MAT-KOL (Banja Luka)
ISSN 0354-6969 (p), 1986-5228 (o)
Vol. XVI (1)(2010), 15-22

ZNAČAJ GEDELOVE TEOREME O NEPOTPUNOSTI U MATEMATICI I RAČUNARSTVU[1]

Filip Morić[2], Ilija Lalović[3]

Abstract

Raspravljamo o implikacijama i značaju Gedelove teoreme za osnove i dalji razvoj matematike i računarstva, realizaciju Hilbertovog programa formalizacije matematike i potrebe za novim aksiomama u matematici. Takodje raspravljamo o mogućnostima da se Gedelov rezultat o nekompletnosti ubroji u argumente za tezu da rasudjivanje čovjeka ne može biti konstruisano izvodjenjem na računaru.

Abstract

The article discusses the implications and significance of Gödel's theorem for the foundations and further development of mathematics and computer science, the realization of Hilbert's program of the formalization of mathematics and the need for new axioms in mathematics. There is also a discussion of the possibilities for including Gödel's results on incompleteness in arguments for the thesis that human reasoning cannot be constructed by deduction on a computer.

AMS Mathematics Subject Classification (2000): 03C35, 97D20

Key words and phrases: Incompleteness of PA, Consistency, Hilbert's program, Modelling of the human reasoning

1 Uvod

Implikacije i značaj Gedelovih rezultata se često pogrešno shvaćaju u raznim aspektima. Gedelov rezultat je ispravno prihvatiti kao pokazivanje suštinskih ograničenja formalnih deduktivnih sistema. Naime, u svakom deduktivnom sistemu u kojem postoji efektivna procedura za odlučivanje da li je predloženi dokaz zaista dokaz, a takodje mogućnost predstavljanja elementarne aritmetike ili pojmova kombinatorike, postoje iskazi koji nisu dokazivi i nisu oborivi u tom sistemu.

Iz ove formulacije se ne vidi konstruktivna priroda originalnog dokaza, u kojem se ne koristi pojam istine. Zahvaljujući ovoj osobini konstruktivnosti rezultat je uzdrmao Hilbertov finitistički program u osnovama matematike. Ipak,

[1]Rad je nastao proširenjem dijela diplomskog rada [16]

[2]Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, EPFL SB IMB DCG MA B1 537 (Bâtiment MA) Station 8 CH-1015 Lausanne, e-mail: filip.moric@epfl.ch

[3]Prirodno-matematički fakultet, Mladena Stojanovića 2, 78000 Banja Luka, e-mail: ilalovich@yahoo.com

pošto se na neki način uvijek zna tačnost nezavisnog iskaza o kojem govori Gedelova teorema, to se može reći da Gedelov rezultat o nezavisnosti nije radikalan. Iako rezultat ima dubok značaj u osnovama matematike i za naše razumijevanje formalnih sistema, on je imao vrlo mali uticaj na današnju matematičku praksu.

U novije vrijeme ponovo se pojavio medju matematičarima interes za Gedelovu teoremu i posebno za preciznije odredjivanje njenog mjesta u odnosu na najnoviji napredak matematičke logike. U te tendencije se uklapa i cilj našeg rada. Na naš rad su imali uticaja stariji rezultati [4, 13, 7, 11, 20, 21], kao i novije koncepcije [1, 3, 5, 6, 15, 17]. Korišteni osnovni pojmovi matematičke logike, algebre, naivne teorije skupova i osnova teorije programiranja mogu se naći u [14, 19, 22, 12].

Odnos Gedelove teoreme i nekih novih koncepta savremene matematičke logike, kao što je linearna logika, kvantna logika, njihove veze sa teorijom nekomutativnih operatora i kvantnom mehanikom, pojmove objektivine i subjektivne istine [2, 10, 9, 8], ovaj put smo izostavili i planiramo ih se dotaći u nekom budućem radu.

2 Da li je pao Hilbertov 'non ignorabimus'?

U svom znamenitom izlaganju na Medjunarodnom kongresu matematičara u Parizu 1900. godine David Hilbert je izmedju ostalog rekao:

> "Uzmite bilo koji poznat neriješen problem, kao što je pitanje iracionalnosti Ojler-Maskeronijeve konstante C ili egzistencije beskonačno mnogo prostih brojeva oblika $2^n + 1$. Koliko god nam ovi problemi izgledali nepristupačni i koliko god mi bili bespomoćni pred njima, mi uprkos tome imamo čvrsto ubjedjenje da njihova rješenja moraju predstavljati konačan niz čisto logičkih zaključaka. Ovo ubjedjenje u rješivost svakog matematičkog problema moćan je podstrek rješavaocu. Mi čujemo u sebi vječiti poziv: Tu je problem. Traži njegovo rješenje. Možeš ga naći čistim rezonovanjem, jer u matematici ne postoji ignorabimus."

