MAT-KOL (Banja Luka)
ISSN 0354-6969
Vol. XV (2)(2009), 45-50

O JEDNOJ DEFINICIJI STIRLINGOVIH BROJEVA

Milan Janjić[1]

Sažetak

Stirlingovi brojevi igraju veliku ulogu u kombinatorici. Zbog toga je i njihova definicija uglavnom kombinatorna. Ti se brojevi, međutim, pojavljuju i u mnogim drugim oblastima matematike. U ovom se radu izlaže definicija Stirlingovih brojeva, koja je vezana za izvode, pa se i njihove osnovne osobine dokazuju pomoću izvoda.

AMS Mathematics Subject Classification (2000): 11B73

Key words and phrases: Stirlingovi brojevi prve vrste, Stirlingovi brojevi druge vrste, Belovi brojevi, Belovi polynomi

1 Uvod

U kombinatorici se Stirlingovi brojevi mogu definisati na različite načine. Jedna takva definicija izložena je u knjizi [1], u kojoj su ovi brojevi obrađeni veoma detaljno. U ovom radu uvodi se jedna nekombinatorna definicija Stirlingovih brojeva. Naime, pokazaćemo da se Stirlingovi brojevi druge vrste pojavljuju kao koeficijenti u izrazima za izvode višeg reda funkcije $f(e^x)$, gdje je $f \in C^\infty(0, +\infty)$ proizvoljna funkcija. Na sličan se način Stirlingovi brojevi prve vrste pojavljuju kao koeficijenti u izrazima za izvode funkcije $f(\ln x)$. Napomenimo, prije svega, da se te formule mogu dobiti kao posljedica veoma opšte Faa di Bruno-ve formule ([2]), za izvode višeg reda kompozicije dvije funkcije. Rezultati koje ćemo mi koristiti biće dokazani indukcijom, bez upotrebe ove formule.

Iz tih se definicije veoma lako dobijaju rekurentne formule za Stirlingove brojeve, koje predstavljaju možda i njihovu najvažniju osobinu. Na taj način će Stirlingovi brojevi biti definisani u okviru diferencijalnog računa. Ovakve definicije mogu biti zanimljive zbog pojavljivanja proizvoljne funkcije u njima. Uzimajući različite konkretne funkcije mi ćemo dobiti fundamentalne osobine Stirlingovih brojeva.

Malo je iznenađujuće da još uvijek nisu usvojene standardne oznake za Stirlingove brojeve. Ovdje koristimo notaciju iz [1], tako da sa $S(n, k)$ označavamo Stirlingove brojeve druge vrste, sa $s(n, k)$ Stirlingove brojeve prve vrste, a sa $\mathbf{s}(n, k)$ Stirlingove brojeve prve vrste bez znaka. Još se koristi i oznaka $(\alpha)_n = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)$.

[1]Odsjek za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet u Banjoj Luci, Republika Srpska e-mail: agnus@blic.net

2 Stirlingovi brojevi druge vrste

Pretpostavimo da je $f(x) \in C^\infty(0,+\infty)$ proizvoljna. Računanjem izvoda funkcije $f(e^x)$ po x dobijamo redom

$$[f(e^x)]' = tf'(t)$$

$$[f(e^x)]'' = tf'(t) + t^2 f''(t),$$

$$[f(e^x)]''' = tf'(t) + 3t^2 f''(t) + t^3 f'''(t),$$

pri čemu je $t = e^x$.

Kako jasno vrijedi

$$[t^k f^{(k)}(t)]'_x = kt^k f^{(k)}(t) + t^{k+1} f^{(k+1)}(t) \tag{1}$$

možemo izraz $[f(e^x)]^{(n)}$ napisati u formi

$$[f(e^x)]^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) t^k f^{(k)}(t), \tag{2}$$

pri čemu su $S(n,k)$ pozitivni cijeli brojevi koji ne zavise od $f(x)$.

Definicija 2.1 *Brojeve $S(n,k)$, $(n \geq 1,\ k = 1,\ldots,n)$ nazivamo Stirlingovim brojevima druge vrste. Takođe se definiše $S(0,0) = 1$ i $S(n,k) = 0$, ako je $n < k$.*

Uzimajući još izvod u (2), pa primjenjujući (1), dobijamo

$$[f(e^x)]^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\left[kt^k f^{(k)}(t) + t^{k+1} f^{(k+1)}(t)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} S(n,k) kt^k f^{(k)}(t) + \sum_{k=2}^{n+1} S(n,k-1) kt^k f^{(k)}(t) =$$

$$= S(n,1)f'(t) + \sum_{k=1}^{n} [kS(n,k) + S(n,k-1)] t^k f^{(k)}(t) + S(n,n) t^{n+1} f^{(n+1)}(t).$$

Iz ovoga zaključujemo da vrijedi

$$S(n+1,1) = S(n,1),\ S(n+1,n+1) = S(n,n),$$

$$S(n+1,k) = kS(n,k) + S(n,k-1),\ (k = 2,3,...,n).$$

Na taj način smo dokazali:

Propozicija 2.1 *([1], Th. 8.7 (b)) Stirlingovi brojevi druge vrste zadovoljavaju sljedeće rekurentne odnose:*

$$S(n,1) = S(n,n) = 1,$$

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k),\ (k = 2,3,\ldots,n).$$

Iz ovih se rekurentnih odnosa lako dokazuje osnovno kombinatorno svojstvo Stirlingovih brojeva.

