MAT-KOL (Banja Luka)
ISSN 0354-6969 (p), ISSN 1986-5228 (o)
Vol. XVI (1)(2010), 5-14

O DVIJE KLASE JEDNAČINA KAO JEDNOM MATEMATIČKOM PROBLEMU

Bernadin Ibrahimpašić[1], **Daniel A. Romano**[2] **i Milovan Vinčić**[3]

Abstract

Matematički problem se, u suštini, razlikuje od matematičkog zadatka. Međutim, ima slučajeva kada su ta dva pojma nerazlučivo bliska. U radu su navedena dva primjera matematičkih zadataka koje, kao klasu zadataka, treba tretirati kao jedan matematički problem. Rješenje jednog matematičkog problema daje tehniku za rješavanje klase matematičkih zadataka. Imamo da se rješavanje različitih jednačina koje su oblika $f(\alpha(x)) = f(\beta(x))$ ili $f(f(x)) = x$, svodi na rješavanje jednačine oblika $\alpha(x) = \beta(x)$, odnosno oblika $f(x) = x$, ako je funkcija f, u prvom slučaju strogo monotona, a u drugom monotono neopadajuća. Osim toga, u radu je ukazano i na distinkciju između ove dvije klase jednačina.

ZDM Subject Classification (2000): C30, D50, H30

Ključne riječi i fraze: matematički problem, matematički zadatak, strogo monotona funkcija, jednačina.

Abstract

There is difference between nouns "mathematical problem" and "mathematics task". But, there is a situation when those notions are indiscernibly tied. The purpose of this paper is to express two mathematics tasks which need to be treated as a mathematics problem. Solving of this mathematics problem gives technique for solving of two mathematic tasks classes. As examples, in paper we show how to solve classes of equations $f(\alpha(x)) = f(\beta(x))$ and $f(f(x)) = x$.

Key words and phrases: mathematics problem, mathematics task, strictly monotonic function, equation.

[1]Pedagoški fakultet, Univerzitet u Bihaću, Džanića mahala 36, 77000 Bihać, Bosna i Hercegovina, *e-mail: bernadin@bih.net.ba*

[2]Pedagoški fakultet Bijeljina, Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Ulica semberskih ratara, bb., 76300 Bijeljina, Bosna i Hercegovina, *e-mail: bato49@hotmail.com*

[3]Mašinski fakultet, Univerzitet u Banja Luci, Vojvode Stepe Stepanovića 75, 78000 Banja Luka, Bosna i Hercegovina, *e-mail: mvincic@yahoo.com*

1 Uvod

U radu se tretira, u skladu sa dostupnom literaturom o savremnom istraživanju matematičkog obrazovanja ([2], [3], [5], [7], [9], [11], [13]), distinkcija između pojma "matematički problem" i pojma "matematički zadatak". Pojam "problem" je širi od pojma "zadatak". U radu se tretiraju dvije klase jednačina – jednačine oblika $f(\alpha(x)) = f(\beta(x))$ i $f(f(x)) = x$, pri čemu su f, α i β zadane realne funkcije realne vatrijable, te se kao jedan matematički problem postavlja pitanje kada će prethodno pomenute jednačine biti ekvivalentne jednačinama $\alpha(x) = \beta(x)$ i $f(x) = x$, respektivno?

U drugom dijelu, sublimirajući literaturu [1], [3], [4], [5], [6], [7], [9], [10] i [12] ponuđena je teorijska osnova za distinkciju ovih pojmova. U trećem dijelu su date dvije tvrdnje koje omogućavaju rješavanje matematičkih zadataka ove dvije klase jednačina, po jedan egzaktan urađen primjer za svaku od tih klasa. Dato je i nekoliko neurađenih primjera da se ilustruje kompleksnost ovih zadataka i složenost rješavanja ovih zadataka na standardni način.

