MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969**
XV(2)(2009), 19-29

Šta je algebarsko mišljenje?[1]

Daniel A. Romano

Odsjek za matematiku i informatiku, Univerzitet u Banjoj Luci
Mladena Stojanovića 2, 78000 Banja Luka
e-mail: bato49@hotmail.com

Sažetak: U ovom članku se izlaže jedan pogled na postojanje i razumijevanje algebarskog mišljenja unutar matematiöko-psihološkog entiteta 'matematičko mišljenje'. Za očekivati je da prezentacija ovdje izloženog pogleda na algebarsko mišljenje posredstvom dvije ideje – razvoj alata matematičkog mišljenja i sagledavanje fundamentalnih algebarskih ideja – može bar malo da pomogne realizatorima nastave matematike.

Abstract. This article suggests and organizes some components of algebraic thinking that have been previously discussed by math educators and mathematicians through bibliography. It is hoped that by presenting a synthesis of these ideas, educators will make more informed curriculum and instruction decisions about algebraic thinking, and students will be better prepared for and more successful in their secondary mathematics adventures.

Ključne riječi: algebra, algebarsko mišljenje, fundamentalne algebarske ideje
Mathematical Didactic Classification: C30 Cognitive processes. Learning theories
Mathematical Subject Classification (2000): 97C30 Student learning and thinking; **97C50** Theoretical perspectives (learning theories, epistemology, philosophies of teaching and learning)

1. Uvod

Problem razumijevanja algebre implicira druga dva problema[2]: 'Šta je priroda algebre?', i 'Kakva je priroda razvoja inteligencije kod djece?' Podučavanje algebre trebalo bi, dakle, organizovati tako da do izražaja dođe, s jedne strane, algebra kao

[1] Tekst ovog rada je zamišljen kao uvodno predavanje o algebarskom mišljenju unutar kursa Metodika nastave matematike II koji studenti IV godine nastavnog smjera studijske grupe Matematika i informatika slušaju na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Banjoj Luci

[2] Sam Rososhek: *Forming algebra understanding in MPI-project*; CERME 1, Vol. II, WG 6, 184 -194

intelektualni kulturološki fenomen ljudskog roda i, s druge strane, da (snažno) utiče na razvoj individualnih intelektualnih sposobnosti učenika.

Na početku, postavimo sebi pitanje: Šta je algebra? Podsjetimo se Weyl [3] – Šafarevič [4] koncepta. On se može sumirati na sljedeći način:

(a) Svaki fenomen, svaki proces u realnom svijetu (kao i u samoj matematici) može se „koordinatizirati" u okvirima nekog referentnog sistema koordinatizacije;
(b) Subjekt algebre je studija različitih sistema koordinatizacije entiteta bilo konkretnih (kao što su, na primjer, brojevi, polinomi, permutacije, klase ostataka, matrice, funkcije, i tako dalje ...) bilo apstraktnih (grupe, prsteni, polja, vektorski prostori, i tako dalje ...);
(c) Ako neki fenomen još nije koordinatiziran u okvirima nekog familijarnog sistema referencije, to znači da problem koordinatizacije još može da raste. Zadatak algebre je da razriješi ovaj problem tako što će izgraditi neki novi sistem za koordinatizaciju, ali njegovo dalje izučavanje može ali ne mora da bude u vezi sa problemom koordinatizacije, već sa njegovim rješavanjem unutar novoizgrađenog referentnog sistema za koordinatizaciju.

