МАТ-КОЛ (Бања Лука)
XV(1)(2009), 37-58

ЗАСНИВАЊЕ МАТЕМАТИКЕ[1]

Слађана Бабић

Природно-математички факултет, Универзитет у Бањој Луци
78000 Бања Лука, Младена Стојановића 2, Б&Х
e-mail: sladjanababic71@yahoo.com

Сажетак

Појмови заснивања и оснивања математике су различити, док се проблем заснивања математике односи на утемељеност (заснованост) читаве „зграде“ математичких тврђења на неким полазним, основним, претпоставкама, тачније системима аксиома, оснивање математике више има историјски контекст и обраћа се њеним почетцима. Али управо ту, на далеким и временском дистанцом замагљеним почетцима математике је и сусрет та два појма: јер можемо се питати одакле потиче наша претстава о томе да математика треба да буде заснована на неким аксиоматским системима.

Грчка – први проблеми и кораци ка дедуктивном заснивању математике

Јасно је да се такво схватање математике први пут среће код старих Грка. Пре њих су Вавилоњани и нешто мање Египћани имали веома развијену практичну математику. Међутим та се математика сводила на низ упутстава како нешто израчунати, док се нико није питао зашто та правила важе. Тај корак од практичног питања „како?“ до научног „зашто?“ је значио стварање математике као теоријске дисциплине каквом је данас знамо. Јасно је да је тај (ис)корак начињен у старој Грчкој, али када и како се он десио, сасвим је магловито. Неки историчари математике, на пример један од првих који се

[1] Рад је мој семинарски рад који сам радила на последипломским студијима на Математичком факултету у Београду у оквиру испита 'Историјски преглед развоја математичких идеја' код професора Милана Божића

тиме бавио, Прокле из Константинопоља, у коментарима Еуклидових „Елемената“, тврди да је грчка теоријска математика настала из практичне математике коју су они наследили и упознали у својим контактима са вавилонском и египатском традицијом. Други опет сматрају да се теоријска математика развила сасвим независно од практичне, чак би се могло рећи да су јој корени више повезани са филозофијом него са практичном математиком.

Филозофија је код Грка била средство којим су покушавали да спознају свет око себе у најопштијем смислу речи, тј. целокупну стварност, као и узроке те стварности. Математика им се чинила примером поузданости, дакле могла је само да помогне у том филозофском спознавању света. Ако Талеса из Милета прихватимо за оснивача Грчке филозофије, а Сократа као првог филозофа у правом смислу те речи, код кога је (што је за тему о којој се расправља битно) јасно изражен захтев за дедуктивним закључивањем, јасно је да се у периоду између њих први пут појављује идеја о заснованости закључивања, конкретно математике.

Највероватније је да је Талес познавао математичка тврђења која су била позната и Вавилоњанима, али се не зна да ли их је доказивао, претпоставља се да и ако јесте онда је то било методом дијаграма. Питагора и његови следбеници су развили читаву филозофију броја. Сматрали су да се бројевима може објаснити свет, чак и више од тога: „Све је број“, њихова је главна догма, а главно достигнуће је апстракција која се код њих први пут јавља (дакле, рецимо број 2 је апстрактан појам и може да означава било ћупове, било маслине или било шта друго, а правила рачунања која важе за бројеве су примењива у конкретним ситуацијама за конкретне објекте). Пошто је то било у складу са њиховом филозофијом, питагорејци су се бавили доказима. Првенствено су их занимали бројеви. Али они су под бројем подразумевали само природне бројеве. Осим њих су користили и сразмере бројева и, у вези са разломцима, претпоставља се да реч „логос“ са значењем реч, ум, разум, смисао, потиче од њих, каснији њен превод на латински био је *ratio*. Дакле, питагорејци су за број поред природног могли прихватити и рационални (тачније позитиван рационални број). Међутим, они су познавали доказ несамерљивости странице и дијагонале квадрата (вероватно да га сам Питагора није знао, али његови следбеници јесу). То откриће је унело велику пометњу у саму питагорејску филозофију, али и у целокупну грчку математику и филозофију. Из праксе мерења Грци су сматрали да се свака дужина може изразити бројем (тј. рационалним бројем) конкретно, као одређени број јединица мере и остатак који је неки разломак. Доказ да се дијагонала квадрата странице 1 не може изразити као однос природних бројева сасвим је реметио догму „све је број“, али и више од тога: у математици је било јасно да општеприхваћени појам броја није довољан, а у филозофији се дошло до закључка да математика и није баш тако поуздана како се мислило, у смислу да оно што (интуитивно) изгледа веома природно некада и не мора да важи. Значи потребно је подробније размотрити математичка тврђења, видети која од њих происходе из других, а која су тако елементарна да се могу подразумевати и узимати као полазна у закључивању. Утицај овог тврђења на филозофију се може видети ако погледамо Демокритову атомистичку теорију која је подразумевала да се све састоји од недељивих атома. По тој теорији би требало да све дужи буду измериве елементарним дужинама атома.

Осим проблема са недовољношћу појма броја (онаквог какавим су га прихватали) Грци су имали проблем и са бесконачношћу. Зенон је желећи да одбрани појам Једног, непокретног и универзалног, навео парадоксе против мноштва и против кретања. Ма како их ми сада тумачили, они су старе Грке навели на опрез у погледу бесконачности. Било је јасно да ако се појмови бесконачно малог, бесконачно великог, бесконачне дељивости дужи, као и појмови простора и кретања користе без прецизног утемељења може доћи до противуречности.

Изгледа да је решење за оба проблема (и броја и бесконачности) за Грке било избегавање суочавања са њима. Иако им је било јасно да се све дужи не могу измерити (рационалним) бројевима они нису променили појам броја већ су увели појам величине, који ће са Еудоксовом теоријом пропорција у ствари постати дуалан појму реалног броја. Исто тако систематски су заобилазили појам (па чак и реч) бесконачности. О томе говори знаменита Архимедова аксиома (то јој је данашње име иако се први пут среће код Еудокса – ту она гласи: „Величине су у међусобно могућем односу ако једна помножена неким бројем може превазићи другу.“, другим речима нећемо расправљати о бесконачно малим величинама), као и Еуклидово тврђење о простим бројевима које каже да: „Простих бројева има више од сваке предложене количине простих бројева.“ Дакле, бесконачност је најбоље и не помињати. О томе колико су се трудили да избегну кориштење бесконачности као и бесконачно малих или бесконачно великих величина говори и Архимедово најпозније откривено аутобиографско дело „Метод“. Он ту помиње да у проналажењу резултата користи тзв. метод еквилибриума. Тај метод је у ствари претеча метода бесконачно малих величина, а подлога су му били механички аргументи. Међутим, Архимед тај метод никада није формализовао и никада га није користио када је излагао доказе. У ту сврху се користио методом екхаустије коју је увео Еудокс. Метод екхаустије је у ствари служио да се докаже већ познат резултат, при чему се користи закон трихотомије: $(\forall x, y)(x < y \vee x = y \vee x > y)$ који важи за било које величине. Значи да би доказали да је $x=y$ било је потребно одбацити претпоставке $x<y$ и $x>y$ свођењем на противуречност. Ради тога су се користила приближавања (реалним) величинама помоћу (рационалних) бројева. На тај начин је Еудокс био утемељивач појма величине и строгог доказа у математици, али је при том дао до знања да се у тим доказима бесконачност неће користити.

Може се рећи да су ови Еудоксови резултати, метод и аксиоме зајадно са филозофским утемељењем дедуктивног апарата и математичке логике од стране Сократа и Аристотела уз Платонистичку концепцију математичких објеката постали старогрчка догма која вековима (и после старих Грка) није мењана.