2 Background - teorijske osnove

Mnogi nastavnici koriste riječ "problemi" da opišu zadatke u matematičkim priručnicima. Ali, postavlja se pitanje da li su to stvarno problemi? U ovom dijelu biće objašnjeno šta zapravo čini matematički problem. Počećemo s tri Hendersonova i Pingrijeva [5] uslova za situaciju da bi postojao problem za određenog pojedinca:

1. Pojedinac ima jasno određen cilj kojeg je svjestan i želi da postigne njegovo ostvarenje.
2. Pojavljuju se prepreke na putu ka cilju i određeno ponašanje ili uobičajene reakcije pojedinca nisu dovoljne za uklanjanje te prepreke.
3. Nastupa uviđaj u problem. Pojedinac postaje svjestan problema, definiše ga više ili manje jasno, postavlja razna moguća rješenja i provjerava njihove mogućnosti.

Postoje tri kriterija u prvoj situaciji. Prvi je tačno određen cilj, drugi je da osoba mora znati koji je cilj, a treći kriterij je da osoba želi ostvarenje cilja. Lester [6] je interpretirao riječ "želja" kao "interes osobe za rješavanje situacije". Šta ako osoba nije zainteresovana? U učionici, ako neki učenik odbije da pokuša riješiti zadatak koji je nastavnik postavio (prvi i treći kriterij nisu zadovoljeni), onda ovi zadaci nisu problemi za učenika. Međutim, šta ako nezainteresovani učenik pokuša riješiti zadatak (treći kriterij je zadovoljen, ali prvi nije) jer je ovo dio koji je škola ili nastavnik podstakao ili nametnuo učeniku da radi? Ako učenik ne može da riješi zadatke, da li su to i dalje problemi za učenika? Ovo je ozbiljan pedagoški problem. Ako zadaci nisu problem učeniku, onda nastavnik ne mora ništa da uradi da pomogne učeniku. Ali, iz perspektive učenika, ovi zadaci su i dalje problemi jer oni imaju problem da ga riješe. Stoga, interes osobe nije kriterij da se odredi da li je data situacija problem za učenika ili ne. Prema Cambridge Dictionaries Online, riječ "želi" znači "hoće" (slično kao i u našim lokalnim jezicima) i osoba možda želi nešto iz potrebe i odgovornosti a ne iz interesa. Drugo značenje "hoće " je "treba". U učionici, nezainteresovan učenik možda hoće ili treba da riješi zadatke, bilo svojevoljno ili ne, i ako riječ "želi" gledamo kao "hoće" ili "treba" u Hendersonovom i Pingrimovom prvom kritreriju, onda će situacija i dalje biti problem osobi ako ona hoće ili treba da ostvari cilj, ali ne može to da uradi. U biti, Reys, Lindquist, Lambdin, Smith i Suydam [9] su definisali problem kao "situaciju u kojoj osoba želi nešto i ne zna odmah kako da dođe do toga".

Drugi uslov [6] je da osoba "ne može odmah da pređe na rješenje". Reys je vjerovao da ova poteškoća zahtijeva "kreativni napor i visok nivo razmišljanja da bi se prevazišla". Shoenfeld [12] također smatra da "težina treba da bude prije intelektualni argument nego mehanički". On je dao primjer da bi, ako invertiramo matricu 27×27, to bio dosadan zadatak za njega, ali to za njega nije bio problem. Tako da dosada u korištenju računskih metoda nije faktor za određivanje toga da li je situacija problem ili ne. A šta ako učenik ne zna da invertuje matricu 27×27? Oni su možda naučili kako da invertuju 2×2 matricu, ali mali broj njih zna kako da invertuju kvadratnu matricu većih dimenzija. Problem može biti i u proceduri. Ali, ako je to samo rutinska operacija koja lako može da se nađe u uobičajenim priručnicima, onda ovaj zadatak ne bi trebao da predstavlja problem učenicima.