Ovakav način gledanja izdvaja algebru iz područja u kojoj se stvari mogu objašnjavati apstrakcijama i logikom, i stavlja je u područje referativnih sistema za koordinatizaciju. Čini se da razumjevanje referativnih sistema koordinatizacije predstvalja veliki značaj za svijet znanja [2]. Čini se, dalje, da se ovo može prihvatiti kao dobro obrazloženje da se neki elementi apstraktne algebre uključe u školski curriculum. Naravno da se sad pojavljuje sljedeće pitanje: Kako se kod učenika formira razumijevanje algebre? Sa kojim se zahtjevima učenici treba da susretnu u školi da bi se postiglo, u nekom stepenu, učeničko razumjevanje algebre? Postoji procjena [2] da bi sljedeća algebarska znanja trebalo da budu uključena u školske kurseve:

(1) Algebarska simbolika kao univerzalni apstraktni jezik za opisivanje realiteta.
(2) Algebarske operacije, uključujući značajan broj njihovih baznih osobina.
(3) Algebaerske strukture kao specifične forme kodiranja informacija.
(4) Semantika algebraskih pojmova kao premisa specifičnih aspekata kako realizacije tako i aspekta konekcije ne samo sa sferom iskorištavanja ljudskog iskustva već i sferom logičko-intelektualnog promišljanja.

Odavde zaključujemo, savladavanje algebre znači ovladavanjem novim jezikom, novim metodama znanja, novim formama organizacije informacija kao i novi pogled na realnost. Međutim, da bi učenici gledali na algebru kao na ovdje izložene aspekte, trebalo bi, u tom cilju, izvršiti njihovu psihološku pripremu.

---

[3] H.Weyl: *Topology and abstract algebra as two roads of mathematicakl comprehension*; Amer. Math. Monthly, 102(5)(1995), 453-460

[4] И.Р.Шафаревич: *Основные понятия алгебры*, *Алгебра 1*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 11, ВИНИТИ, Москва, 1986, 5–279

Međutim, na algebru možemo gledati kao na jedan apstraktan sistem, u kojem se, u međusobnim isprepletenosti, reflektuju aritmetičke strukture[5]. Ti procesi su apstraktne šeme, ili strukturne koncepcije aritmetičkih operacija kao što su jedankost i operaciona pravila, kombinovani sa algebarskim pojmom varijable.[6] Aritmetika ne operiše na istom nivou kao apstratkna algebra, iako je u obje involvirano pisanje simbola i razumijevanje operacija (na primjer, poredak operacija, inverzna operacija). Aritmetika je limitirana brojevima i brojevnim izračunavanjima.

Podsjetimo se da je razumjevanje matematike potpuno odvojeno od memorisanja matematičkih algoritama. Mnogi matematički algoritmi su vrlo korisni u mnogim aplikativnim poljima, i unutar matematike omogućavaju izračuunavanja. Dakle, potrebu memorisanja algoritama, u principu, treba svesti na neophodnu mjeru. Međutim, potrebu za učeničkim razumjevanjem matematike treba snažiti, zbog korisnosti razvoja tehnologija matematičkog mišljenja, kao i interpretacija rezultata rada u matematici. Unutar pojma matematičko mišljenje [7, 8], izdvaja se pojam 'algebarsko mišljenje'.

Prema Linsu [9] (1992), misliti algebarski znači:

(i) misliti aritmetički, što znači modeliranje brojevima;

(ii) misliti introspektivno što znači da se samo uzimaju u obzir operacije i relacije jednakosti te da se entiteti posmatraju procjenjuju elementima polja brojeva i aritmetičkih operacija; i

(iii) misliti analitički, što treba razumjeti kao pitanje kako treba biti nepoznato da bi se tretiralo kao poznato.

Na primjer, pri rješavanju sljedećeg zadatka[10] mogu da se ustanove komponente aritmetičkog mišljenja:

588 putnika mora se prevesti iz jednog mjesta u drugo radi čega će putnici koristiti dva različita voza. Jedna kompozicija sadrži samo vagone od 12 mjesta, dok se u drugoj kompoziciji nalaze samo vagoni sa 16 mjesta. Pretpostavimo da ovaj poslednji voz ima osam vagona više nego prva kompozicija. Koliko vagona najmanje treba da imaju obje kompozicije da bi se svi putnici prevezli?