Сократ се може сматрати оснивачем математичке логике. Он је увео појам хипотезе која се потврђује или одбацује путем извођења логичких последица из ње. Ако се у том извођењу дође до контрадикције хипотеза се одбацује. Уколико се не дође до контрадикције то не значи да је хипотеза доказана јер се доказ (дате хипотезе) може извести само извођењем (дедуковањем) из неких већ прихваћених, општијих хипотеза. Осим увођења дедуктивног метода Сократ је увео „индуктивну аргументацију“ и „универзалне дефиниције“. Индуктивна аргументација је у ствари кориштење примера да би се неко тврђење објаснило. Пример не може бити доказ али може упућивати ка њему. Универзалне дефиниције су биле покушај да се прецизира (савременим речником речено) појам релације.

За Платона се може рећи да је кроз своју Академију био покровитељ развоја математике кроз дуги низ година (Академија је трајала око 900 година). Он је у својим дијалозима изложио и доследно примењивао Сократов дедуктивни метод. Иако Платон концепт форми, тј. идеалних објеката приписује Сократу, није потпуно јасно да ли је то ипак изворно његова идеја коју приписује свом учитељу да би добила на тежини. Код Платона идеални објекти (форме, облици) сачињавају једини стварни свет. Чулни, опажајни свет је само бледа и варљива слика (сенка) тог света. Испитивање појавног света је бесмислено јер је тај свет променљив и због тога таква сазнања не воде истини. Права истина о свету идеја се може достићи једино путем ума, тј. размишљањем, никако чулима. Због тога је за Платона значајно дедуктивно закључивање у математици јер је оно један од исправних путева сазнања. Он је стриктно против доказивања и илустровања путем дијаграма јер су то несавршене имитације савршених математичких објеката. За врхунски начин сазнавања Платон сматра дијалектику – вештину постављања питања и давања одговора чији је циљ да се хипотезе замене сигурним знањем, неким примарним принципом. Дакле, опет се срећемо са потребом заснивања сазнања на неким примарним (несумљиво истинитим) принципима.

Оно што је Сократ започео Аристотел је доградио и систематизовао у неколико дела из логике од којих су кључне Прва и Друга аналитика. Аристотел највише пажње посвећује дедукцији. Уводи тзв. силогизме или правила извођења, где се из две претпоставке изводи закључак. Код њега се идеја о дедуктивном заснивању наука јавља у свом пуном изражају и детаљно је изложена у Другој (Вишој) аналитици. Дакле, Аристотел захтева да се дедуктивне науке излажу тако што се тврђења изводе (по логичким правилима) из основних принципа који се не доказују. Из појма основног принципа произилази савремено схватање аксиоме и може се рећи да Аристотел први пут јасно објашњава шта је аксиома, иако се сама идеја „опште прихваћене хипотезе“, „раније потврђене хипотезе“ среће и код Сократа. Аристотел основне принципе дели на аксиоме, постулате и дефиниције. Данас је разлика између постулата и аксиома занемарена, а код старих Грка је била битна, аксиоме су означавале општа сазнања која су применљива у свим наукама, постулати су искази који се сматрају истинитим без доказивања али се тичу само одређене области знања или одређене науке. Дефиниција објашњава појмове који се користе (уводе) помоћу неких већ познатих појмова. На тај начин се савремено схватање дефиниције поклапа са Аристотеловим.

Дедуктивни метод излагања који је Аристотел утемељио, први пут је доследно спроведен код Еуклида у његовом најпознатијем делу – „Елементима“. „Елементи“ претендују да аксиоматски заснују основна математичка знања тада позната (не сва – отуд назив „Елементи“). И пре

Еуклидових „Елемената“ било је „Елемената“, тј. радова са истим насловом и са сличним циљем – заснивања неких делова математике. Међутим, Еуклидово дело је најкомплетније и у смислу досегнуте аксиоматике и у смислу садржајности. Наравно да по савременим схватањима аксиоматски систем који Еуклид предлаже за заснивање првенствено геометрије није потпун, али се може рећи да је најбољи у поређењу са другима до тада датим. После се јавио и проблем ауторитета. „Елементи“ су прихваћени као нека врста математичке Библије и вековима се математика (у ствари геометрија) по њима учила а да нико није чинио значајне поправке у аксиоматици. Доказе су поправљали, постулате не. Изгледа да је то тако било све до открића нееуклидских геометрија – значи читавих двадесет и једно столеће. Оно што је дело Еуклида или можда математичара из генерације његових учитеља – сазнање да се тврђење да кроз тачку ван дате праве пролази само једна права паралелна датој, врло тешко може доказати, па да га стога треба уврстити у постулате, је у XIX веку стављено под сумњу и створена је другачија геометрија, она која не описује свет очигледно као Еуклидова. То да геометрија добро и јасно описује свет (у ствари „стварни“ Платонов свет идеја) је била филозофска подлога Еуклидових „Елемената“. Могуће је да је то разлог за непотпуност аксиоматског система „Елемената“. Јасно је да у њему нема аксиома непрекидности и распореда. Пошто је старим Грцима изгледало да је геометрија моћнији систем од аритметике, јер геометрија барата величинама а аритметика (рационалним) бројевима, а знали су да има величина које нису рационалне, онда је било јасно да геометрија боље описује (и објашњава) свет. Чак, Грци су (можда би то требало сматрати филозофским постулатом) сматрали да нема релативизације у претходној реченици поређењем „боље“. Они су једноставно мислили да је геометрија изузетно средство да се сазна свет (у складу с тим је и чувени натпис над вратима Платонове Академије: „Овде не улази онај ко не познаје геометрију“). На неки начин је оно што се подразумева у свету могло и да се подразумева и у геометрији, па тиме и непрекидност. Међутим, можда има и још неких (опет филозофских) разлога да се аксиоме непрекидности избегну. Оне у себи сакривају бесконачност а Грци су, колико су год могли, бежали од ње. За непостојање аксиома распореда се може окривити и традиција доказа са слике (дијаграмом), против које се Платон борио, али је ипак остала укорењена. Слика, тј. очигледност је везана са визуелном претставом (додуше чулног) света, а са њом је опет геометрија на неки начин еквивалентна. Платону је сметало што је визуелност слике (дијаграма) чулне и несавршене природе, а можда онима иза њега то није било тако битно, па су га зато оставили као средство које иде уз доказ. То да се Платонов идеални свет провлачи као филозофска подлога „Елемената“ видљиво је и по томе како Еуклид дефинише тачку (оно што нема делова) или линије (оно што нема ширину а има дужину).

Значи Еуклидови „Елементи“ су прво дело које својом дедуктивном структуром одваја математику од емпирије, међутим чињеница да је грађено на Платоновом схватању света оставља га зависним од тог (платонистичког) концепта. Значи математички објекти су ипак везани за некакву, па макар била и идеална, стварност, тј. постоје барем у свету идеја. Овакво схватање постојања математичких објеката изродило је правац у филозофији математике који и данас траје, чак га прихвата већина математичара, а назива се платонизам. Он је дубоко укорењен јер је вековима негован, и данас када деци први пут објашњавају шта је права почињу да је описују слично Еуклидовој дефиницији: бесконачно се протеже у дужину, а нема ширине...

Оно што је неоспорно јасно је да су стари Грци дошли до схватања да науке треба засновати аксиоматски и да су методе тог заснивања сумиране и јасно описане код Аристотела. Притом је потреба да се науке заснују на дедуктивним принципима произашла из филозофије и наметнута наукама, међутим у свим овим разматрањима треба имати у виду да наука и филозофија у то доба нису биле тако јасно дистанциране као данас. Сам Аристотел је покушао да дефинише и појмове који су изазивали недоумице и парадоксе као што су непрекидност и бесконачност. Резултат тог покушаја је стварање нове догме: грчка математика је одбацила актуелну бесконачност дозвољавајући само потенцијалну. Аристотел је тако сматрао да бесконачна дељивост дужи није могућа и да се због тога дељењем дужи не може стићи до тачке јер би било потребно бесконачно много подела. Он сматра и да је актуелна бесконачност противуречна и зато недопустива. Једино што се допушта је потенцијална бесконачност, као када код низа природних бројева за сваким природним бројем следи један још већи. Ова догма је ограничила грчке математичаре, а касније и оне који су се васпитавали на грчкој традицији. Пример је Архимед који је по свом методу еквилибријума био близак инфинитезималном рачуну и Њутновом схватању бесконачно малих. Аристотел је по обиму дела који је оставио мажда и највећи грчки математичар и да није било тако јаких догми у погледу схватања бесконачности и у погледу општеприхваћеног начина излагања математичких доказа помоћу Еудоксове методе екхаустије, можда би и учинио тај продор и формално засновао своју методу еквилибријума. Међутим морали су проћи векови да се математичари ослободе ових догми и почну да слободно баратају са бесконачношћу. Али то је изродило нове проблеме који су довели до поновног враћања питању заснивања мтематике.