Propozicija 2.2 *Stirlingov broj $S(n,k)$ jednak je broju particija nekog n-skupa na k blokova*

Dokaz. Za $n = 1$ tvrdnja je očigledno tačna. Neka je X neki n-skup. Izaberemo proizvoljan element $x \in X$. Broj blokova sa k elemenata skupa X takvih da se među njima pojavljuje i blok $\{x\}$ očigledno je jednak $S(n-1,k-1)$. Ostaje da prebrojimo blokove u kojima se ne nalazi $\{x\}$. Kako se element x mora nalaziti u nekom bloku, to ovaj broj dobijamo tako da skup $X \setminus \{x\}$ podijelimo na k blokova i onda za neku određenu particiju svakom od k blokova možemo dodati element x, te na taj način dobijamo da je broj traženih particija jednak $kS(n-1,k)$. Time je dokaz završen.

Sada ćemo birajući specijalno funkciju $f(x)$ lako izvesti još neke od fundamentalnih osobina Stirlingovih brojeva druge vrste. Uzimajući specijalno stepenu funkciju $f(x) = x^\alpha$, $(\alpha \in \mathbb{R})$ imamo $f(e^x) = e^{\alpha x}$ što implicira $[f(e^x)]^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x}$. Sa druge strane vrijedi $f^{(k)}(t) = (\alpha)_k x^{\alpha-k}$. Zamijenjujući ove vrijednosti u (2) dobijamo sljedeću osobinu, koja služi kao definicija Stirlingovih brojeva druge vrste u [1].

Propozicija 2.3 *([1], Def. 8.1) Za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\alpha^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)(\alpha)_k.$$

Posmatrajmo sada funkciju n $f(x) = \frac{(x-1)^k}{k!}$, pri čemu je k fiksiran prirodan broj. Jasno je da vrijedi

$$f^{(k)}(x) = 1,\ f^{(n)}(x) = 0,\ (n > k).$$

U slučaju $n < k$ imamo $f^{(n)}(1) = 0$. Tako dobijamo da očigledno vrijedi:

$$\left[\sum_{m=1}^{n} S(n,m) t^m f^{(m)}(t)\right]_{t=1} = S(n,k).$$

Poredeći ovu jednakost sa (2) dobijamo sljedeću:

Propozicija 2.4 *([1], Th. 8.3 (b)) Za svako $n \geq k$ vrijedi*

$$S(n,k) = \left[\frac{(e^x-1)^k}{k!}\right]^{(n)}_{x=0}.$$

Ekvivalentno, $\frac{(e^x-1)^k}{k!}$ je exponencijalna funkcija generatrisa za Stirlingove brojeve $S(n,k)$, za fiksirano k.

Uzimajući $f(x) = e^x$ u jednakosti (2) dobijamo sljedeću tvrdnju za Bellove polinome $B_n(x)$ i Bellove brojeve B_n.

Propozicija 2.5 *Za $n = 1, 2, \dots$ vrijedi*

$$e^x\left(e^{e^x}\right)^{(n)} = e^{e^x}B_n(t),\ (t = e^x)$$

$$e^{-1}\left(e^{e^x}\right)^{(n)}_{x=0} = B_n.$$

Posljednja jednakost zapravo znači da je $e^{-1}e^{e^x}$ exponencijalna funkcija generatrisa Bellovih brojeva.

3 Stirlingovi brojevi prve vrste

Započećemo ovaj dio računanjem izvoda $f(\ln x)$, pri čemu je $f \in C^\infty(-\infty, +\infty)$. Uz oznaku $\ln x = t$ imamo

$$[f(\ln x)]' = \frac{f'(t)}{x}$$

$$[f(\ln x)]'' = -\frac{f'(t)}{x^2} + \frac{f''(t)}{x^2},$$

$$[f(\ln x)]''' = 2\frac{f'(t)}{x^3} - 3\frac{f''(t)}{x^3} + \frac{f'''(t)}{x^3},$$

itd.

Iz ovih specijalnih slučajeva naslućujemo sljedeću formulu.

Propozicija 3.1 *Vrijedi*

$$f^{(n)}(\ln x) = \frac{1}{x^n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\mathbf{s}(n,k)f^{(k)}(t), \tag{3}$$

pri čemu su $\mathbf{s}(n,k)$ pozitivni cijeli brojevi koji ne zavise od $f(x)$.