Ovdje je izražen Hilbertov optimistički 'non ignorabimus'. Hilbert je aludirao na staru izreku 'ignoramus et ignorabimus' (ne znamo i nikad nećemo znati) koju je fiziolog Emil Di Bua-Rejmon iskazao 1872., govoreći o našem znanju o ljudskoj svijesti.

Važno je naglasiti da Gedelova teorema ni u kom slučaju ne odbacuje Hilbertov optimistički pogled. Jedino što ona utvrdjuje je da Hilbertov optimizam ne može biti utemeljen na bilo kom konačnom formalnom sistemu unutar koga bi svi matematički problemi bili rješivi, čak ni ako se bavimo samo aritmetičkim problemima.

2.1 Da li su matematici potrebne nove aksiome?

Od vremena kada je došao do svojih rezultata o nepotpunosti 1931. godine do kraja svog života Gedel je intenzivno tragao za novim aksiomama koje bi odlučile trenutno neodlučive aritmetičke probleme. Od 1947. kad je objavio svoj neobični članak *"Šta je Kantorov problem kontinuuma?"*, takodje je isticao poziv za pronalaženje novih aksioma koje bi mogle dokazati čuvenu hipotezu kontinuuma. Ukazivao je na šeme viših beskonačnosti u teoriji skupova kao na pravac u kom treba tražiti te nove principe.

Posljednjih godina uradjeno je dosta stvari relevantnih za Gedelov program, ali ne postoji saglasnost oko toga kakve zaključke treba izvesti iz tih rezultata. Uprkos značajnom progresu u nadogradnji teorije skupova, hipoteza kontinuuma je i dalje neodlučiva/nezavisna. To izaziva sumnju u osnovanost Gedelovog programa. S druge strane, u oblasti teorije brojeva nije poznat nijedan problem od interesa u uobičajenom smislu riječi (recimo, problem koji je nastao izvan konteksta priče o Gedelovoj teoremi), a za koji je dokazano da je neodlučiv. Štaviše, Torkel Francen [5] smatra da bi dokaz da je hipoteza o prostim brojevima blizancima neodlučiva u ZFC bio matematička senzacija uporediva sa otkrićem napredne podzemne civilizacije na planeti Mars! Gedelova teorema ne daje osnova za pretpostavku da je bilo koji od otvorenih problema teorije brojeva neodlučiv i da kao takav zahtijeva nove aksiome.

Solomon Feferman u svom članku [4] zaključuje da je problem kontinuuma najvjerovatnije neodredjen problem u tom smislu da ga nijedna nova aksioma neće moći definitivno riješiti. Takodje, on smatra da nove aksiome nisu potrebne matematici s praktične tačke gledišta, iako postoji značajan teoretski interes za potragu za novim aksiomama.

2.2 Druga Gedelova teorema o nepotpunosti

Gedel je prvi put prezentovao dokaz svoje teoreme o nepotpunosti na konferenciji *"Epistemologija egzaktnih nauka"* 1930. godine, sa samo 24 godine. Medju prisutnima je bio madjarski matematičar Džon fon Nojman, tri godine stariji od Gedela, poznat po anegdotama o njegovoj sposobnosti munjevitog apsorbovanja matematike. Ispostavilo se da je on bio jedini učesnik koji je odmah razumio Gedelov dokaz. U tom trenutku Gedel još uvijek nije bio došao do druge teoreme. Razmišljajući nakon predavanja o Gedelovom dokazu, Fon Nojman je ubrzo shvatio važnu činjenicu koju je u to vrijeme uvidio i sam Gedel:

Označimo sa Con_S iskaz "S je konzistentna" formalizovan u jeziku S.

Rečenica G je konstruisana tako da je ekvivalentna sa "G nije dokaziva u S".

Prva teorema tvrdi:

> "Ako je S konzistentna, onda G nije dokaziva u S."

Ključna stvar je zapažanje da se ta implikacija može dokazati unutar S, tj. dokaz prve teoreme se može formalizovati u PA.