Ренесанса – период поновног упознавања са математиком

Архимед као највећи грчки математичар погинуо је од руке римског војника задубљен у своје кругове уцртане на песку, бар тако легенда сведочи. У овој смрти је оличен пад грчке цивилизације и њене склоности ка филозофској контемплацији. Долази Рим сасвим другачијих, практичних, гледишта са практично прихваћеним хедонизмом, без потребе да се о њему филозофира. Како римско друштво није имало никаквих идеала, а морал се исцрпљивао у формирању правне нормативе, заменио га је други, хришћански, поглед на свет са својим идеалима и моралним нормама. Оне су опет биле склоне догмама и затворене у своје схватање духовности. Ту није било места за рационално испитивање света, ни за развој науке, ни оних које сада називамо природним, а ни математике која испитује своје објекте који могу а не морају бити у вези са овим светом. Векови су прикрили скоро сва знања која су поседовали стари Грци.

Чувари тих знања постали су Арабљани који су најзначајнија дела грчке математике превели и на тај начин сачували од заборава. Европа је почетком XIII века преко Леонарда Фибоначија из Пизе почела да преко арапских превода упознаје грчку математику. Наравно није акценат био само на грчкој математици, већ је све ишло кроз арапски филтер, истовремено је био упознат позициони децимални систем (који називамо арапским цифрама иако је реч о индијским цифрама) и неке нумеричке вештине које су биле изворно арапске или са месопотамским коренима.

Требало је времена да децимални позициони систем уђе у употребу, а грчке догме у погледу броја су опстајале у смислу да и 0 као број није била дуго прихваћена (гледали су је само као знак за празно место) као ни негативни бројеви. Први значајан и нов математички резултат који стари Грци нису познавали било је решавање кубне једначине. За њега смо сазнали преко Карданове (XVI век) „*Ars Magna*“ („Велика вештина“) па се зато обрасци и називају Кардановима иако их он није открио већ само објавио. Само решење кубне једначине је довело до сусрета не само са негативним већ и са комплексним бројевима. Кардано није спреман да прихвати комплексан број, али оперише са њим (у изразу типа $(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})$=25-(-15)=40). Опет је било потребно да прођу векови да математичари прихвате комплексан број.

Треба напоменути да су се и ренесансни математичари као и стари Грци у недостатку алгебарске нотације служили описним изражавањем помоћу говорног језика. Велику новост у том погледу пружа Бомбелијева „Алгебра“ (XVI век) у којој се већ виде зачеци алгебарске нотације.

Период великог ослобађања грчких догми и (хаотичног) нагомиловања математичких знања

Три велике грчке догме биле су:

1. у погледу разликовања броја (као рационалног) и геометријских величина;
2. у погледу избегавања појма бесконачности уопште јер она производи парадоксе попут Зенонових;
3. да се прихвати само потенцијална бесконачност, а одбаци актуелна, што је у математици довело до одбацивања метода доказивања у којима се она појављивала.

У XVII веку Ферма и Кавалијери проучавајући и допуњавајући Архимедова и Аполонијева дела схватају колико су Грци намерно заобилазили рад са бесконачношћу и почињу да се баве њоме. Они занемарују друге две догме и долазе до резултата који још нису потпуно утемељени и образложени, али је њихов допринос у самом суочавању са актуелном бесконачношћу.

Декарт је уз своју „Расправу о методу“ као додатак објавио и Геометрију. Најзначајније у Геометрији је да она значи раскид са првом грчком догмом јер тврди да свакој величини одговара број и обрнуто. Наравно, сада број није тако уско схваћен као код Грка, сада је постојао развијен децимални систем, слободно се радило са ирационалним бројевима иако још увек није било сасвим јасно шта је реалан број. Битно је било да је створена филозофска подлога за изједначавање (по моћи) алгебре и геометрије и њихово повезивање. Друго што је значајно за математику и уопште природне науке је утемељивање рационализма – мишљења да је свако сазнање, па и научно, могуће само помоћу ума, рационалним приступом. Осим тога Декарт (слично Платону) истиче да је математика пример поузданог сазнања и да свако научно сазнање мора бити засновано на њој.

Приметно је за период рушења грчких догми и увођење рационалистичког погледа на свет је да се и раскид са догмама и поверење у математику враћа без много аргумената, без прецизног образлагања, можда је декартовска координатизација најобразложенија, али ипак је реч о враћању поверења уму и математци зато што је то на неки начин логично и зато што (као и избацивање догми) даје изузетне резултате.

Овакав приступ да се резултати и методе прихватају зато што добро функционишу и зато што су плодни задржао се и даље. Тако је било и са најкрупнијим резултатом XVII века, каркулусом (иако се може рећи ида је то и метода или, тачније, математичка техника). Каркулус као име одговара смислу који су му придавали његови проналазачи (изумитељи – зависно од тога да ли прихватамо релистички поглед на математику или не). Они су диференцирање и интеграцију гледали као операције (рачун) са функцијама а не преко граничних вредности. Међутим, они нису ни примећивали да њихова техника није сасвим утемељена, они су је једноставно примењивали тежећи да притом добију што више резултата. Те су се примене (посебно код Њутна) огледале у механици и уопште у физици. На тај начин математика XVII века престаје да занемарује чулни свет, она и даље барата са идеалним објектима, али се њени резултати могу применити и тумачити у опажајном свету, поред тога из тог света се чак црпе и инспирација за развој математичке теорије. У оваквој (активној) вези између математике и природних наука може се видети допринос картезијанства.

У XVIII веку се настављају тенденције из XVII века у погледу слободног баратања са бесконачношћу и новим математичким оруђима, иако се не испитује њихова поузданост, па та слобода понекад прелази у површност и неосновано ослањање на интуицију. Циљ је да се достигне што више нових резултата и математичари те епохе не брину много о путевима којима се стиже до њих. Најплоднији математичар XVIII века – Ојлер и његово дело осликавају тежње читаве епохе. Ојлерово дело је веома садржајно али умногоме засновано на интуицији – таква је и математика XVIII века.

Врло брзо после увођења Њутновог (и Лајбинцовог) каркулуса појавила се критика бискупа Џорџа Берклија у расправи „Аналитичар“ где он примећује да су основни појмови помоћу којих Њутн уводи диференцијал, тј. флуксије, сасвим незасновани. Ова критика је имала одјека међу математичарима XVIII века који су покушали да исправе грешку и заснују диференцијално-интегрални рачун. Многи математичари као што су Тејлор, Лагранж, Де Моавр, Јакоб и Јохан Бернули и Маклорен су дали свој допринос том покушају. Најбитније дело те врсте је Маклоренов „Трактат о флуксијама“. Међутим математичарима XVIII века тај посао као да је био успутан. Они су превасходно тежили новим резултатима. Поверење у поузданост математике је било чврсто у свести научника (и филозофа) тог доба иако необразложено. Оно је извирало из платонистичког поимања математике и схватања математичких објеката као реално постојећих макар у свету идеја. Касније је картезијанство у платонистички поглед на свет увело и рационално сазнавање умом и проверавање тог сазнавања у природи (Бекон). Сада је одвајање од чулног света као преварног и лажног све мање присутно.