---

[5] T.J.Cooper, A.M.Williams and A.R.Baturo: *Equal, expression, equation ant the meaning of variable: A teaching experiment*; In: (J.M.Truran and K.M.Truran, editors) Proceedings of 22th conference of the mathematics Education Research Group of Australiasia (MERGA), Adelaide 1999, 177-184

[6] T.J.Cooper, G.Boulton-Lewis, L.Wills and S.Mutch: *The transition from aritmetic to algebra: Initial understandings of equals, operations and variable*; PME 1997, Vol. 2, 89-96

[7] O matematičkom mišljenju pisao je ovaj autor u svom tekstu D.A.Romano: *Motivi za izučavanje matematičkog mišljenja*, Nastava matematike (Beograd), Vol. LIII (3-4) (2008), 1-11

[8] Uri Leron: *Origin of mathematical thinking*; CERME 3 (2003), TG 1, 1-8 pp

[9] R.C.Lins: *A framework for understanding what algebraic thinking is*; Ph:D. University of Nottingham. 1992.

[10] N.Bednarz, L.Radford, B.Janvier and A.Lepage: *Aritmetical and algebraic thinking in problem-solving*; PME 16 (1992), Vol. 1, 65-72

Kao islustraciju algebarskog mišljenja, navedimo zadatak poznat kao 'Taxi problem' [11]:

Kada koristimo taksi, plaćamo 'polazni trošak' u iznosui od 0.80 Eura, i 0.30 Eura po pređenom kilometru. Odgovoriti na sljedeća pitanja:

1. Od čega zavisi trošak jednog korištenja taksija?
2. Ako platimo y Eura za jedno korištenje taksija, pri pređenih x kilometara, prikazati y kao funkciju veličine x.
3. Napraviti kratku tabelu međuovisnosti veličina x i y.
4. Opisati kako se konstruiše graf ove funkcije.
5. Ako je za jedno korištenje taksija plaćeno 5 Eura, koliko kilomenata je pređeno?
6. Ako je pri korištenju taksija šoferu dato 5 Eura. Koje sve moguće rute su plaćene, i koliki je kusur pri svakoj od tih ruta?

Jasno je da je algebarsko mišljenje jedna posebna forma matematičke refleksije. Ali, šta je to što algebarsko mišljenje, čini posebnim? Luis Radfor, u svom članku[12] iz 2006. godine, iznosi sljedeće: U vezi sa algebrskim mišljenje ističu se sljedeća tri elementa. Prvi je u vezi sa smislom neodređenosti, koja je osobina jednog od baznih algebarskih objekata, poznatog kao nepoznata, varijabla i/ili parametar. Drugi, ta nedeterminisanost je objekt koji se tretira analitički. To je razlog zašto su, na primjer, Vieta i drugi matematičari 16-og vijeka govorili o algebri ako o analitičkoj umjetnosti. Treći, algebarsko mišljenje, na svojstven simbolički način, označava izučavane matematičke objekte.

2. Komponente algebarskog mišljenja

Algebarsko mišljenje, u ovom tekstu, slijedeći Shelley Kriegler[13], organizovano je u dvije glavne komponente: razvoj sredstava matematičkog mišljenja, i sagledavanje fundamentalnih algebarskih ideja. Alatima matematičkog mišljenja smatramo sljedeće: *analitička sredstva svijesti*, *specijalne vještine rješavanja problema*, *vještine rezonovanja i posebne reprezentativne vještine*. Fundamentalne algebarske ideje predstavljene su domenom u kojem sredstva matematičkog mišljenja mogu da se razvijaju. Algebarske ideje ovdje su predstavljene posredstvom tri različita pogleda: *algebra kao apstrakcija aritmetike*, *algebra kao jezik*, i *algebra kao jedan alat koji nam omogućava da analiziramo funkcije i matematičke modele*.

