MAT-KOL (Banja Luka)
ISSN 0354-6969 (p), ISSN 1986-5228 (o)
Vol. XVI (1)(2010), 23-27

Zbir k-tih stepena prvih n prirodnih brojeva pomoću Abelove formule

Milovan Vinčić[1]

Sažetak: Pokazano je kako se na jednostavan način, rješavanjem sistema linearnih jednačina, može izračunati zbir prirodnih stepena prvih n prirodnih brojeva .

Ključne riječi : zbir, formula, polinom, Vandermondova determinanta

Abstract: In this paper we show a way to calculate the sum of the power of first n numbers by solving sistem of linear equations.

Subject Classification (2010): 11C20,
Key words and phrases: sum, formula, polynom, Vandermonde determinant

Koristeći Abelovu sumacionu formulu, izvešćemo formulu za izračunavanje sume k-tih stepena $(k \in N)$ prvih n prirodnih brojeva

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k \ .$$

Abelova sumaciona formula glasi:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} ((a_i - a_{i+1}) \sum_{k=1}^{i} b_k) + a_n \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$(\ n \in N \ , \ n > 1, \ a_i \, , \ b_i \in N \ ) \ .$$

Dokaz ove formule ćemo provesti matematičkom indukcijom .

Za n = 2 Abelova formula je očigledno tačna, jer je jednakost

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = (a_1 - a_2) b_1 + a_2 (b_1 + b_2)$$

tačna, tj. tačno je

$$\sum_{i=1}^{2} a_i b_i = \sum_{i=1}^{1} ((a_i - a_{i+1}) \sum_{k=1}^{i} b_k) + a_2 \sum_{k=1}^{2} b_k \ .$$

Izvedimo sada korak indukcije, tj. pokažimo da istitost Abelove formule prelazi sa n na n+1 za sve n > 1. U tom cilju, imamo:

[1] Mašinski fakultet Univerziteta u Banjoj Luci, 78000 Banja Luka, Vojvode Stepe Stepanovića 75, B&H, e-mail: vincicm@yahoo.com

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + a_{n+1} b_{n+1} =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} ((a_i - a_{i+1}) \sum_{k=1}^{i} b_k) + a_n \sum_{k=1}^{n} b_k + a_{n+1} b_{n+1} = \sum_{i=1}^{n-1} ((a_i - a_{i+1}) \sum_{k=1}^{i} b_k) +$$
$$(a_n - a_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} b_k + a_{n+1} \sum_{k=1}^{n} b_k + a_{n+1} b_{n+1} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} ((a_i - a_{i+1}) \sum_{k=1}^{i} b_k) + a_{n+1} (\sum_{k=1}^{n} b_k + b_{n+1}) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} ((a_i - a_{i+1}) \sum_{k=1}^{i} b_k) + a_{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} b_k .$$

Ovim je dokazana Abelova sumaciona formula.

Pokažimo sada kako Abelovu formulu možemo jednostavno primjeniti za izvođenje formule za zbir prvih n prirornih brojeva

$$S_1(n) = 1 + 2 + \cdots + n \;.$$

Prema Abelovoj formuli je: $S_1(n) = \sum i \cdot 1$

$$S_1(n) = \sum_{i=1}^{n-1} ((i - (i+1)) \sum_{k=1}^{i} 1) + n \sum_{k=1}^{n} 1$$
$$S_1(n) = -\sum_{i=1}^{n-1} i + n \cdot n$$
$$S_1(n) = -S_1(n-1) + n^2$$
$$S_1(n) = -(S_1(n) - n) + n^2 \;.$$

Konačno :

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2} \;.$$

Naravno, ova formula je tačna i za $n = 1$.

Izračunajmo sada $S_2(n)$. Prema Abelovoj sumacionoj formuli, je:

$$S_2(n) = \sum_{n=1}^{n} i^2$$
$$S_2(n) = \sum_{i=1}^{n-1} ((i^2 - (i+1)^2) \sum_{k=1}^{i} k) + n^2 \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$S_2(n) = \sum_{i=1}^{n-1}((-2i-1)\cdot i) + n^3$$

$$S_2(n) = -2S_2(n-1) - S_1(n-1) + n^3$$

$$S_2(n) = -2S_2(n) + 2n^2 - S_1(n) + n + n^3$$

$$3S_2(n) = n^3 + 2n^2 - \frac{n(n+1)}{2} + n \ .$$

Iz posljednje jednakosti, konačno, slijedi :

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ ,$$

koja je istinita i za $n = 1$.