Ово води Кантовој филозофији која је идеалистичка, али на други начин од Платона, са повећаном улогом чулног сазнања које обликује интуицију. Имануел Кант је стварао у XVIII веку и његова је филозофија утицала на савременике, па и на математичаре с почетка XIX века. Кант тврди да се математика бави изучавањем основних облика интуиције и перцепције, тј. простора и времена. Пошто су то основни облици сазнања остале се науке ослањају на њу. Даље последице су да не постоји непримењена математика и да се она односи на стварни свет који се може сазнати чулима уз помоћ унапред датих способности ума, а математика проучава управо те априорне (унапред дате) способности. Овакав став да је математика средство којим се поуздано сазнају својства света и да су добијена сазнања применљива у чулном свету и у наукама које директно испитују чулни свет, је преовладавао у математици XVIII и прве половине XIX века. Као што се види из кратког описа преовлађујућих филозофских праваца тог времена, јасно је да тај став не извире из саме математике већ да је формиран филозофским учењима која су тада доминирала.

Оно што је директно стављало у питање овакав став о математици као данекле природној науци (која, барем посредно, открива истине о чулном свету) било је откриће нееуклидске геометрије. Проблем зависности петог постулата од осталих интересовао је још античке математичаре, такође њиме су се бавили и математичари XVII, XVIII и XIX века. На тај начин су настали многи погрешни докази петог постулата, поменућу рецимо Прокла (Vв.), Валиса (XVIIв.), Сакерија (XVII в.), Лежандра (XVII- XVIII в.). Гаус, који је вероватно најзначајнији математичар на прелазу из XVIII у XIX век, се такође бавио петим постулатом, али је доказивао његову независност од осталих, он није ишао даље, схватајући да је пети постулат независан од осталих није желео да размишља о томе шта се дешава када се посматра његова негација, што је управо пут који је Јаноша Бољајија и Лобачевског довео до открића нове геометрије.Разлог да Гаус и многи математичари прве половине XIX века не прихватају могућност другачије, тј. нееуклидске, геометрије је у већ описаном прихватању математике као природне науке. Млади Бољаји је извођењем последица негације петог постулата схватио да је „ни из чега створио сасвим нови свет“, међутим резигнирајући став Гауса према његовом открићу (изуму?) га је разочарао и после објављивања првих резултата у виду додатка очевој књизи није више радио на новој геометрији. Лобачевски је био систематичнији и упорнији. Он је извео последице геометрије без петог постулата – значи засновао оно што данас називамо апсолутном геометријом, а затим изводио последице које се добију када се на апсолутну геометрију дода негација петог постулата: “Кроз тачку ван праве постоје бар две праве које су паралелне са том правом.“ Пошто је у самој Русији наишао на одбијање штампања својих радова у познатијим центрима од Казана, где је живео и радио, он их је објавио у иностранству, иако уз много проблема и тек после десетак година. Само објављивање нове геометрије није значило и њено прихватање. Петнаестак година после објављивања геометрије Лобачевског у иностранству Риман је одржао своје хабилитационо предавање под називом:"О хипотезама које леже у основама геометрије" (то је било 1854. год.). У њему се назирало да су нееуклидске геометрије могуће. Та могућност другачијих геометрија поимана римановски је значила да ми не знамо која је геометрија „тачна" у свету у којем живимо, могуће је да локално живимо у еуклидовском свету, а глобално у свету лобачевске геометрије. Међутим овај релативизам померило је откриће еквиконзистентности двеју геометрија од стране Белтрамија и Клајна. Белтрами је у тродимензионалном еуклидском простору нашао модел дводимензионалне равни геометрије Лобачевског и тиме питање непротивуречности геометрије Лобачевског свео на питање непротивуречности геометрије Еуклида. Клајн је, обрнуто, унутар простора геометрије Лобачевског нашао модел за еуклидску геометрију и на тај начин показао њихову еквиконзистентност. Еквиконзистентност двеју геометрија значила је њихову равноправност са математичке тачке гледишта. Ово није било лако помирити са схватањем да само једна геометрија тачно описује чулни свет. Математичари су једноставно одустали од њега, тај свет је постао неважан за њих и није више мерило исправности математичких теорија. Геометрија Лобачевског је само једна од нових, апстрактних теорија које су утицале да овакво, ново, схватање математике као науке одвојене од природе преовлада. Поред ње најзначајнија је теорија група коју је увео Еварист Галоа почетком XIX века. Клајн је касније уочио да се групе појављују у разним областима математике: у геометрији, анализи, теорији бројева и на основу њих покушао да заснује читаву математику. Оно што је значајно за појам групе је апстракција коју она нуди: више нису значајни сами објекти са којима радимо већ везе међу њима (њихови односи). На тај начин математика почиње да се бави структурама независно од објеката који их сачињавају. Овај приступ карактерише савремену математику и постаје прихваћен крајем XIX века.

Почеци у заснивању анализе и проблеми који су произашли

Паралелно са оснивањем нових области математике у XIX веку текао је и процес заснивања анализе. Већ сам напоменула да су и математичари XVIII века били упознати са проблемом незаснованости анализе, али нису били на њега превасходно оријентисани. Постојао је проблем приступа самом заснивању: један начин је био да са покуша са логички доследним заснивањем појма инфинитезимале (бесконачно мале величине), други начин је био да се она избаци из анализе тако што ће се појмови засновани на њој дефинисати на други начин. Почетком XIX века је одлучено да се крене Аристотеловим путем и покуша избацивање инфинитезимале а са њом и актуелне бесконачности. Коши и Болцано двадесетих година XIX века нуде појам граничне вредности низа као замену за инфинитезималу. Болцанова дефиницаија је ближа данашњем схватању теореме и говори да (савременим речником) сваки Кошијев низ конвергира. Кошијева дефиниција граничне вредности низа је иста као и савремена. Коши даље дефинише граничну вредност функције у некој тачки a преко граничне вредности свих низова $f(x_n)$ где је $\{x_n\}$, $n\in$□ произвољан низ који тежи тачки a. Он дефинише појам извода, који се и сада користи, уместо појма диференцијала који је у првобитном смислу третиран као инфинитезимала. Дефинише појам непрекидне функције преко граничне вредности функције у тачки. Коши предлаже да се ирационални број дефинише као лимес низа рационалних бројева који теже ка њему. Међутим ова дефиниција није задовољавајућа по савременим мерилима, јер ако хоћемо да докажемо егзистенцију објекта који се дефинише (тј. реалног броја) користимо теореме у којима се подразумева њихово постојање. Вајерштрас је кренуо од граничне вредности функције коју дефинише преко околина. Он низове посматра као функције дефинисане на скупу природних бројева. Он предлаже да се ирационалан број поистовети са низом рационалних бројева који теже ка њему. Овај приступ је близак савременом увођењу реалног броја преко Кошијевих низова, с тим што треба увести релацију еквивалентних низова (у ствари еквиконвергентних) и све Кошијеве низове рационалних бројева посећи њоме. Даљи корак у изградњи реалног броја чини Дедекинд. Он уводи појам пресека скупа рационалних бројева □. Уређени пар (A, B) непразних подскупова □ је пресек ако је A ∪ B = □ и $(\forall x, y)(x \in A \wedge y \in B \Rightarrow x < y)$. Реалан број се по Дедекинду поистовећује са оваквим пресеком скупа рационалних бројева. Особине реалних бројева се изводе коришћењем особина рационалних бројева и неких особина скупова. Идеја коју су следили Коши, Болцано а за њима Вајерштрас је била да се из математике избаци инфинитезимала а са њоме и актуелна бесконачност. Међутим остварења су у себи крила проблеме: код Кошијеве дефиниције граничне вредности функције у тачки a преко граничних вредности свих низова који теже тој тачки a крије се актуелна бесконачност јер морамо посматрати свеукупност низова који теже тачки a. Код Вајерштраса се гранична вредност функције дефинише преко околина, а околина је бесконачан скуп реалних тачака неког интервала. Код Дедекинда се реалан број посматра као уређени пар бесконачних скупова рационалних бројева па тиме опет имамо сусрет са актуелном бесконачношћу.

Дакле јасно је било да проблем није лак и да, чак и ако се схвати да се проблеми анализе своде на проблеме са бројевима, при самом заснивању реалног броја се не може избећи бесконачност и то актуелна, која води на несигуран терен, па је зато и полазна намера била да се она избегне.