Sad ako bi se u S moglo dokazati Con_S, tada bi se moglo dokazati i "G nije dokaziva u S" (jer se prva teorema dokazuje unutar S), a samim tim bi se dokazalo G, pa bi slijedilo da S nije konzistentna. Dakle,

Theorem 2.1 (Druga teorema o nepotpunosti) *Ako je S konzistentna teorija (koja sadrži PA), tada se u S ne može dokazati* Con_S *.*

U svoj rad iz 1931. Gedel je uvrstio i ovu teoremu, s tim što je njen dokaz samo skicirao. Ono što nije dokazao bila je činjenica da se dokaz prve teoreme može formalizovati u PA. Planirao je da da kompletan dokaz u drugom dijelu rada. Medjutim, drugi dio se nije nikad pojavio, jer je Gedelov dokaz bio dovoljno uvjerljiv za čitaoce, a takodje 1939. u knjizi *Grundlagen der Mathematik* P. Bernejsa i D. Hilberta [13] dat je detaljan dokaz.
Rezultat Druge teoreme za slučaj $S =$ PA može se parafrazirati kao:

> "Ako je aritmetika konzistentna, onda ona ne može dokazati svoju konzistentnost."

Nažalost, pretežno u popularnoj literaturi, pojavila se masa besmislenih refleksija o ovoj temi, najčešće kod pisaca koji uopšte ne razumiju o čemu se tu govori. Vidjene su tako neodgovorne izjave tipa

> "Prema Gedelovoj drugoj teoremi, mi nikad nećemo znati da li je aritmetika konzistentna ili ne."

Slični iskazi predstavljaju potpun promašaj. Sasvim je jasno da bi od svih mogućih i nemogućih dokaza da je aritmetika konzistentna za nas ubjedljivo najmanji značaj imao dokaz koji bi dala aritmetika sama.
Tačno je da se Gedelovi rezultati odnose samo na formalne sisteme. Problem je što mi, ako želimo da bilo šta objasnimo na nivou današnje nauke, pristupamo formalizovanju ili matematiziranju novog pojma. Inače smo u domenu pjesničkih imaginacija ili filozofskih spekulacija. Prilikom formalizovanja neizbježno dolazimo do problema kojim nas ograničava Gedelova druga teorema. Ipak, ako možemo dokazati konzistentnost teorije u kojoj se dokazuje konzistentnost formalizacije koja nas zanima, onda Gedelova druga teorema ne stavlja pred nas neke ozbiljne probleme. U sekciji 3 dajemo još detalja o ovoj temi.

2.3 Konzistentnost aritmetike

Gerhard Gencen je 1936. godine u radu [7] dokazao konzistentnost aritmetike prvog reda koristeći kombinatorne metode. U suštini, rezultat je skoro trivijalan, jer konzistentnost aritmetike se može lako dokazati koristeći "soundness" argument: aksiome su tačne (u podrazumijevanoj interpretaciji jezika koji razmatra), pravila izvodjenja očuvavaju istinitost i nijedna kotradikcija nije istinita, pa nijedna kontradikcija ne slijedi iz aksioma arimtetike prvog reda.
Ono što čini Gencenov dokaz interesantnim je to što on pokazuje ne samo da je aritmetika prvog reda konzistentna. On pokazuje da je konzistentnost dokaziva u okviru druge teorije, primitivno rekurzivne aritmetike, sa dodatnim principom kvantifikator-slobodne transfinitne indukcije do ϵ_0. Princip KSTI kaže da za proizvoljnu formulu $A(x)$ bez ograničenih promjenljivih vrijedi transfinitna indukcija do ϵ_0 . Da bi se izrazili ordinali u jeziku aritmetike potrebna je notacija, tj. neki način pridruživanja prirodnih brojeva ordinalima do ϵ_0. Jedan mogući način za to daje Kantorova normalna forma. Gencen je dokazima iz aritmetike prvog reda pridružio ordinale do ϵ_0 i pokazao da ako postoji dokaz kontradikcije,