Treći uslov [6] je da osoba mora da napravi "isplaniran pokušaj da dođe do rješenja". Šta će se dogoditi ako osoba ne pokuša riješiti zadatak? Na primjer, u stvarnom životu, ako osoba pokuša da pobjegne od svog problema umjesto da pokuša da ga riješi, znači li to da situacija više ne predstavlja problem za tu osobu? Zar to nije kao gurnuti problem pod tepih i praviti se da on ne postoji, ali se postavlja pitanje da li problem stvarno ne postoji? Zamislimo noja koji zabije glavu u pijesak kada osjeti opasnost. Dokle god taj noj ne vidi izvor opasnosti, da li će mu to predstavljati problem? Što je najgore, ta opasnost može noja koštati života. Ovo se može posmatrati na dva načina. Sa stanovišta osobe ili noja. S jedna tačke gledanja, problema nema, ali s druge tačke gledanja, problem je još uvijek tu. Za koju perspektivu ćemo se odlučiti, zavisi od same situacije. Ako je situacija ozbiljna, onda prvo stanovište neće biti od pomoći za tu osobu, iako se može dogoditi da se sve riješi samo od sebe, nakon nekog vremena. Ako se situacija ne tiče te osobe, onda ići drugim putem ne bi bilo od pomoći. Na primjer, postoji mnogo pitanja u fizici na koja ne znamo odgovor, i da su ova pitanja problemi značilo bi da imamo mnogo problema u životu. To bi bilo jako teško, ali nas se možda ti problemi ne tiču. Tako da, koju ćemo perspektivu odabrati, zavisi od toga da li se situacija tiče nas ili koliko je ozbiljna. U učionici, ako učenik ne pokuša da riješi zadatke koje je nastavnik postavio, onda s prve tačke gledišta, ovi zadaci nisu problemi učeniku. Ali da li ovo pomaže učeniku?

Vidjeli smo formu problema s tačke gledišta učenika. Sada ćemo pogledati sa strane nastavnika. Kada nastavnik napravi ili odabere zadatak za svoje odjeljenje, on će obično napraviti zadatke prema prosječnim učenicima u odjeljenju.

Ali ako prosječni učenici nisu zainteresovani za bilo kakav rad, onda zadatak nije problem učenicima. Da li to znači da će nastavnik postaviti veoma kompleksan zadatak budući da im to ne predstavlja problem. Sa stanovišta nastavnika, prilikom odlučivanja koji je zadatak prikladan za odjeljenje, korisnije bi bilo da se koristi Hendersonov i Pingrimov [5] drugi uslov, da je zadatak problem nekome, ako osoba ne može odmah preći na rješavanje. To što učenici žele da urade zadatak ili tačnije pokušaju da ga rješe ne bi trebalo da bude faktor pri odlučivanju da li će zadatak predstavljati problem prosječnim učenicima u razredu. Naravno, ako učenik ne želi da uradi zadatak, onda će se to ticati nastavnika, ali to je već sasvim drugi problem za nastavnika.

Neki prosvjetitelji ne prave razliku između istraživanja i istraživačkih zadataka. Na primjer, Orton i Frobisher [7] su poredili razlike između problema i istraživanja, dok Evans [4] razlikuje rješavanje problema i istraživanje. Ipak postoji razlika između problema i rješavanja problema. Problem se odnosi na situaciju koja je problematična za osobu, a u učionici, obično se odnosi na dati zadatak, dok se rješavanje problema odnosi na sam proces rješavanja. Ako rješavanje problema gledamo kao aktivnost, onda to uključuje i problem i proces kojim se on rješava. Slično tome [3], postoji razlika između istraživačkog zadatka i procesa istraživanja. Ali proces istraživanja može jednostavno biti nazvan "istraživanje". Prema tome, ako je istraživanje posmatrano kao aktivnost, onda će to uključivati i istraživački zadatak i proces istraživanja. Štaviše, u matematičkom obrazovanju, ponekad se "istraživanje" odnosi na same istraživačke zadatke. U ovom radu, kontekst će odlučiti da li se termin "istraga" odnosi na istraživačke zadatke ili proces istraživanja, ili oboje.