Крајем XIX века у математици су се појавили многи нови, збуњујући резултати. Велики део тих резултата је извео Георг Кантор. Он је оснивач такозване наивне теорије скупова. Та теорија подразумева да свако својство одређује неки скуп. Кантор није засновао своју теорију скупова нити ју је систематски изложио (иако је намеравао да то учини), међутим овакво схватање скупа се провлачи кроз све његове радове. Први Канторови радови из теорије скупова тичу се пребројивости скупа рационалних бројева и скупа алгебарских бројева. У тим чланцима се израз пребројив користи за скупове који могу бити стављени у једнозначну коресподенцију са скупом природних бројева, дакле за скупове чији се елементи на неки начин могу поређати у низ. Скуп рационалних бројева је пребројив и скуп алгебарских бројева такође, али сада се наметало питање шта је са скупом реалних бројева, да ли се они некако могу сврстати у низ. Одговор је негативан и Кантор је ово показао своји познатим дијагоналним аргументом. Испоставило се да реалних бројева има (много) више него рационалних, а тиме и природних, јер се не могу поређати у низ. У вези са овим било је логично увести дефиницију еквипотентности (равномоћности) скупа: то су скупови између којих се може успоставити обострано једнозначна коресподенција. Такође је логично и упоређивати кардиналности тако што кажемо да скуп A није веће кардиналности од скупа B ако постоји пресликавање између скупова A и B које је „1-1“ али не мора бити „на“. За то да је скуп A строго мање кардиналности од B мора се показати да A није веће кардиналности од B и да они нису еквипотентни. Тако се испоставило да је скуп природних бројева мање кардиналности од скупа реалних бројева. Корак даље је дефиниција бесконачног скупа: „Скуп је бесконачан ако је еквипотентан своме правом делу“. Ова дефиниција је Дедекиндова. Дедекинд и Кантор су сарађивали и упознавали су један другога са својим радовима. Ако се израз еквипотентан (исте моћи) схвати као једнак онда ова дефиниција пркоси грчким догмама од којих је једна избегавање (посебно актуелне) бесконачности. Еуклид у својим „Елементима“ наводи аксиому: „Целина је увек већа од сваког свог дела.“ Архимеду (а можда и неким математичарима пре њега) је било јасно да постоји обострано једнозначна коресподенција између скупа свих природних бројева и свих парних природних бројева. Међутим старим Грцима је ово својство служило као аргумент да се не треба бавити бесконачним скуповима јер имају тако чудна својства и зато су уведене забране попут наведене Еуклидове аксиоме. О проблему узајамно једнозначне коресподенције скупа природних бројева и његовог правог дела (напр. скупа парних бројева или скупа квадрата природних бројева) размишљао је и Галилеј у раној ренесанси. Међутим иако схвата да и једних и других има бесконачно и да су у том смислу ти скупови једнаки, Галилеј закључује да су својства једнакости као и упоређивања величина бесмислена када се говори о бесконачним скуповима, па су, дакле, примењива само за коначне скупове.

Даљи Канторови резултати су изазвали недоумицу и самог аутора. Рецимо доказ да је скуп тачака јединичног квадрата еквипотентан са скупом тачака јединичног интервала је Кантора веома изненадио. Затим показује да је скуп свих подскупова датог скупа веће кардиналности од самог скупа. Ово му омогућје да уведе скалу бесконачности и трансфинитне бројеве – ординале.

У својим радовима Кантор се среће са врло необичним скуповима. Најпознатији је тзв. Канторов скуп, он је непребројив, тачније еквипотентан је са $\mathbb{R}$, али је врло мали, мере је 0, уз то је затворен и ограничен, тј. компактан. На Канторовом скупу и скупу избачених интервала се могу дефинисати врло необичне функције.

Међутим необичне функције су биле познате и пре Кантора. Још је Болцано (а за њим и Вајерштрас) конструисао пример функције дефинисане на јединичном интервалу која је непрекидна и нема извод ни у једној тачки. Биле су познате функције са пребројиво много максимума и минимума на интервалу [0,1], касније су конструисане функције које у околини сваке тачке Канторовог скупа имају пребројиво много максимума и минимума. Конструисане су функције дефинисане на јединичном интервалу чији график има бесконачну дужину. Такође се знало и за затворене криве које леже у ограниченим областима а чија је дужина бесконачна. (О овоме опширније видети у [3], глава 3.) Оно што је заједничко за већину ових објеката (како Канторовог скупа тако и споменутих функција) је да се дефинишу корак по корак, тј. на неки начин постоји алгоритам њиховог конструисања, с тим што се завршни објекат са необичним својствима добија бесконачним настављањем описаног поступка (алгоритма). Појава овако необичних објеката имала је две последице, једна је била изражавање потребе да се ствари реорганизују и среде, уредно дефинишу тако да се избегну необичности, или барем да би се видело које од њих имају подлогу а које не. То је уродило упитаношћу над неким појмовима који су сматрани очигледним као што су крива, површ. С друге стране математичари старог кова нису хтели да се баве оваквим објектима. На пример Ермит је писао Стилтјесу: „Ја се са ужасом клоним рак-ране непрекидних функција које немају извод ни у једној тачки.“, или Поенкаров коментар: „Некад се приликом проналажења нових функција имао на уму какав било практичан циљ. Сада се функције измишљају специјално зато да би се уочили недостатци у расуђивању наших очева, ништа друго се не да из њих извући.“ (Требало је да прође стотинак година да би се видело да ове необичне функције имају примена у физици...)

Успутна последица Канторовог доказа непребројивости скупа реалних бројева је да је скуп трансцедენталних бројева равномоћан са скупом реалних бројева. Оно што је у томе необично је то да је алгебарске бројеве врло лако конструисати, а има их релативно мало (пребројиви су), а трансцеденталне бројеве је врло тешко конструисати иако их има континуум много.

Зачетник конструктивизма и велики противник Кантора био је Леополд Кронекер. Он је допуштао само природне бројеве и коначне методе у смислу алгоритамских поступака којима се у коначном броју корака може конструисати неки објекат. Са становишта Кронекера Канторов доказ непребројивости скупа трансцеденталних бројева је био неприхватљив јер је изведен неконструктивно, методом свођења на противуречност. Кантор није нашао ниједан трансцеденталан број ефективно, а тврди да их има толико! Наравно Кронекер није могао одбити чињеницу да је, рецимо, π трансцеденталан јер је постојао алгоритам изналажења његових цифара, а такође и доказ да није решење ниједне алгебарске једначине. Кронекеров став води „сигурном“ путу у заснивању математике који тежи да на специфичан начин елиминише бесконачност из математике. Проблем је у томе што тај начин води избацивању многих делова математике.

Италијански математичар Ђузепе Пеано је дао пример непрекидног пресликавања јединичног интервала „на“ јединични квадрат. Овај резултат је унео још више конфузије међу математичаре с краја XIX века и указао на потребу заснивања појма криве и осталих који су се користили а да нису били прецизно дефинисани. На основу Дедекиндових резултата било је јасно да се реални бројеви могу засновати преко рационалних користећи нека својства скупова а ови преко природних. Међутим, природни бројеви нису били засновани. Разлог за то је било неговање поверења у ствари које су биле очигледне, као и грчка традиција занемаривања бројева (тачније мишљења да се природни бројеви подразумевају). Наиме, Грци су сматрали да је геометрија средство сазнавања идеалног Платонавог света и зато важнија у односу на бројеве који су имали ограничене домете и зато сматрани само помоћним средством; чак су и својства бројева, а првенствено величина, изражавана геометријски, што иде у прилог чињеници да су бројеви занемаривани, посебно у Еуклидовим „Елементима“. Њихова својства су у старогрчкој перцепцији била сводива на геометрију, што заједно са чињеницом да им није придавана иста важност као и геометрији доводи до тога да су их само подразумевали не покушавајући да их аксиоматски заснују. Проблеми који су у XIX веку били уочени тицали су се ствари које су сматране очигледним и које су се подразумевале, па се дошло до свести да су све математичке дисциплине и сви математички објекти равноправни у смислу да захтевају прецизне дефиниције и аксиоматизацију. Своју аксиоматизацију природних бројева Пеано је формирао 1889, у савременој интерпретацији аксиоме су:

$$0 \neq 0'$$
$$x'=y' \Rightarrow x=y$$
$$x+0=x$$
$$x+y'=(x+y)'$$
$$x \cdot 0=0$$
$$x \cdot y'=x \cdot y+x$$
$$\varphi(0) \wedge (\forall x)(\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x')) \Rightarrow (\forall x)\varphi(x)$$