tada postoji beskonačan opadajući niz ordinala do ϵ_0 produkovan primitivno-rekurzivnom operacijom na dokazima koji odgovaraju kvantifikator-slobodnoj formuli.
Gencenov dokaz ističe jedan obično nezapažen aspekt Gedelove druge teoreme. Često se može čuti da konzistentnost teorije može biti dokazana samo u jačoj teoriji. Medjutim, primitivno-rekurzivna aritmetika sa KSTI do ϵ_0 je teorija **neuporediva** sa aritmetikom prvog reda.
Gencenov dokaz je prvi primjer tzv. **ordinalne analize** u teoriji dokaza. U ordinalnoj analizi snaga teorije se mjeri tako što se utvrdi do kog konstruktivnog ordinala je teorija u stanju da dokaže transfinitnu indukciju. Konstruktivni ordinali su oni koji odgovaraju rekurzivnim dobrim uredjenjima na ω.
Paris i Kirbi su u [17] pokazali da Gudštajnova teorema može zamijeniti transfinitnu indukciju do ϵ_0.
U zanimljivom istraživanju Paris i Tavakol, u [18], posmatraju algoritam koji generiše Gudštajnove nizove kao dinamički sistem (G-sistem.) Ovaj sistem je deterministički, ima jednostavan globalan atraktor (koordinatni početak), super-osjetljiv je na promjene početnih uslova i ima veoma duge prelaze (dužina ne-nula dijela Gudštajnovog niza). Time se $G-$ sistemi znatno razlikuju od uobičajenih dinamičkih sistema, koji su stohastički, imaju čudne atraktore i relativno kratke prelaze (u poredjenju sa $G-$sistemima). Termin "super-osjetljive" zavisnosti od početnih uslova Paris i Tavakol koriste jer veliki dijelovi susjednih trajektorija divergiraju sa "rastom koji kao funkcija početne tačke m, eventualno dominira svaku primitivno rekurzivnu funkciju" ([18], str. 84). Autori sugerišu da bi se $G-$sistemi mogli koristiti kao modeli rapidno rastućih sistema, kao što je univerzum, za koji se vjeruje da se rapidno raširio prilikom njegovog nastajanja.

3 Može li računar zamijeniti matematičara?

Postoje tvrdnje da računarski program koji proizvodi ili traži dokaze ne može dostići rezultate koji su dostižni za matematičara angažovanog u dokazivanju teorema matematičkim rasudjivanjem. Nećemo se baviti širim filozofskim implikacijama koje ova teza može imati, već ćemo razmotriti značaj koji ova teza ima sama po sebi.

Postoje dvije vrste argumenata za tezu. Prvo, može se smatrati da program koji dokazuje teoreme (dokazivač teorema) traži teoreme u nekom formalnom deduktivnom sistemu. Drugo, za svaki formalni deduktivni sistem postoji iskaz, na pr. Gedelov iskaz koji za sebe kaže da je nedokaziv u tom sistemu, koji ne može biti dokazan u tom sistemu, ali čija istinitost može biti izvedena matematičkim rasudjivanjem. Prvi argument je prihvatljiv, jer kompjuter generiše rekurzivno prebrojiv skup iskaza, a zatvorenje ovog skupa u odnosu na logičku implikaciju može se posmatrati kao skup teorema nekog formalnog deduktivnog sistema. Drugi argument je diskutabilan. Istina je da za svaki formalni deduktivni sistem T postoji iskaz o njegovoj konzistentnosti $C(T)$, koji ostaje izvan toga sistema. Ako kompjuter zna samo ono što može dokazati, onda on ne može znati da je konzistentan. Matematičar, sa druge strane, pozivajući se na "soundness" i koristeći koncept istine, može utvrditi konzistentnost formalne deduktivne teorije. Za to treba utvrditi da su tačne aksiome teorije u podrazumijevanoj interpretaciji jezika koji razmatra i da pravila izvodjenja čuvaju tačnost. Dakle, sve što dokaže iz aksioma primjenom pravila izvodjenja, biće tačno.

Na osnovu gornjeg rasudjivnja moglo bi se tvrditi da mogućnost pristupa konceptu istine daje matematičaru prednost nad kompjuterom. Ipak, to nije istina, jer u istom smislu u kome izvodi sintaksne manipulacije, kompjuter može podržati i semantičke pojmove. "Soundness" argument može biti formalizovan u bogatijem sistemu, u kome može biti definisan predikat istine za jezik teorije T. Klauzule definicije istine su izvodljive kao teoreme u drugom sistemu, pa je izvodlji i iskaz da je svaki iskaz izvodljiv u T tačan, dakle nekontradiktoran. Dakle, pozivanje na istinu je pogrešno.