Posmatrajmo sada $S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k \quad (k, n \in N)$. Prema Abelovoj formuli, redom zaključujemo:

$$S_k(n) = \sum_{i=1}^{n}(i^k \cdot 1)$$

$$S_k(n) = \sum_{i=1}^{n-1}((i^k - (i+1)^k)\sum_{k=1}^{i}1) + n^k\sum_{k=1}^{n}1$$

$$S_k(n) = \sum_{i=1}^{n-1}(-\binom{k}{1}i^k - \binom{k}{2}i^{k-1} - \cdots - \binom{k}{k-1}i^k - i) + n^{k+1} \ .$$

Kako za $n > 1$ vrijedi $S_k(n-1) = S_k(n) - n^k$, to, dalje, slijedi :

$$S_k(n) = -k(S_k(n) - n^k) - \binom{k}{2}(S_{k-1}(n) - n^{k-1}) - \cdots - \binom{k}{k-1}(S_2(n) - n^2) - (S_1(n) - n) + n^{k+1}$$

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}(n^{k+1} + kn^k - \binom{k}{2}S_{k-1}(n) + \binom{k}{2}n^{k-1} - \cdots - \binom{k}{k-1}S_2(n) + \binom{k}{k-1}n^2 - S_1(n) + n) \quad (1)$$

Induktivno se provjerava da je

$$S_k(1) = 1 \text{ za sve } k \in N \ .$$

Koristeći posljednju jednakost možemo počevši od $S_1(n)$, rekurzivno računati $S_2(n)$, $S_3(n)$, itd. Jasno, što je k veći , to je i računanje teže. Međutim, iz (1) jednostavno zaključujemo da za svako $k \in N$ postoji polinom $P_{k+1}(n)$ sa racionalnim koeficijentima, stepena $k+1$, takav da za svako $n \in N$ vrijedi

$$S_k(n) = P_{n+1}(n) \ .$$

Vodeći koeficijent u polinomu $P_{k+1}(n)$ očigledno je $\frac{1}{k+1}$, a možemo i jednostavno izračunati koeficijent uz n^k. Iz (1) vidimo da je koeficijent uz n^k :

$$\frac{1}{k+1}(k-\binom{k}{2}\frac{1}{k})=\frac{1}{k+1}(k-\frac{k(k-1)}{2}\frac{1}{k})=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{k+1}{2}=\frac{1}{2} .$$

Tako smo došli do slijedeće

Teorema: *Postoje racionalni brojevi* $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ *takvi da za svako* $n,k\in N$ *vrijedi* :

$$\sum_{i=1}^{n} i^k=\frac{1}{k+1}n^{k+1}+\frac{1}{2}n^k+a_1n^{k-1}+...+a_{k-1}n . \qquad (2)$$

Koeficijente $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ možemo izračunati tako da u (2) uvrstimo prvih n prirodnih brojeva, pa ćemo dobiti sistem

$$\begin{array}{llll} a_1+ & a_2+ & \cdots+a_{k-1} & =L_1 \\ a_1\cdot 2^{k-1}+ & a_2^{k-2}\cdot 2^{k-2}+ & \cdots+a_{k-1}\cdot 2 & =L_2 \\ & ------------ & & \\ a_1\cdot(k-1)^{k-1}+ & a_2\cdot(k-1)^{k-2}+ & \cdots+a_{k-1}\cdot(k-1) & =L_{k-1} \end{array}$$

$$(L_j=S_k(j)-\frac{1}{k+1}j^{k+1}-\frac{1}{2}j^k , \quad j=1,\cdots,k-1) .$$

Ovaj sistem ima jedinstveno rješenje jer je njegova determinanta - Vandermondova determinanta $W(1,2,\cdots,k-1)$, koja je očigledno različita od nule. Primjetimo da iz (2) direktno slijedi :

$$S_1(n)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n ,$$

tj.

$$S_1(n)=\frac{n(n+1)}{2} .$$

Na kraju, izračunajmo $S_3(n)$. Prema (2), je

$$S_3(n)=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+a_1n^2+a_2n .$$

Uvrštavajući u ovu jednakost brojeve 1 i 2 za a_1 i a_2 dobijamo sistem :

$$\begin{aligned} a_1 + \quad a_2 &= \frac{1}{4} \\ 4a_1 + \quad 2a_2 &= 1 \end{aligned} \quad ,$$

koji ima rješenje

$$a_1 = \frac{1}{4},\ a_2 = 0\ .$$

Prema tome je :

$$S_3(n) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2\ ,$$

tj.

$$S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\ .$$

Literatura :

[1] Đura Paunić: *Funkcionalne jednačine klasičnih matematičkih funkcija*, Zavod za udžbenike Srbije i Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2009.
[2] Šefket Arslanagić: *Matematička čitanka*, Grafičar promet, Sarajevo, 2008.
[3] Boris Pavković i B. Dakić: *Polinomi*, Školska knjiga, Zagreb,1987.