U svemu navedenome, mogu se naći bar tri razlike između istraživačkih zadataka i zadataka za rješavanje problema (u našoj nastavnoj praksi uobičajeno je da se zadaci za rješavanje problema nazivaju 'problemski zadaci').

1. Istraživački zadaci imaju otvorenije ciljeve nego zadaci za rješavanje problema.

2. Istraživački zadaci vode ka istraživanju, što je drugačija aktivnost budući da različiti učenici mogu postaviti razne ciljeve, dok zadaci za rješavanje problema vode ka rješavanju problema što je kraća aktivnost [4], budući da postoji samo jedan cilj koji treba da se ostvari, iako rješavanje problema može da se proširi.

3. Istraživački zadaci uključuju i postavljanje problema i njegovo rješavanje, ali zadaci za rješavanje problema (tj. 'problemski zadaci') podrazumijevaju uglavnom rješavanje problema.

3 Primjeri

3.1 Prva klasa zadataka

U sljedećim zadacima treba riješiti zadanu jednačinu.

1. $\sqrt[2009]{x^5 - x^2 + 1} + \operatorname{arctg}(x^5 - x^2 + 1) = \sqrt[2009]{x^5 - 2x + 2} + \operatorname{arctg}(x^5 - 2x + 2)$
2. $e^{\sin^2 x} + \operatorname{arctg}(\sin^2 x) = e^{2\cos x - 1} + \operatorname{arctg}(2\cos x - 1)$
3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} - \sqrt[21]{\sin x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x} - \sqrt[21]{\cos x}$

O ovim jednačinama pisali su Potopov i Ševkin [8]. Svi gore postavljeni zadaci su oblika

$$f(\alpha(x)) = f(\beta(x)),$$

pri čemu je funkcija f strogo monotona. Zaista, na primjer, u prvom zadatku je:

$$f(u) = \sqrt[2009]{u} + \operatorname{arctg} u, \qquad \alpha(x) = x^5 - x^2 + 1, \qquad \beta(x) = x^5 - 2x + 2.$$

U daljem ćemo dati opšti postupak za rješavanje ovakvih jednačina. Definirajmo prvo ekvivalentne jednačine.

Definicija 3.1 *Za dvije jednačine kažemo da su* ekvivalentne *ako je svako rješenje jedne jednačine ujedno i rješenje druge, i obratno.*

Rješavanje različitih jednačina oblika $f(\alpha(x)) = f(\beta(x))$, gdje su α, β i f realne funkcije, svodi se na rješavanje jednačine oblika

$$\alpha(x) = \beta(x)$$

ako je funkcija f strogo monotona. To pokazuje sljedeća tvrdnja.

Teorem 3.1 *Neka je funkcija*

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

strogo monotona na segmentu Δ. Tada su jednačine (sistemi)

$$f(\alpha(x)) = f(\beta(x)),\ \alpha(x) \in \Delta,\ \beta(x) \in \Delta \tag{1}$$

i

$$\alpha(x) = \beta(x),\ \alpha(x) \in \Delta,\ \beta(x) \in \Delta \tag{2}$$

evivalentne.

DOKAZ: (a) Neka je t rješenje jednačine (1). To znači da postoje realni brojevi $u = \alpha(t)$ i $v = \beta(t)$, koji leže u segmentu Δ, takvi da vrijedi $f(u) = f(v)$. Dokažimo, sada, da je $u = v$.

Pretpostavimo suprotno da je $u \neq v$. Radi određenosti možemo pretpostaviti da je $u < v$. Tada zbog stroge monotonosti funkcije f na segmentu Δ imamo da je $f(u) < f(v)$.

Analogno se dobija protivrječnost, ako se pretpostavi da je $v < u$.