При чему x' означава функцију следбеника за x, а φ било коју формулу у којој је x слободна променљива. Изворни исказ аксиоме индукције гласио је другачије, био је дат преко скупова: „Ако 0 припада неком скупу А и ако за сваки x који припада А и x' такође припада скупу А, онда скуп А садржи све природне бројеве.“ Проблем са оваквом формулацијом је што је задата у предикатском рачуну другог реда који може користити скупове као променљиве. Скупови у време формулације Пеанових аксиома нису били аксиоматски засновани, те исказивање аксиоме индукције преко скупова компликује интерпретирање система аксиома аритметике (тј. Пеанових аксиома) и доказивање њихове непротивуречности.

Други велики допринос који је Пеано дао заснивању математике, а који је прилично занемарен, је заснивање математичке логике. Прва поглавља његове књиге „Геометријски каркулус“ се тичу логике и ту су систематизована Булова схватања математичке логике као и неких других Пеанових претходника и савременика. Пеано користи скоро сасвим савремен језик математичке логике у погледу логичких везника и квантификатора. Енглески филозоф и математичар Бертран Расел Пеанове успехе у математици приписује управо способности баратања новим језиком математичке логике.

Пеано је значајно утицао на свест математичара с краја XIX века да је посао око заснивања математике битан и чак приоритетан. У математичкологичком језику који је формирао они су имали алат којим су могли да приступе том важном задатку. Сам Пеано је покренуо издавање серије уџбеника који су имали за циљ „систематско излагање свих теорема математике“. Пројекат је био преамбициозан и преопширно схваћен, али је указивао да је заснивање математичких дисциплина могуће тако што би се прво засновале неке основне дисциплине, а за тим на њима и све остале.

Готлоб Фреге је такође крајем XIX века покушао да заснује математику у својим књигама „Основи аритметике“. Он је пре Пеана развио свој формалнологички језик (зато се и наводи као творац математичке логике) међутим тај језик је био компликованији од Пеановог па је зато потиснут и прихваћен је Пеанов систем означавања.Фреге је био убеђења да се математика може свести на логику. Његово заснивање теорије скупова било је под Канторовим утицајем. То подразумева скуп схваћен интуитивно тј. да свако својство дефинише скуп. Оваква теорија скупова се означава као „наивна теорија скупова“. Тек се у XX веку показало да такво схватање скупа крије противуречности.

Крај XIX века доноси прве покушаје заснивања математике, што указује да је тај проблем схваћен као један од најбитнијих. Узроци да такво схватање преовлада као и сам приступ проблему су другачији него код старих Грка. Непосредни мотив за приступање проблему је развијено схватање о непоузданости интуиције произашло из откривања противуречности које се добијају радећи са објектима који су сматрани интуитивно јасним. Дакле, мотив није произишао споља, из филозофије, као код старих Грка, већ изнутра, из саме математике. Још је Декарт извео тај отклон од старих Грка уочавајући да се гометрија може алгебризовати. Значи две основне теорије, геометрија и систем реалних бројева су равноправне. Хилберт је на самом крају XIX века извео аксиоматизацију геометрије у својој књизи „Основе геометрије“. Да би се реални бројеви прецизно увели било је потребно формулисати теорију скупова и аксиоматизовати природне бројеве. Пеано је увео аксиоме природних бројева, док је теорија скупова у XIX веку функционисала као наивна и још увек интуитивна. У свом програмском предавању на Светском математичком конгресу 1900. године Хилберт уочава важност Пеанове аритметике (аксиоматизације природних бројева) и као други по реду проблем међу проблемима које математика XIX века оставља XX веку износи потребу доказивања непротивуречности аритметике. Значи (уколико се занемари неразрешено питање теорије скупова) проблем заснованости математике је сведен на проблем заснованости аритметике (другим речима постоји тенденција аритметизације математике). Као и код старих Грка при заснивању анализе је је покушан прогон актуелне бесконачности заменом инфинитезимала граничним вредностима. Али већ крајем XIX века постало је јасно да је актуелну бесконачност немогуће избећи. Она се појављивала имплицитно преко скупова (реалних бројева на интервалу) помоћу којих је дефинисана гранична вредност функције (по Вајерштрасу).

XX век и правци у заснивању математике

Оно што се већ крајем XIX века назирало а почетком XX века постало потпуно јасно је да такозвана наивна теорија скупова не функционише јер су у њој откривени многи парадокси. Хронолошки прва два парадокса која су откривена су Канторов (1899) и Бурали Фортијев (1897) и тичу се кардиналних и ординалних бројева.

Канторов парадокс се изводи за скуп свих скупова S (овај скуп постоји по наивној теорији скупова јер га дефинише својство „бити скуп“). Посматра се скуп $\boldsymbol{P}$(S) ($\boldsymbol{P}$(S) је партитативни скуп скупа S), пошто је он скуп биће $\boldsymbol{P}(S)\in S$ па и $\boldsymbol{P}(S)\subseteq S$ па је $card(\boldsymbol{P}(S))\leq card(S)$, с друге стране Кантор је доказао да за сваки скуп, па и S важи $card(S)< card(\boldsymbol{P}(S))$, па се добија $card(\boldsymbol{P}(S))< card(\boldsymbol{P}(S))$ што је контрадикторно.

Бурали Фортијев парадокс се односи на ординале и заснива се на чињеници да од сваког ординала постоји већи ординал. Формирамо скуп свих ординала. За сваки скуп ординала постоји ординал који је већи од сваког ординала из тог скупа. Ако посматрамо скуп свих ординала видимо да одавде следи да постоји највећи ординал. Међутим, по конструкцији ординала, за сваки ординал постоји од њега већи, тј. нема највећег ординала и ово је контрадикција.

Међутим много познатији парадокс је Раселов парадокс из 1902. године. Он је и много једноставнији за разумевање јер не користи Канторову теорију ординала и кардинала. Дакле формирамо скуп R од свих елемената x који не припадају сами себи, тј. $R=\{x \mid x\notin x\}$, сада се питамо да ли $R\in R$, ако је тако он има својство које га дефинише тј. $R\notin R$, с друге стране ако $R\notin R$ он има својство које дефинише скуп R, па је $R\in R$! Свакако долазимо до контрадикције да R и припада и не припада самом себи.

Осим ових парадокса могу се разликовати логички и семантички парадокси. Пример логичког парадокса је парадокс лажљивца у коме се испитује тачност реченице „Ја лажем.“ (Више о парадоксима у [4], глава 1.)

Све у свему парадокси Канторове теорије скупова су довели до сазнања да се схватање скупа мора битно променити. Одбачена је идеја да се универзум свих објеката може поделити на скуп оних који поседују дато својство и скуп осталих, који га не поседују. Цермело и Франкел (1908.) дају теорију скупова који се постепено изграђују од неких унапред задатих елемената (праелемената) а на следећим ступњевима се граде скупови од скупова већ изграђених на претходним нивоима. Касније је примећено да нису потребни праелементи, већ да се од празног скупа могу изградити остали скупови. На тај начин Цермело Френкелова (ZF) теорија скупова је екстензионално-кумулативна хијерархија скупова која се гради од празног скупа. Постојање празног скупа се утврђује аксиомом. Екстензионалност значи да су два скупа једнака ако имају исте елементе. Поступке грађења сложенијих скупова од једноставнијих дају: аксиома сепарације (која уједно отклања и Раселов парадокс јер тврди да се у нови скуп издвајају елементи са задатим својством само из већ изграђеног скупа), аксиома неуређеног пара, аксиома уније, аксиома партитативног скупа, аксиома замене (која тврди да је слика већ изграђеног скупа при неком пресликавању које се задаје формулом такође скуп) и аксиома бесконачног скупа која гарантује постојање бесконачног скупа који се гради тако што садржи $\varnothing$ и са сваким својим елементом садржи још један различит од тог елемента. Ту је још и аксиома редукције која упрошћава структуру скупова редукујући њихову количину тако што захтева да сваки скуп садржи бар један елемент са којим има празан пресек.