Unutar ove skice može se razumjeti zašto se mnogo razgovara, uz znatan broj nesuglastica između realizatora nastave matematike i matematičara, o tome šta i kako treba predavati školsku matematiku. Oni koji obrazlažu da je učenje / studiranje matematike važno jer ono pomaže razvoj logičkih procesa, vjerovatno

[11] V.Farmaki, N.Klaoudatos and P.Verikios: *Introduction of algebraic thinking: Conecting the concept of linear function and linear equation*; PME 2004, Vol 4, 393–400

[12] Luis radford: *Algebraic thinking and generalization of patterns: A semiotic perspective*; PME-NA 2006, Vol. 1, 2-21

[13] Shelley Kriegler (1997, 2006): *Just what is algebraic thinking*?; preprint

uzimaju u obzir da su alati matematičkog mišljenja značajnije komponente matematičkog podučavanja, dok oni koji izražavaju zabrinutost zbog nedostataka u poznavanju matematičkih sadržaja, kao i strogosti u učeničkom / studentskom iskazivanju tog znanja vjerovatno su se fokusirali na davanje većeg značaja algebarskim idejama. U stvari, oba aspekta su važna. Teško je zamisliti da neko može imati sposobnost raspolaganja i korištenja logičnog mišljenja (alata matematičkog mišljenja) a da pri tome zna malo o objektima o kojima razmišlja. Isto tako, skoro je neprihvatljicvo da postoji mogućnost da se raspolaže značajnim algebraskim vještinama o izvjesnom broju algebarskih objekata (i struktura). Jačanje matematičkih kompetencija u području algebre moguće je uz znatnu usklađenost i sudjelovanje savladavanju znatnog broja algebarskih ideja, uz snažno ispoljavanje alata matematičkog mišljenja.

Alati matematičkog mišljenja	**Neformalne algebarske ideje**
Vještine rješavanja problema (zadataka) • Korištenje strategija rješavanja problema (zadatka) • Istraživanje viševalentnosti pristupa rješavanju problema (zadataka) / Istraživanje nejednoznačnosti rješenja problema (zadataka) *Vještine predstavljanja* • Predstavljanje međuodnosa visuelno, simbolički, numerički, verbalno • Uspostavljanje veza između različitih reprezentacija • Interpretacija informacija unutar representacija *Vještine rasuđivanja / zaključivanja* • Analizirajući probleme ekstrakcija i kvantifikacija esencijalnih karakteristika • Induktivno zaključivanje • Deduktivno zaključivanje	*Algebra kao apstraktna aritmetika* • Pojmovno zasnovane strategije računanja • Srazmera i proporcija • Procjenjivanje *Algebra kao jezik matematike* • Značenje / smisao varijabli i formiranje terma i formula • Značenja rješenja • Razumijevanje i iskorištavanje brojevnih sistema • Čitanje, pisanje i manipulacija sa brojevima i simbolima (unutar algebarskih konvencija) • Korištenje ekvivalentnih simboličkih reprezentacija za manipulisanje termima, formulama (uključujući jednačine i nejednačine) *Algebra kao alat za analizu /studij funkcija i matematičkog modeliranja* • Traganje za šablonima i pravilima u kontekstima realnog svijeta, te

	njihova algebarska ekspresija i generalizacija • Predstavljanje matematičkih ideja korištenjem jednačina, tabela, grafova, ili riječi • Rad sa input/output uzorcima • Razvoj vještina koordinatizacije grafova

3. Eksperati o algebarskom mišljenju

Osim gore iznesenog mišljenja Linsa iz 1992. godine, iz njegove disertacije, o tome šta je to algebrasko mišljenje, niže navodimo nekoliko mišljenja nekih drugih metodičara matematike:

Greenes and Findell[14](1998): Velike ideje algebarskog mišljenja uključuju predstavljanje, proporciono zaključivanje, balans, značenje varijabli, šablone i funkcije, induktivno i deduktivno zaključivanje.

Herbert and Brown[15](1997): Algebarsko mišljenje je korištenje matematičkih simbola i alata za analizu različitih situacija, posredstvom: (1) ekstrakcije informacija iz date situacije ...; (2) predstavljanje tih informacija matematičkim riječima, dijagramima, tabelama, grafovima, i/ili jednačinama ...; i (3) interpretacijom i primjenom matematičkih nalaza kao što su pronalaženje nepoznatog, testiranje konjuktura, i identifikacija funkcionalnih odnosa.

