MAT-KOL (Banja Luka)
XVI(2)(2010), 19-22

ISSN 0354-6969 (p)
ISSN 1986-5228 (o)
Metodika matematike

GENERALIZACIJA VAN SCHOUTENOVE*) TEOREME

(A Generalisation of Van Schouten's theorem)

Šefket Arslanagić[1)]

Sažetak: U radu je data generalizacija Van Schoutenove teoreme iz geometrije koristeći kompleksne brojeve u trigonometrijskom obliku.

Ključne riječi: generalizacija, Van Schoutenova teorema, pravilni mnogougao, opisana kružnica, kompleksan broj u trigonometrijskom obliku.

Abstract: In this paper we prove the generalisation of Van Schouten's theorem from geometry utilited complex numbers in trigonometric form.

Key words and phrases: generalisation, Van Schoutens theorem, regular polygon, circumcircle, complex number in trigonometric form.

AMS Subject Classification (2010): **51M04, 97G40**
ZDM Subject Classification (2010): **G40**

U [3] je dato devet raznih rješenja jednog zadatka iz geometrije koji glasi:

Oko jednakostraničnog trougla ΔABC opisana je kružnica. Dokazati da za svaku tačku M luka $\overset{\frown}{AC}$ kome ne pripada tačka B, tj. tačke B i M su sa raznih strana prave AC, važi jednakost $\overline{MA}+\overline{MC}=\overline{MB}$, (sl.1)

U matematičkoj literaturi ova činjenica je poznata kao Van Schoutenova teorema.
Sada ćemo dati generalizaciju Van Schoutenove teoreme koja glasi:

---

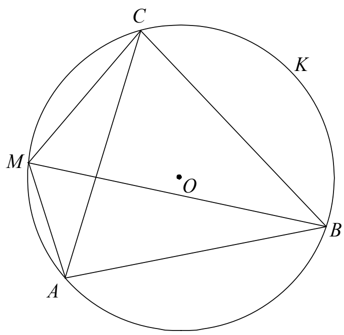
*) Franz van Schooten, 1615.-1666., holandski matematičar

1) Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu, Odsjek za matematiku, 71000 Sarajevo, Zmaja od Bosne 35, BiH; e-mail:asefket@pmf.unsa.ba

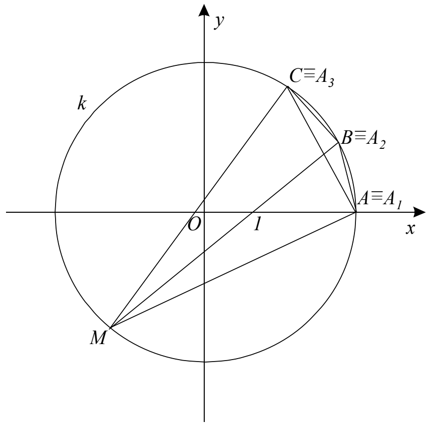
Neka su tačka A,B,C tri uzastopna vrha pravilnog n - tougla i neka tačka M pripada opisanoj kružnici tom n-touglu i pri tome su tačke B i M sa raznih strana prave AC. Tada važi jednakost:

$$\overline{MA}+\overline{MC}=2\overline{MB}\cos\frac{\pi}{n}. \qquad (1)$$

Dokaz: Posmatrajmo kompleksnu ravan sa koordinatnim početkom u tački O koja je centar opisane kružnice k pravilnom n- touglu i neka je 1 koordinata vrha $A_1\equiv A$ mnogougla $A_1A_2\cdots A_n$ (sl.2).



sl.1



sl.2

Ako je $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ tada je ε^{k-1} koordinata tačke A_k, $(k=1,2,3,...,n)$.