На ZF аксиомама се заснивају природни бројеви тако што се узме:

$0=\varnothing$

$1=0\cup\{\varnothing\}$

....

$n+1=n\cup\{n\}$

одакле се добија $n=\{0,1,2,...,n\text{-}1\}$. Такође се добија скуп природних бројева $\omega=\{0,1,2,...,n,...\}$ као и остали трансфинитни ординали и карднали.

Уколико се на ZF теорију дода аксиома избора (AC) добија се теорија коју означавамо са ZFC. Аксиома избора тврди да за сваку колекцију непразних скупова можемо формирати скуп који садржи по један елемент одабран из сваког скупа полазне колекције. Аксиома избора је једина неконструктивна аксиома и у том погледу се издваја од свих осталих па је умногоме била сумњива и доста је испитиван њен однос према аксиомама ZF теорије.

Кантор је поставио тзв. проблем континуума: питање је да ли је $c=card(\square)=2^{\aleph_0}$ први кардинални број који следи иза $\aleph_0=card(\square)$. Овај проблем је Хилберт навео као први на свом списку са програмског предавања на Светском конгресу математичара 1900. Решавајући проблем континуума дошло се до закључка (тек средином XX века) да је Канторова хипотеза независна од ZF аксиома, тј. да из них није изводива. Нешто раније је Гедел показао непротивуречност хипотезе континуума са ZF аксиомама. Сличан је статус аксиоме избора, она је независна од осталих аксиома ZF теорије и непротивуречна са њима (и ово је показано средином XX века). На тај начин могу постојати различите теорије скупова зависно од система аксиома који се прихвати. Без аксиоме избора многи ставови анализе не би важили, на пример не важи тврђење о еквивалентности двеју дефиниција граничне тачке (преко околина и преко низова). С друге стране са аксиомом избора се доказују многа јака и чак необична тврђења. Један од еквивалената аксиоме избора је Цермелова лема о добром уређењу која тврди да се сваки скуп може добро уредити. Како ће се то уређење спровести ми и даље не знамо, рецимо на скупу реалних бројева, што сведочи о неконструктивности аксиоме избора. Међутим без аксиоме избора анализа би изгледала много другачије, па је она практично прихваћена, иако са одређеном дозом резервисаности која се огледа у коментару на почетку књиге или при неком доказу: „... користићемо аксиому избора..." Коментар Бертранда Расела на ову аксиому је: „У почетку се она чини очигледном, али што више у њу понireш, то ти чудније изгледају њене последице, да на крају престајеш разумевати шта она означава."

Један други приступ заснивању теорије скупова дали су Нојман, Бернајс и Гедел, по којима се теорија означава са NBG. Они је нису стварали заједнички ни истовремено, већ је настала прерађивањем Нојманове идеје да функције, а не скупови буду основни објекти. На крају се дошло до двостепене хијерархије која разликује класе (њих карактерише произвољно својство) и скупове (као елементе класа). Касније се испоставило да су NBG и ZF теорије еквивалентне у смислу да су тореме доказиве у једној теорији доказиве и у другој, осим тога показано је да је претпоставка о непротивуречности ZF теорије еквивалентна са претпоставком о непротивуречности NBG теорије.

Историјски први правац у заснивању математике и отклањању парадокса дао је сам Расел. Он је осим парадокса теорије скупова разматрао и друге познате парадоксе (логичке првенствено) и дошао до закључка да је извор проблема у математици и логици када се допусти самореференца, тј. исказ који говори (неафирмативно) о самом себи. Пример је парадокс лажова тј. исказ: „Ја лажем.“, или реченица: „Ова реченица је неистинита.“, или сам Раселов парадокс јер $x \notin x$ је формула у којој x говори о самом себи. Да би се избегла могућност појаве самореференце Расел у сарадњи са Вајтхедом оснива теорију типова која почива на хијерархији. Математички објекти се разврставају у типове при чему се објекти виши у хијерархији дефинишу преко објеката који су нижи у тој хијерархији. На тај начин скуп $A=\{x \mid \varphi(x)\}$ не може да изазове парадокс јер су објекти који задовољавају својство φ и преко којих се дефинише скуп A нижи у хијерархији од A, те сам A не може да буде аргумент формуле φ. Сам приступ формирању скупова је сличан као у ZF теорији, с тим што код Расела хијерархија игра важну улогу, док се у ZF теорији хијерархија губи, а остају само скупови добијени помоћу ње. Раселова амбиција је била да се читава математика заснује на принципима теорије типова, што је покушао да спроведе у књизи „Математички принципи“.

Филозофску подлогу и свој програм тог заснивања дао је у чланку „Основи математике“ из 1902. године. Пошто је теза коју је заступао Расел да се математика може свести на логику, филозофски правац који он заступа назива се логицизам. Расел је у ствари прихватио и развио Фрегеове идеје у погледу заснивања математике. Математичарима XIX века је било јасно да су геометрија и анализа као основне математичке дисциплине сводиве на аритметику (уз нешто теорије скупова). Логицисти су покушали да број (природан – као основни) сведу на логички појам. Због тога су скупови, уређени парови и закони о њима прикључени логици. Природан број се гледа као кардинални број коначног скупа. Пошто се све дефинише преко скупова, кардинални број је схваћен као скуп свих истобројних скупова. Истобројни скупови се не дефинишу преко еквипотентности, већ се индуктивно граде као у ZF теорији, полазећи од $\varnothing$. Тако је 0 скуп свих празних скупова, 1 је скуп свих скупова чији су сви елементи идентични међусобно. Скуп који има $n+1$ елеменат се дефинише преко скупа од n елемената, дакле то је скуп свих скупова таквих да ако било коме од њих уклонимо један елеменат он ће припасти скупу свих n-точланих скупова. Скуп природних бројева се дефинише као скуп који садржи 0 и са сваким својим елементом и његов следбеник (следбеник сваком природном броју n додељује $n+1$). На овај начин се добија скуп природних бројева, а даље на њему се дефинишу остале врсте бројева, притом се добијају прилично гломазне и компликоване конструкције.

Оснивачи логицизма Фреге и Расел су по филозофском гледању на математичке објекте били реалисти. Реалисти сматрају да математички објекти реално постоје, разликују се по томе да ли их сматрају творевинама људског ума (ово ће довести до конструктивизма тј. интуиционизма), или објектима Платоновог идеалног света. У погледу ове поделе Расел је платониста. Он сматра да се математички објекти и тврђења о њима не могу изумети ни измислити, већ да се они откривају и описују. За платонисте је проблем истинитости логичког исказа реалан као и само постојање објеката о којима говоре ти искази. На тај начин се за одређени исказ увек може рећи да ли је тачан или нетачан, па важи и закон искључења трећег, тј. важи или A или $\neg$A.

Логицизам као правац у заснивању математике се може гледати и независно од филозофских убеђења својих твораца, тј. независно од платонизма. На тај начин се не мора уопште говорити о природи математичких објеката, логика се може гледати као низ правила закључивања, дакле синтаксно. У „Математичким принципима“ је тај формални приступ у ствари и спроведен.