Kieran and Chalouh[16](1993): Algebarsko mišljenje uključuje razvoj matematičkog zaključivanja unutar misaonih algebarskih šablona, izgradnjom / pronalaženjem značenja algebarskih simbola i operacija aritmetičkim terminima.

LUMR Project[17](Driscoll, 1997): Kapacitet algebarskog mišljenja uključuje sposobnosti razmišljati o funkcijama i o tome kako one funkcionišu, i razmišljati o njihovom uticaju na izračunavanje unutar jedne strukture nekog sistema.

[14] C.Greenes and C.Findell: *Algebra Puzzles and Problems (Grade 7*). Mountain View, CA: Creative Publications, 1998.

[15] K.Herbert & R.Brown: *Patterns as Tools for Algebraic Reasoning*; Teaching Children Mathematics, 3 (February 1997), 340-344.

[16] C.Kieran & L.Chalouh: *Prealgebra: the Transition from Arithmetic to Algebra; In Research ideas for the Classroom:* Middle Grades Mathematics (edited by Douglas T. Owens). Reston, VA: NCTM, 1993.

[17] M. Driscoll: *Thinking About Algebraic Thinking: A Framework for Belief, Reflection, Discussion, and Student Work Analysis*. Adapted from The Leadership for Urban

Usiskin [18] (1997): Algebra je jedan jezik. Ovaj jezik ima pet glavnih aspekata: (1) varijable (nepoznate), (2) formule, (3) generalizaciju šablona, (4) držaće mjesta / prazna mjesta (placeholders), (5) relacije. Ako se u bilo koje vrijeme o ovim idejama razgovara sa djecom od obdaništa pa naprijed, tada postoji mogućnost da se uvede algebarski jezik.

Vance [19] (1998): Algebra se ponekad determiniše kao uopštena aritmetika ili kao jedan jezik za generalizaciju aritmetike. Međutim, algebra je više od skupa pravila za manipulaciju simbolima: to je jedan poseban način mišljenja.

Kieren [20] (2004): Razvoj algebarskog mišljenja u ranijim godinama školovanja podrazumjeva razvoj posebnog načina mišljenja koje uključuje analiziranje relacija između veličina, isticanje struktura, studiranje promjena, generalizaciju, problematiku rješavanja problema / zadataka, modeliranje, procjenjivanje, provjeravanje kao i prognoziranje.

4. Sredstva matematičkog mišljenja

Sredstva matematičkog mišljenja, ovdje, u ovom tekstu, su organizovana u tri opšte kategorije: vještine rješavanja problema / zadataka; vještine predstavljanja, i vještine rezonovanja. Ovdje iznesene deskripcije daju opise ovih analitičkih procesa unutar matematičkog konteksta. Međutim, važno je istaći da se alati mišljenja koriste u mnogim drugim područjima.

Suština rješavanja problema / zadataka je u tome da se zna šta treba da se uradi kad se ne zna šta treba uraditi.[6] Učenici, koji raspolažu sa bar jednim strateškim kompletom alata za rješavanje problema / zadataka (tj. sistemom: naslučivanja i nagađanja moguće solucije te provjeravanjem naslućenog, pravljenje liste povoljnih, mogućih rješenja, provjeravanje, pravljenje i provjeravanje kontrapozicija, korištenje modela, rješavanje jednostavih primjera, i slično), su u boljoj poziciji da pristupe sagledavanju problema / zadatka, da formiraju neku strategiju 'napada' na problem / zadatak, te da razumiju šta treba da rade. Dalje, treba prihvatiti činjenicu da realan svijet ne pokazuje jasno gdje se nalaze ključevi za odgovore, niti kako se do njih dolazi, a ponekad i ne sadrži te ključeve. Dakle, dajući učenicima mogućnost istraživanja matematičkih problema / zadataka prihvatanjem postojanja različitih pristupa problemu / zadatku, i/ili, pak, samostalnom konstruisanju matematičkih problema / zadataka koji imaju više rješenja omogućava se učenicima ne samo da

---

Mathematics Reform Project (LUMR) for Linked Learning in Mathematics. Newton, MA. (August, 1997)

18 Z.Usiskin: *Doing Algebra in Grades K-4*; Teaching children Mathematics, 3 (February 1997), 346-356.

19 J.Vance: *Number Operations from an Algebraic Perspective*; Teaching Children Mathematics, 4 (January 1998), 282-285.

20 C.Kieren: *Algebraic thnking in the early grades: What is it?*; Mathematics Educator (Singapure), 8(1)(2004), 139-151

razviju dobre vještine rješavanja problema / zadataka već da stiču iskustva o korisnosti matematike.