Dobivene protivrječnosti obaraju pretpostavku da je $u \neq v$, pa zato mora biti $u = v$. Dakle, t je i rješenje jednačine (2)

(b) Ako je y rješenje jednačine (2), to znači da postoje brojevi $u = \alpha(y)$ i $v = \beta(y)$ koji leže u segmentu Δ, takvi da je $u = \alpha(y) = \beta(y) = v$. Slijedi da je i $f(u) = f(v)$, tj. $f(\alpha(y)) = f(\beta(y))$. To znači da je y također rješenje od (1). $\square$

Ova tvrdnja nam omogućava da rješavamo značajan broj jednačina čije rješavanje bi, inače, bilo znatno otežano.

Primjer 1 *Riješiti jednačinu*

$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2x^2-4x+5} = \frac{1}{\sqrt{2x^2-4x+5}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}. \tag{3}$$

Rješenje: Zapišimo jednačinu (3) u obliku

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{2x^2-4x+5} + \frac{1}{\sqrt{2x^2-4x+5}}. \tag{4}$$

Kako za proizvoljno $x \in \mathbb{R}$ imamo da je

$$x^2+1 \geq 1 \qquad \text{i} \qquad 2x^2-4x+5 \geq 3 > 1,$$

to stavljajući

$$\alpha(x) = x^2+1, \qquad \beta(x) = 2x^2-4x+5, \qquad f(u) = \sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}},$$

dobijamo da je jednačina (4) ekvivalentna sistemu

$$f(\alpha(x)) = f(\beta(x)), \qquad \alpha(x) \geq 1, \qquad \beta(x) \geq 1. \tag{5}$$

Kako je definiciono područje funkcije $f(u)$ interval $\langle 0, +\infty\rangle$ i $f^{'}(u) = \frac{u-1}{2\sqrt{u^3}} > 0$ za $u > 1$, to funkcija $f(u)$ strogo raste na intervalu $J = [1, +\infty\rangle$. Zbog toga je, prema Teoremu 3.1, sistem (5) ekvivalentan sistemu

$$\alpha(x) = \beta(x), \qquad \alpha(x) \geq 1, \qquad \beta(x) \geq 1. \tag{6}$$

Uzimajući u obzir da su nejednakosti $x^2+1 \geq 1$ i $2x^2-4x+5 \geq 1$ tačne za bilo koje $x \in \mathbb{R}$, to je sistem (6) ekvivalentan jednačini

$$x^2+1 = 2x^2-4x+5. \tag{7}$$

Jednačina (7) ima jedinstveno rješenje $x = 2$, pa prema tome i jednačina (3) također ima to jedinstveno rješenje. $\square$

3.2 Druga klasa zadataka

Pogledajmo sljedeće matematičke zadatke u kojima treba riješiti dane jednačine.

1. $(x^3 + 6)^3 + 6 = x$;
2. $(x^3 - 3x^2 + 3x)^3 - 3(x^3 - 3x^2 + 3x)^2 + 3(x^3 - 3x^2 + 3x) = x$;
3. $sin^2(sin^2 x) = x$;
4. $\sqrt{2 - 2\sqrt{2 - 2x}} = x$.

Ovo su primjeri jednačina čije se rješavanje svodi na rješavanje matematičkog problema u kojem se postavlja pitanje kada će jednačina oblika

$$f(f(x)) = x, \tag{8}$$

gdje je f neka funkcija realne varijable, imati rješenje.

Uporedo s jednačinom (8) posmatrajmo i jednačinu

$$f(x) = x. \tag{9}$$

Kao što je očigledno, proizvoljno rješenje jednačine (9) je ujedno i rješenje jednačine (8). Pokažimo pod kojim uslovima nametnutim nad funkciju f vrijedi obratno.

Teorem 3.2 *Ako je funkcija f monotono neopadajuća na skupu Δ, koji sadrži skup X, takav da*

$$\forall x \in \Delta \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \in X,$$

tada su jednačine

$$f(f(x)) = x \qquad\qquad i \qquad\qquad f(x) = x$$

ekvivalentne na skupu Δ.

