*$.

3. Primjene

Gore navedene funkcije iz klase $\mathcal{EF}^*$ omogućavaju nam da, u metodološkom smislu, prezentiramo nekoliko primjera od interesa za poznavanje i razumijevanje realnih funkcija realne varijable i njihovih osobina.

3.0. Funkcija data sa $f(x) = \begin{cases} x, & x \in Q \\ -x, & x \in R \setminus Q \end{cases}$ je zanimljiva jer je neprekidna u tački 0, dok u svim ostalim tačkama ima prekid druge vrste. Ovu funkciju možemo napisati kao $f(x) = (2d(x) - 1)x$.

3.1. Na primjer, funkcija *f*, zadana sa *f*(x) = *sgn*x + δ(x), je neprekidna s desna u tački 0 i, istovremeno, ima prekid u toj tački, dok je, na primjer, funkcija *g*, data sa *g*(x) = x^2 + *sgn*x - δ(x), neprekidna s lijeva u tački 0 i, istovremeno, ima prekid u toj tački. Odavde, po analogiji bez poteškoća možemo konstruisati beskonačno mnogo funkcija ovog tipa. U oba slučaja, očigledno, funkcije pripadaju klasi $\mathcal{EF}^*$.

3.2. Po dijelovima elementarna funkcija *f*, na primjer definisana sa,

$$f(x) = \left[\begin{array}{l} \sin x,\ ako\ je\ x \geq 2 \\ x^2,\ ako\ je\ x \langle 2 \end{array}\right. = \chi_{<-\infty,2>}(x) \cdot x^2 + \chi_{[2,+\infty>}(x) \cdot sin x$$

prikazana je kao kombinacija funkcija klase $\mathcal{EF}^*$ te i sama pripada klasi $\mathcal{EF}^*$. S druge strane, na primjer, pretpostavimo da po dijelovima elementarnu funkciju *g*, datu sa

$$g(x) = \left[\begin{array}{l} \sqrt{-x},\ ako\ je\ x \leq 0 \\ \ln x,\ ako\ je\ x \rangle 0 \end{array}\right.,$$

možemo prikazati na slijedeći način:

$$\chi_1(x) \cdot \sqrt{-x} + \chi_2(x) \cdot ln x$$

gdje su χ_1 (x) i χ_2 (x) karakteristične funkcije nekih razmaka. Domen ovako date kombinacije funkcija je, očigledno, prazan skup, dok je funkcija *g* svuda definisana. Dakle, funkcija *g* se ne može predstaviti kao linearna kombinacija datih funkcija sa nekim karakterističnim funkcijama kao koeficijentima te kombinacije. Prema tome, ova po dijelovima elementarna funkcija ne pripada klasi $\mathcal{EF}^*$. Dakle, svaka po dijelovima elementarna funkcija ne pripada klasi $\mathcal{EF}^*$.

3.3. Neka je data funkcija *h* na slijedeći način *h*(x) = *f*(x) + λδ(x - 2), pri čemu je *f* funkcija determinisana u tački 3.2. Dakle,

$$h(x) = \chi_{<-\infty,2>}(x) \cdot x^2 + \chi_{[2,+\infty>}(x) \cdot \sin x + \lambda\delta(x-2).$$

Imamo:

(a) Za λ = 4 – *sin*2, funkcija *h* je neprekidna s lijeva u tački 2;

(b) Za λ = 0, funkcija *h* je neprekidna s desna u tački 2;

(c) Za λ < 0, funkcija *h* ima lokalni minimum u tački 2;

(d) Za $\lambda \geq 4 - sin2$ funkcija h ima lokalni maksimum u tački 2; i
(e) Za $0 < \lambda < 4 - sin2$ funkcija h nema lokalni maksimum u tački 2.

3.4. Bez velikih poteškoća može se utvrditi da:
(1) Funkcija $f(x) = x^2$ ima u tački 0 lokalni minimum te da slijeva te tačke funkcija f opada lijevo od te tačke a raste desno od te tačke.
(2) Funkcija $g(x) = -x^2 - \delta(x)$ ima lokalni minimum u tački 0 te slijeva te tačke funkcija g raste a opada desno od te tačke.
(3) Funkcija $h(x) = x - \delta(x)$ takođe ima lokalni minimum tački 0 a lijevo i desno od te tačke je rastuća funkcija.
(4) Funkcija $h(x) = -x - \delta(x)$ takođe ima lokalni minimum u tački 0 a lijevo i desno od te tačke je opadajuća funkcija.
(5) Posmatrajmo funkciju $i(x) = d(x) - 2\delta(x)$. U tački 0 ima lokalni minimum, a lijevo i desno od te tačke nije monotona.

Upoznavanje studenata sa ovdje izloženim funkcijama je poželjno jer ovi primjeri razbijaju njihovo uvjerenje da je postojanje lokalnog ekstrema povezano sa monotonošću funkcije u nekom okruženju oko apscise tog lokalnog ekstrema.

Zahvalnost. Autori rada se zahvaljuju anonimnim recenzentima na korisnim sugestijama koje su podigle kvalitet informacija iznesenih u ovom tekstu.

L i t e r a t u r a :
korištena i/ili konsultovana pri pisanju ovog teksta

[1] D. Adnađević i Z. Kadelburg, *Matematička analiza*, Tom I, II, Zavod za udzbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1991.
[2] Б.П.Демидович: *Задачи и упражнения по математическому анализу*; Наука, Москва, 1977.
[3] Paul Ernest: *Šta je filozofija matematičkog obrazovanja*? IMO, Vol. II (2010), Broj 2, 11-20
[4] Г.М. Фихтенголц: *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Наука, Москва, 1966.
[5] John E. Hutchinson: *Introduction To Mathematical Analysis*; Department of of Mathematical Sciences ANU, 1997
[6] Duško Jojić i Milovan Vinčić: *Matematika 1 kroz vježbe i primjere*; Filozofski fakultet, BLU, Banja Luka 2007.
[7] Vladimir Jovanović: *Matematička analiza, 1*; Prirodno-matematički fakultet, Banja Luka 2008
[8] Daniel A. Romano: *Motivi za izučavanje matematičkog mišljenja*; Nastava matematike (Beograd), LIII (3-4)(2008), 1-11
[9] Daniel A. Romano: *Šta znamo o matematičkom mišljenju*? MAT-KOL (Banja Luka), Posebna izdanja, Broj 13 (2010)

Primljeno, 26.07.2010.