Sposobnost korištenja i pravljenja konekcija različitih (pogotovo višeznačnih) reprezentacija matematičkih informacija opskrbljuje učenike, učesnike gore opisanih aktivnosti, kvantitativnim komunikcijskim vještinama. Matematičke srodstvene veze između matematičkih objekata mogu biti prikazane (mogu se uočavati) u mnogo formi uključujući vidljivo (tj. dijagrame, slike ili grafove), numeričko (tj. talele, listinge), simbolično i verbalno. Često, dobro matematičko objašnjenje uključuje istovremeno više ovih reprezentacija jer svaka od njih doprinosi, na svoj sopstven način, razumijevanju prezentiranih ideja. Sposobnost kreiranja, tumačenja, te prelaženja sa jedne na drugu reprezentaciju (te njihovo međusobno upoređivanje i komplementiranje) daje učenicima moćne alate matematičkog mišljenja.

Konačno, sposobnosti mišljenja, rezonovanja i izvođenja zaključaka su fundamentalne u matematičkoj uspješnosti. Induktivno zaključivanje uključuje ispitivanje posebnog slučaja, identifikaciju šablona i veza u tom slučaju, te ekstenziju uočenih šablona i konekcije među elementima posmatrane strukture. Deduktivno zaključivanje uključuje izvođenje konkluzija iz ispitivane problemske strukture. Iako često međusobno nerazdvojena u logičnom matematičkom rezonovanju, korisna su oba ova tipa zaključivanja.

5. Fundamentalne algebarske ideje

Linija razdvajanja između studiranja neformalnih algebraskih ideja i formalne algebre je često vrlo rasplinuta. U ovom tekstu, pod algebarskim idejama podrazumjevamo identifikaciju namjera da u konkretnim i/ili familijarnim kontekstima, iznesemo neke stavove koji mogu pomoći učenicima da dublje i fundamentalnije sagledaju stroge konceptualne osnove algebre, u svom kasnijem bavljenju matematikom. U tom cilju, algebarske ideje se mogu prepoznati kroz sljedeća tri vida: algebra kao apstrakcija aritmetike, algebra kao jedan jezik i algebra kao alat za studij fukcija i matematičkog modeliranja.

Algebra se ponekad prepoznaje kao generalizacija ili apstrakcija aritmetike. Pod tim podrazumjevamo ispitivanje, u prvim osnovnoškolskom ciklusu, osobina kako smisla brojeva tako i smisla operacija između njih budući da smatramo da snažan razvoj aritmetičkog mišljenja kod učenika u tim godinama može biti solidna osnova ne samo za pojavu već i dalji razvoj algebarskog mišljenja.

Na primjer, djeca koja imaju iskustva u istraživanjima konteksta u kojima su neki objekti međusovno multiplikativno vezani, lakše će razvijati iskorištavanje svojih vještina proporcionog zaključivanja u algebarskim kontekstima. I, naravno, učitelji / nastavnici, koji pomažu učenicima da razumiju specifične aritmetičke procedure koje su konceptualno konzistentne sa uopštenim algebarskim procedurama, opskrbljuju te učenike sposobnostima prihvatanja postojanja, daljeg razvijanja i iskorištavanja umreženih konekcija, kada se oni, ti učenici, u drugom i/ili trećem osnovnoškolskom ciklusu, počnu baviti izučavanjima nekih (jednostavnijih) algebarskih struktura.