Dokaz: Neka je funkcija f onotono neopadajuća na skupu Δ i neka vrijedi

$$\forall x \in \Delta \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \in X.$$

Neka je $t(\in \Delta)$ korijen jednačine (8), tj. neka vrijedi $f(f(t)) = t$. Pretpostavimo da je tada $f(t) \neq t$. Ako je $f(t) > t$ tada bi, zbog monotonosti funkcije f moralo biti $f(f(t)) \geq f(t)$, odakle bi slijedilo da je $f(f(t)) > t$, što je u suprotnosti s pretpostavkom da je $f(f(t)) = t$. Ako je $f(t) < t$, to bi uzimajući u obzir da je $f(t) \in X$ i $t \in \Delta$, zbog monotonosti funkcije f slijedilo da je $f(f(t)) \leq f(t)$, što bi onda davalo $f(f(t)) < t$.

Dobivena protivrječnost obara pretpostavku da je $f(t) \neq t$, pa mora biti $f(t) = t$. $\square$

Primjer 2 *Naći sva rješenja jednačine*

$$tg(tg(x)) = x \tag{10}$$

koja se nalaze u intervalu $\Delta = \langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \rangle$.

RJEŠENJE: Funkcija $f(x) = tgx$ je strogo rastuća na skupu $\Delta \subseteq \langle -1, 1 \rangle$. Zato je, prema Teoremu 3.2, jednačina (10) ekvivalentna jednačini

$$tgx = x \tag{11}$$

na skupu Δ. Jednačina (11) na skupu Δ ima jedinstveno rješenje $x = 0$, pa zato i jednačina (10) ima to jedinstveno rješenje. □

Prirodno se postavlja pitanje da li tvrdnja vrijedi ako funkcija f nije rastuća, nego je opadajuća. Odgovor na to pitanje daje sljedeći primjer.

Primjer 3 *Neka je zadana funkcija* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *gdje je*

$$f(x) = \sqrt[3]{1-x}.$$

Da li su jednačine

$$f(f(x)) = x \qquad i \qquad f(x) = x$$

ekvivalentne?

RJEŠENJE: Funkcija $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$ je strogo opadajuća na skupu $\mathbb{R}$ i vrijedi $f(x) \in \mathbb{R}$ za svako $x \in \mathbb{R}$. Jednačina $f(x) = x$ ima oblik

$$\sqrt[3]{1-x} = x$$

i ekvivalentna je jednačini

$$x^3 + x - 1 = 0,$$

koja ima jedinstven korijen $x = t \in \langle 0, 1 \rangle$.

S druge strane, jednačina $f(f(x)) = x$ je oblika

$$\sqrt[3]{1 - \sqrt[3]{1-x}} = x,$$

i ima, osim rješenja $x = t$, također i rješenja $x = 0$ i $x = 1$ koja nisu rješenja jednačine $\sqrt[3]{1-x} = x$.

Dakle, jednačine $\sqrt[3]{1-x} = x$ i $\sqrt[3]{1 - \sqrt[3]{1-x}} = x$ nisu ekvivalentne. □

3.3 Komentar

Iako na prvi pogled matematički zadaci ove dvije klase jedančina izgledaju kao dril–zadaci oni to, ipak, nisu. To su, prema uobičajenim klasifikacijama matematičkih zadataka, nestandardni zadaci. Davanje ovakvih zadataka učenicima omogućava nastavnicima da identifikuju strategije rješavanja matematičkih zadataka kojima bi trebalo da učenici vladaju. Nestandardnost ove dvije klase jednačina ogleda se u znatnoj kompleksnosti njihovog rješavanja na standardan način.