Dokaz. Za $n = 1$ formula je očigledno tačna. Diferenciranjem i primjenom jednakosti

$$\left[\frac{f^{(k)}(t)}{x^m}\right]'_x = \frac{-mf^{(k)}(t) + f^{(k+1)}(t)}{x^{m+1}}, \tag{4}$$

dobijamo

$$f^{(n+1)}(\ln x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\mathbf{s}(n,k)\frac{-nf^{(k)}(t) + f^{(k+1)}(t)}{x^{n+1}},$$

odnosno,

$$x^{n+1}f^{(n+1)}(\ln x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\mathbf{s}(n,k)f^{(k+1)}(t) - n\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\mathbf{s}(n,k)f^{(k)}(t) =$$

$$= (-1)^n n\mathbf{s}(n,1)f'(t) + \sum_{k=2}^{n}\left[(-1)^{n-k+1}\mathbf{s}(n,k-1) + (-1)^{n-k+1}n\mathbf{s}(n,k)\right]f^{(k)}(t)+$$
$$+\mathbf{s}(n,n)f^{(n+1)}(t).$$

Na taj način dobijamo

$$\mathbf{s}(n+1,1) = n\mathbf{s}(n,1),\ \mathbf{s}(n+1,n+1) = \mathbf{s}(n,n),$$
$$\mathbf{s}(n+1,k) = \mathbf{s}(n,k-1) + n\mathbf{s}(n,k),\ (k = 2,3,\ldots,n),$$

čime je propozicija dokazana.

Definicija 3.1 *Brojevi* $\mathbf{s}(n,k)$, $(n \geq 1,\ k = 1,\ldots,n)$ *nazivaju se Stirlingovi brojevi prve vrste bez znaka. Takođe se definiše* $\mathbf{s}(0,0) = 1$ *i* $\mathbf{s}(n,k) = 0$, *za* $n < k$.

Definicija 3.2 *Brojevi* $s(n,k) = (-1)^{n-k}\mathbf{s}(n,k)$ *nazivaju se Stirlingovi brojevi prve vrste sa znakom ili samo Stirlingovi brojevi prve vrste.*

Jednakosti dobijene u prethodnoj propoziciji predstavljaju rekurentne formule za Stirlingove brojeve prve vrste bez znaka. Iz tih jednakosti lako je dobiti njihovo osnovno kombinatorno značenje.

Propozicija 3.2 *Broj* $\mathbf{s}(n,k)$ *jednak je broju permutacija grupe* S_n *koje se mogu napisati u obliku proizvoda od* k *nezavisnih ciklusa.*

Dokaz. U razlaganju permutacija grupe S_{n+1}, koje se razlažu na k ciklusa, element $n{+}1$ može pripadati ili nekom jednočlanom ciklusu, a takvih je očigledno $\mathbf{s}(n,k-1)$, ili nekom višečlanom ciklusu. Ove druge možemo dobiti tako da element $n+1$ postavimo na bilo koje od n mogućih mjesta u permutacijama iz S_n, koje se razlažu na k ciklusa, pa takvih ciklusa ima $n \cdot \mathbf{s}(n,k)$. Tvrdnja sada slijedi iz prethodnih rekurentnih formula za $\mathbf{s}(n,k)$.

Dokažimo još neke važne formule za ove brojeve. U terminima Stirlingovih brojeva sa znakom jednakost (3) može se napisati u obliku

$$f^{(n)}(\ln x) = \frac{1}{x^n}\sum_{k=1}^{n} s(n,k)f^{(k)}(t). \tag{5}$$

Iz ove jednakosti se jednostavno izvodi definicija Stirlingovih brojeva prve vrste, data u [1].

Propozicija 3.3 *([1], Def. 8.1) Za svako $n \geq 1$ i svako $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$(\alpha)_n = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)\alpha^k. \tag{6}$$

Proof. Dovoljno je uzeti $f(x) = e^{\alpha x}$ u (5).

Zamijenjujući x by $1+x$ in (5) dobijamo

$$(1+x)^n f^{(n)}[\ln(1+x)] = \sum_{k=1}^{n} s(n,k) f^{(k)}(t), \tag{7}$$

gdje je $t = \ln(1+x)$.

Ako fiksiramo k i posmatramo funkciju $f(t) = \frac{t^k}{k!}$, tada je $f[\ln(1+x)] = \frac{[\ln(1+x)]^k}{k!}$. Jasno je da vrijedi $f^{(k)}(1) = k!$ i$f^{(n)}(1) = 0,\ (n \neq k)$. Zamijenjujući ovo u (7) dobijamo sljedeću:

Propozicija 3.4 *([1], Th. 8.3 (a)) Za $n \geq k$ vrijedi*

$$\left\{ \frac{[\ln(1+x)]^k}{k!} \right\}_{x=0}^{(n)} = s(n,k).$$

Drugim riječima $\frac{[\ln(1+x)]^k}{k!}$ je eksponencijalna funkcija generatrisa za Stirlingove brojeve prve vrste.

Abstract

The propose of this paper is to show that Stirling numbers of both kind and its fundamental properties may be obtained non-combinatorially, within the frame of the differential calculus of the function of one variable only.

Literatura

[1] C. A. Charalambides, *Enumerative combinatorics*, Chapman&Hall/CRC, 2002.

[2] Comtet, *Advanced Combinatorics*, Reidel, 1974