Algebra je jezik matematike: Razumjevanje ovog jezika uključuje razumjevanje koncepta varijabli, i onog što varijable predstavljaju kao i značenja rješenja. On uključuje svojstva korištenja osobina brojnih sistema. On zahtijeva postojanje sposobnosti čitanja, pisanja i manipulisanja kako brojevima tako i pojmovima koje predstavljaju simboli u formulama, ekspresijama, jednačinama i nejdnačinama. Ukratko, fluentnost u ovom jeziku, jeziku algebre, zahtjeva razumjevanje značenja vokabulara (tj. simbola i varijabli), te fleksibilno korištenje gramatičkih pravila ovog jezika (tj. matematičkih osobina i konvencija).

Na kraju, na algebru se često gleda kao na alat za analizu /studiranje funkcija i matematičkog modeliranja. Traganje za prikazivanjem i generalizacijom šema i pravila u kontekstu realnog svijeta, reprezentacija matematičkih ideja korištenjem jednačina, tabela i/ili grafova; rad sa 'input and output' šemama, razvoj vještina koordinatizacije grafova i matematičkih procesa i procedura izgrađuju algebarske vještine. Funkcije i matematičko modeliranje predstavljaju forum za aplikaciju algebarskih ideja.

6. Zaključak

Poteškoće učenika prvog razreda srednje škole sa elementarnom algebrom su dobro dokumentovane i analizirane u istraživačkim radovima mnogih autora. Poznato je da postoje pokušaji koji su fokusirani na rano učenje algebre u starijim razredima osnovne škole (kod nas, u drugom, i posebno u trećem ciklusu osmogodišnje škole), uz pretpostavku da je za djecu korisno ako se kod njih utiče na razvoj algebarskog mišljenja (u vezi sa aritmetičkim mišljenjem). U poslednjoj dekadi, značajan broj kako nastavnika tako i istraživača iz različitih zemalja je saglasan da je neophodno početi sa razvojem algebarskog mišljenja već u starijim razredima osnovne škole.[21] Glavna tvrdnja velikog broja (međunarodnih) istraživača je da djeca kod koje počinju razvoj algebrskog mišljenja u starijim razredima osnovne škole ne samo da ovladavaju boljim aritmetičkim vještina nego i bolje razumiju suštinske strukture i pravila, koje su ranije identifikovane kao poteškoće u učenju algebre u srednjim školama.

Rana algebra, rano algebarsko mišljenje ili pred-algebra su termini korišteni za opisivanje preliminarnog stepena elementarne algebre, koji prethodi učenju algebre u srednjoj školi. Ideja nije u tome da se učenici podučavaju u formalnoj algebri u mlađim školskim godinama već da se poboljšaju posebni aspekti algebarskog rezonovanja, podržavani matematičkim mišljenjem koje prevazilazi vještine računanja na nivou nižih razreda osnovne škole. Ipak, čini se da egzaktnu definiciju rane algebre, kao i njenih implikacija u podučavanju učenika, nije baš jednostavno uvesti. Značajan broj publikacija analizira odnos između rane algebre i aritemtike, kao i prelaz između njih, ali problem gdje aritmetika prestaje i počinje rana algebra još nije razriješen. Postoji mišljenje[22] da je jedna od razlika u tome da algebarsko mišljenje se odnosi na procese, dok se aritmetičko odnosi na rezultate, tj. na

[21] E.Waren: *Algebraic understanding and the importance of operation sense*; PME 2001, Vol. 4, 399-406

[22] N.Malara and G.Navarra: *Arithmetic pathways towards favouring prealgebraic thinking*; ArAl Project, Bolonga 2003.

pronalaženje odgovora. Ili, prema jednom drugom mišljenju[23], rana algebra se identifikuje kroz dva aspekta: (1) generalizacija, i (2) korištenje simbola za predstavljanje matematičkih ideja i rješavanje matematičkih problema.

Istraživači su, čini se, saglasni da je rana algebra više involvirana nego generalizacija aritmetičkih struktura u razvoj razumjevanja kako struktura tako i sistema brojeva i operacija sa njima. U jednom drugom radu[24], iskazuje se uvjerenje da je rana algebra involvirana u generalizaciju aritmetike, funkcionalno mišljenje i modeliranje. Warren[25] (2003) proširuje razumijevanje rane algebre identifikacijom četri centralna aspekta: (1) veze između veličina; (2) grupa osobina operacija; (3) veze između operacija; i (4) sveobuhvatne veze između matematičkih entiteta.