Dakle, šta je u našem slučaju matematički problem? Istaknimo prvo činjenicu kojom raspolažemo. Budući je f funkcija, to vrijedi

$$u = v \qquad \Longrightarrow \qquad f(u) = f(v).$$

U našem slučaju, imamo implikacije

$$\begin{aligned} \alpha(x) = \beta(x) &\implies f(\alpha(x)) = f(\beta(x)), \\ f(x) = x &\implies f(f(x)) = x. \end{aligned}$$

Prema tome, matematički problem je: Kada će vrijediti obrati gornjih implikacija? Vidjeli smo da u prvom slučaju (Teorem 3.1) funkcija f mora biti strogo monotona, dok u drugom (Teorem 3.2) mora biti monotono neopadajuća da bi jednačina oblika $f(\alpha(x)) = f(\beta(x))$, odnosno jednačina oblika $f(f(x)) = x$, bila ekvivalentna manje kompleksnoj jednačini $\alpha(x) = \beta(x)$, odnosno $f(x) = x$.

Nastavnici matematike bi trebalo da zadaju učenicima matematičke zadatke izabrane i/ili dizajnirane oslanjajući se na poznavanje učeničkog razumijevanja, interesa i iskustva, poznavanja nivoa i diverziteta učeničkih načina učenja matematike, te da, izmedju ostalog, angažuju učenički intelekt, stvaraju adidaktičke situacije kojima se omogućava razvoj matematičkog razumijevanja i ovladavanja matematičkim vještinama te stumulišu učenike da prave konekcije sa koherentnim shemama matematičkih ideja. Procjenjujemo da su ovdje navedene dvije klase matematičkih zadataka dobro sredstvo za identifikaciju ovladanim sposobnostima rješavanja nestandardnih zadataka. Naravno, nije za očekivati da ovakve zadatke učenici rješavaju bez poznavanja tvrdnji iskazanih u Teoremima 3.1 i 3.2.

Na kraju, istaknimo da nam u ovom tekstu nije bila namjera da damo metodički okvir mogućnosti korištenja ovih jednačina u nastavi kao problemskih zadatka

Zahvala. Autori se zahvaljuju recenzentima na primjedbama koje su znatno podigle kvalitet članka.

Literatura

[1] N. Bednarz, L. Radford, B. Janvier and A. Lepage: *Aritmetical and algebraic thinking inproblem-solving*; PME **16** (1992), Vol. 1, 65–72.

[2] Biehler, Scholz, Strosser and Winkelmann (Editors): *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*; MA: Kluwer, Norwell, 1994.

[3] P. Ernest: *The philosophy of mathematics education*; London: Falmer Press, 1991.

[4] J. Evans: *Investigations: The state of the art*; Mathematics in School, **16**(1)(1987), 27–30.

[5] K. B. Henderson and R. E. Pingry: *Problem solving in mathematics*; In: H. F. Fehr (Editor): *The learning of mathematics: Its theory and practice*; Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics, 1953, 228–270.

[6] F. K. Lester, Jr.: *Problem solving: Is it a problem?* In: M. M. Lindquist (Editor): *Selected issues in mathematics education*; Berkeley, CA: McCutchan, 1980, 29–45.

[7] A. Orton and L. Frobisher: *Insights into teaching mathematics*; London, Cassell, 1996.

[8] M. K. Potopov i A. V. Ševkin: *O rešenii uravnenii vida* $f(\alpha(x)) = f(\beta(x))$; Preprint, 2004.

[9] R. E. Reys, M. M. Lindquist, D. V. Lambdin, N. L. Smith and M. N. Suydam: *Helping children learn mathematics*; (7th ed.), Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, 2004.

[10] D. A. Romano: *Šta je algebarsko mišljenje*; MAT-KOL (Banja Luka), XV (2) (2009), 19–29.

[11] D. A. Romano: *Istraživanje matematičkog obrazovanja (editorial)*; IMO, Vol. I(2009), Broj 1, 1–10.

[12] A. H. Schoenfeld: *Mathematical problem solving*; Orlando, FL: Academic Press, 1985.

[13] A. Sierpinska and J. Kilpatrick (editors): *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*; Kluwer Academic Publishers: Great Britain, 1998.