Iako se T može proširiti dodavanjem $Con(T)$ kao dodatnog aksioma, konzistentnost novog sistema je izvan njegove dohvatljivosti. Tako imamo sistematski način da prihvatljiv sistem proširimo u strožiji prihvatljiv sistem. Ovo ne obara argment da kompjuter ne može zamijeniti matematičara, jer ostaje činjenica da jedan kompjuter ne može potpuno pokriti što jedan matematičar može uraditi.

Ako bi neki kompjuter obuhvatio svu matematiku mi bismo mogli na osnovu empirijskih eksperimenata ili na neki drugi način vjerovati u njegovu konzistentnost. Da bismo na matematičkim osnovama vjerovali u konzistentnost nekog programa, moramo razumjeti kako taj program radi. Kada je u pitanju univerzalni kompjuter, takvo razumijevanje je izvan naših mogućnosti. Takav kompjuter je previše kompleksan da bi ga prihvatili kao objekt matematičkog razmišljanja. Nije u pitanju veličina naše memorije, već principijelno ograničenje koje proizilazi iz Gedelove teoreme, slično kao gornja ograničenja u teoriji kompleksnosti.

Zahvalnica

Autori se zahvaljuju anonimnom recezentu čije primjedbe i sugestije su pomogle da značajno poboljšaju rad.

References

[1] A. Caicedo, *Goodstein's function*, Revista Columbiana de Matemáticas, **41** (2007)

[2] Connes, A. *Non-commutative geometry.* Academic Press, San Diego, CA, 1994.

[3] J. Conway, R. Guy, *The Book of Numbers*, Springer-Verlag, 1996.

[4] S. Feferman, H. Feferman, P. Maddy, J. Steel, *Does mathematics need new axioms?*, Bulletin of Symbolic Logic, **6** (2000), str. 401–413.

[5] Torkel Franzén, *Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to Its Use and Abuse*, A K Peters, Wellesley, 2005.

[6] H. Friedman, *Unprovable theorems*, Cal Tech Math Colloq, 2005.

[7] G. Gentzen, *Die Widerspruchfreiheit der reinen Zahlentheorie*, Mathematische Annalen **112** (1936), str. 493–565.

[8] Girard J.-Y. *Une extension de l'interprétation de Gödel á l'elimination de coupures dans l'analyse et dans la théorie des types,* in: J. E. Fenstand, ed. *Proc. 2nd Scand. Logic Symp.* North-Holland (1971) 63-92

[9] Girard J.-Y. *Linear Logic,* Theoretical computer science **50** (1987), 1-102

[10] Girard, J.-Y. *Truth, modality and intersubjectivity,* Institut de Mathmatiques de Luminy, UPR 9016 CNRS (2007) 1-18

[11] Gödel, Kurt, Uber formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und Verwandterf Systeme I, Montshefte fur Mathematik und Physics, vol. 38 1931), p. 173-198. (engl. prevod: Gödel K. On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I, Dover, 1992)

[12] D. Gries, *The Science of Programming*, Springer, 1989.

[13] Hilbert, D. and P. Bernays. Grundlagen der Mathematik. Berlin, Springer, vol.1 1934, voL2 1939.

[14] Madarasz Sz. Rozalia, *Univerzalne algebre, teorija skupova i mreža*, MAT-KOL (Banja Luka), Posebna izdanja, 2(2004)

[15] J. Miller, *On the independence of Goodstein's theorem*, Univ. of Arizona, 2001.

[16] F. Morić, *Značaj Gedelove teoreme u matematici i u dokazivanju terminacije programa i igara,* Diplomski rad, PMF, Banja Luka, 2008.

[17] J. Paris, L. Kirby, *Accessible independence results for Peano arithmetic*, Bull. London Math. Soc., **14** (1982), str. 285–293.

[18] Paris, J. and Tavakol, R. *Goodstein algorithm as a super-transient dynamical system.* Physics Letters A, 180 (1993), 83-86.

[19] Daniel A. Romano, *Osnove matematike (II dio: Teorija skupova, Knjiga 2: Zermelo-Frarnkelova aksiomatska teorija skupova)*, MAT-KOL (Banja Luka), Posebna izdanja, Broj 5 (2007)

[20] Raymond M. Smullyan, *Gödel's Incompleteness Theorems*, Oxford University Press, Oxford, 1992.

[21] A. M. Turing, *On computable numbers, with an application to the Entscheindungsproblem*, Proceedings of the London Mathematics Society, ser. 2 v. 42, str. 230–265.

[22] N. K. Vereshchagin, A. Shen, *Nachala teorii mnozhestv*, Moskva, 1999.

Primljeno 14.01.2010