Drugi važan element ovog teksta je model ili „definicija" termina 'algebarsko mišljenje'. Jasno je da je teško prihvatiti postojanje egzaktne definicije pojma 'algebarsko mišljenje', ali je, isto tako, jasno da treba odbaciti pogled na algebru kao jednu generalizaciju numeričkog domena. Dato je nekoliko primjera o mišljenju nekih istraživača o njihovom pogledu na ono što ovaj termin pokriva.

Literatura

korištena i konsultovana pri pisanju ovog teksta

[1] Abraham Arcavi, Luciana Bazzini, Catherine Sackur, Pessia Tsamir: *Algebraic thinking*; CERME 3 (2003), WG 6, 1-5 pp.

[2] M.Battista & C.Brown: *Using Spreadsheets to Promote Algebraic Thinking*. Teaching Children Mathematics (January, 1998): 470-478.

[3] Pilar Bolea, Marianna Bosch and Josep Gaschon: *The role of algebraisation in the study of mathematical organization*; CERME 1 (1998), Vol. II, 135-145

[4] D. Chambers: *The Right Algebra for All*. Educational Leadership 51 (March, 1994): 85.

[5] Jean-Philippe Drouhard, Mabel Panizza, Luis Puig and Luis Radford: *Algebraic Thinking*; CERME 4 (2005), WG 6, 631-642

[6] M. Driscoll: *Thinking About Algebraic Thinking: A Framework for Belief, Reflection, Discussion, and Student Work Analysis*. Adapted from *The Leadership for Urban Mathematics Reform Project (LUMR) for Linked Learning in Mathematics*. Newton, MA. (August, 1997)

[23] T.P.Carpenter and L.levy: *developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades*; Report No. 2, University of Winscounsin-Madison, 2000.

[24] Maria L. Blanton and James J. Kaput: *Elementary grades students' capacity for functional thinking*; PME 28 (2004), Vol.2., 135-142

[25] E. Warren: *The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra*; Mathematics Education Research Journal, Vol. 15 (2)(2003), 122-137

[7] U. Dudley: *Is Mathematics Necessary*? Mathematics Education Dialogues, 1(2) (March 1998), 4-6

[8] C.Greenes and C.Findell: *Algebra Puzzles and Problems (Grade 7*). Mountain View, CA: Creative Publications, 1998.

[9] K.Herbert & R.Brown: *Patterns as Tools for Algebraic Reasoning*; Teaching Children Mathematics, 3 (February 1997), 340-344.

[10] C.Kieran & L.Chalouh: *Prealgebra: the Transition from Arithmetic to Algebra*; In *Research ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics* (edited by Douglas T. Owens). Reston, VA: NCTM, 1993.

[11] D.A.Romano: *Motivi za izučavanje matematičkog mišljenja*, Nastava matematike (Beograd), Vol. LIII (3-4) (2008), 1-11

[12] Sam Rososhek: *Forming algebra understanding in MPI-project*; CERME 1 (1998), Vol. II, WG 6, 184-194

[13] E.Silver: '*Algebra for All'-A Real-World Problem for the Mathematics Education Community to Solve*; NCTM XChange, 1 (February 1997), 1-4

[14] Inge Schwank, Emanuila Gelfman and Elena Nardi: *Mathematical thinking and learning as cognitive process*; CERME 1 (1998), Vol. II, 16-23

[15] J.Vance: *Number Operations from an Algebraic Perspective*; Teaching Children Mathematics, 4 (January 1998), 282-285.

[16] L.Steen: *Does Everybody Need to Study Algebra*? The Mathematics Teacher, 85 (1992), 258-260.

[17] Z.Usiskin: *Doing Algebra in Grades K-4*.; Teaching children Mathematics, 3 (February 1997), 346-356.