Ne umanjujući općenitost, pretpostavićemo da je $A\equiv A_1$, $B=A_2$ i $C\equiv A_3$. Neka je $z_M=\cos t+i\sin t;\ t\in[0,2\pi)$ koordinata tačke $M\in k$. Budući da su tačke B i M sa raznih strana prave AC, to slijedi da je $\frac{4\pi}{n}<t$. Tada je

$$\overline{MA}=|z_M-1|=\sqrt{(\cos t-1)^2+\sin^2 t}=\sqrt{2-2\cos t}=2\sin\frac{t}{2};$$

$$\overline{MB}=|z_M-\varepsilon|=\sqrt{\left(\cos t-\cos\frac{2\pi}{n}\right)^2+\left(\sin t-\sin\frac{2\pi}{n}\right)^2}$$

$$=\sqrt{2-2\left(\cos t\cos\frac{2\pi}{n}+\sin t\sin\frac{2\pi}{n}\right)}$$

$$=\sqrt{2\left[1-\cos\left(t-\frac{2\pi}{n}\right)\right]}=2\sin\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{n}\right);$$

$$\overline{MC} = \left|z_M - \varepsilon^2\right| = \left|\cos t + i\sin t - \left(\cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}\right)\right|$$

$$= \sqrt{\left(\cos t - \cos\frac{4\pi}{n}\right)^2 + \left(\sin t - \sin\frac{4\pi}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2 - 2\left(\cos t\cos\frac{4\pi}{n} + \sin t\sin\frac{4\pi}{n}\right)}$$

$$= \sqrt{2\left[1 - \cos\left(t - \frac{4\pi}{n}\right)\right]} = 2\sin\left(\frac{t}{2} - \frac{2\pi}{n}\right).$$

Jednakost (1), tj. $\overline{MA} + \overline{MC} = 2\overline{MB}\cos\frac{\pi}{n}$ je sada ekvivalentna jednakosti:

$$2\sin\frac{t}{2} + 2\sin\left(\frac{t}{2} - \frac{2\pi}{n}\right) = 4\sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}$$

koja je tačna jer slijedi nakon pretvaranja zbira na njenoj lijevoj strani u proizvod, tj.:

$$2\sin\frac{t}{2} + 2\sin\left(\frac{t}{2} - \frac{2\pi}{n}\right) =$$

$$= 2\cdot 2\sin\frac{\frac{t}{2} + \frac{t}{2} - \frac{2\pi}{n}}{2}\cos\frac{\frac{t}{2} - \frac{t}{2} + \frac{2\pi}{n}}{2}$$

$$= 4\sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}\ .$$

□

Sada ćemo dati tri posljedice jednakosti (1).

Posljedica 1. Za $n = 3$, dobijamo iz (1):

$$\overline{MA} + \overline{MC} = 2\overline{MB}\cos\frac{\pi}{3},$$

odnosno

$$\overline{MA} + \overline{MC} = \overline{MB},$$

a ovo je Van Schoutenova teorema.

Posljedica 2. Za $n = 4$, tada za tačku M koja pripada opisanoj kružnici k kvadrata $ABCD$, i pri tome su tačke B i M sa raznih strana prave AC, slijedi iz (1):

$$\overline{MA} + \overline{MC} = 2\overline{MB} \cos \frac{\pi}{4},$$

odnosno

$$\overline{MA} + \overline{MC} = \sqrt{2}\, \overline{MB}.$$

Posljedica 3. Za $n = 6$, za tačku M koja pripada kružnici k opisanoj pravilnom šestouglu $ABCDEF$, gdje su tačke B i M sa raznih strana prave AC, dobijamo iz (1):

$$\overline{MA} + \overline{MC} = 2\overline{MB} \cos \frac{\pi}{6},$$

odnosno

$$\overline{MA} + \overline{MC} = \sqrt{3}\, \overline{MB}.$$

L I T E R A T U R A

[1] **T. Andreescu, D. Andrica**, *Complex Numbers from A to ... Z*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2004.

[2] **Š. Arslanagić**, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[3] **Š. Arslanagić i A.Muminagić**, *Devet rješenja jednog zadatka iz geometrije*, MAT-KOL (Banja Luka), XIV (3) (2008), 12-21.

Primljeno, 17. Septembar 2010.