Расел је имао амбицију да на принципима теорије типова заснује читаву математику. Чак и концепцијски тај захтев је стварао проблеме јер су уочени искази који се не дају подвести под логику (чак и проширену скуповима). Онда је Расел такве исказе именовао примењеним, јер се могу проверити емпиријски и имају везе са чулним светом. С друге стране су искази чисте математике који се могу подвести под тип $p \Rightarrow q$, где искази p и q садрже променљиве и логичке константе (схваћене у логицистичком смислу).

Логицизам је настао као покушај да се створи теорија која неће допустити парадоксе попут Раселовог. У сличном периоду се и Хилберт бавио другачијим, формалистичким, приступом заснивању математике. Основна примедба коју формалиста може ставити на логицизам је да није доказано да теорија типова заиста не садржи парадоксе.

Формализам је филозофски правац који по питању постојања математичких објеката даје одговор супротан реалистима. За формалисте математички објекти не морају да постоје и чак је то постојање небитно, па је у том смислу математика независна од онтологије. Оно што је битно за формалисту је сам поступак доказивања и аксиоматски систем из кога се докази изводе. За само заснивање математике је битно добро постављање аксиоматског система. То значи да тај систем треба да буде непротивуречан (тј. да се у њему не може извести контрадикција попут парадокса или нека друга). Осим тога пожељно је да буде минималан, тј. да се ни једна аксиома не може извести из осталих (дакле да није теорема). Следећи је захтев потпуности који значи да ма како измислили нову аксиому она то неће бити у смислу да ће бити доказива тј. бити теорема или ће доводити до контрадикције (другачије речено, да је доказива формула φ или њена негација $\neg\varphi$). На пример аксиоматски систем геометрије поседује сва наведена својства.

Питање истинитости за формалисте добија нови смисао јер је релативно, везано је за доказивост тј. непротивуречност одређеног исказа у датој теорији. Дакле истинитост не постоји сама за себе, већ је везана за одређену теорију (зато је релативна). Тако се долази до „девизе“ формалиста да је истинито оно што је непротивуречно.

Битан проблем који се појавио у доба када се Хилберт почињао да се бави заснивањем математике су парадокси Канторове теорије скупова. Формализација теорије скупова којој је циљ био избегавање парадокса је Цермело-Франкелова (ZF) теорија (или еквивалентна јој NBG теорија). Уколико се посматрају аксиоме ZF или NBG теорије синтаксно, значи само као низови симбола, онда је јасно да је чак и аксиома бесконачности само коначан низ симбола. На тај начин се докази могу посматрати само као трансформације тих низова симбола по дозвољеним правилима дате теорије. Теореме које се добијају су опет коначни низови симбола и ако се не бавимо њиховим значењем оваквим приступом прогонимо бесконачност из математике. Вероватно је чињеница да овај приступ елиминише проблем актуелне бесконачности навела Хилберта да покуша да таквим начином заснује читаву математику. Он је геометрију у то доба већ био формализовао и питање њене непротивуречности је било сведено на питање непротивуречности система реалних бројева. Сам проблем непротивуречности система реалних бројева је био тежак и зато што није било јасно како му прићи. Из тих разлога Хилберт га наводи на Светском конгресу математичара 1900. године као други по реду битан проблем који треба да реши XX век. Он није био јасно формулисан и у првобитном смислу се односио на аритметику реалних бројева (аксиоме поља, аксиоме уређења, Архимедова аксиома). Двадесетих година XX века је проблем сведен на аритметику природних бројева под којом се подразумевао предикатски рачун првог реда са Пеановим аксиомама. Дакле, било је потребно доказати непротивуречност аритметике природних бројева директно, јер је то основна теорија, зато не може бити позивања на непротивуречност других система (као што је било урађено са геометријом). У свом програму како да се ово спроведе Хилберт дозвољава само финитистичка средства. Ниво који расправља проблеме исправности аксиоматизације и математичких доказа назива метаматематиком. Метаматематика треба да финитарним средствима заснованим на Пеановој аритметици докаже непротивуречност формалних теорија, у овом случају саме аритметике природних бројева (Пеанове аритметике). Дакле нужно је да се покаже непротивуречност Пеанове аритметике средствима садржаним у њој самој. Хилберт није успео да ово спроведе, он је имао доказ непротивуречности дела Пеанове аритметике који садржи сабирање и аксиому индукције.

Међутим Гедел је око 1930. показао да ово и није могуће. Његов први резултат говори о непотпуности Пеанове аритметике. Он је доказао да се у било којем проширењу Пеанове аритметике (које има рекурзивно набројив скуп аксиома) може исказати формула која није теорема тог проширења нити је њена негација теорема проширења. На тај начин, ма како ширили Пеанов систем аксиома, увек ћемо у добијеном систему имати исказе које нећемо моћи да докажемо, као ни њихову негацију. други Геделов резултат говори да се ни у једном непротивуречном проширењу Пеанове аритметике не може доказати његова непротивуречност. Овај резултат не искључује могућност доказа непротивуречности Пеанове аритметике средствима јачим од финитистичких. То је у ствари и урађено трансфинитном индукцијом по ординалним бројевима (Генцен) или користећи систем јачи од Пеановог (Гедел) средином XX века.

Геделови резултати показују немогућност остварења Хилбертовог програма онаквог какавим га је он замислио. Они се могу тумачити и као сведочанство слабости математичкологичког језика првог реда.

Иако је Хилбертов програм доживео слом он је веома утицао на развој математике, створена је нова дисциплина – теорија доказа. Неки мисле да је проблем непротивуречности аритметике постављен баш зато – да би се математичари навели на бављење доказима као предметом истраживања.

Хилберт се у својим инсистирањима на финитизму приближио конструктивистима или интуиционистима. Могуће је да је на то инсистирање имала утицаја критика оснивача интуиционизма – Брауера. Чињеница је да Хилберт није одустао од средстава која допушта класична математика – класичне логике и исказа у којима се појављује бесконачност, а које је именовао идеалнима. Он је настојао да оправда коришћење идеалних исказа тако што је планирао да покаже да се докази у којима се они појављују могу заменити финитистичким (у смислу Пеанове аритметике) доказима. Класичну логику је Хилберт сматрао дисциплином пре математике, на неки начин заједничком тековином људског рода која се примењује у математици и која је независна од ње.

Брауер је велики противник сваког формализма. Он сматра да је формализација особина завршене математике. Слично Кронекеру Брауер сматра да људски ум поседује интуицију природног броја и бројања. Остале објекте људски ум конструише из природних бројева. Одавде и називи правца: интуиционизам – од интуиције природног броја; конструктивизам – од појма конструисања. Постоје само они објекти које је могуће конструисати неким алгоритамским поступком. На тај начин констуктивизам је грана реализма – математички објекти постоје као конструкције људског ума. То наравно сужава количину тих објеката јер алгоритама па и резултата алгоритамских поступака има само пребројиво много. На тај начин интуиционисти сматрају да и реалних и трансцедענталних бројева има само пребројиво много.

Конструктивисти врше значајне редукције у свим областима математике, посебно математичке анализе, јер по њима нема смисла говорити о непрекидности и континууму, а сви неконструктивни докази се одбацују. Конструктивност доказа се захтева чак и у логици. Значи исказ A је истинит ако је за њега конструисан алгоритамски ефективан доказ. Може се десити да за неки исказ немамо такав доказ као ни за његову негацију, па не можемо знати да ли је истинито $A \vee \urcorner A$. На сличан начин не морају да важе ни друга правила закључивања класичне логике. Тако исказ A може бити тачан, нетачан или неодлучив, па онда не важи ни правило о двострукој негацији. Дакле формира се другачија, интуиционистичка логика. Овакво формирање нове логике Брауер оправдава тврдњом да логика происходи из математике. Његова је теза да је класична логика произашла из грчке математике која је коначна јер је (догматски) дистанцирана од бесконачности. Дакле у таквој коначној математици је увек могуће проверити (у коначно корака) да ли важи A или $\urcorner A$, па зато имамо правило $A \vee \urcorner A$.

Брауер је био против сваке формализације, али је његов приступ био више филозофски и инспирисан негирањем Хилбертових ставова. Његов ученик Хејтинг је формализовао интуиционистичку логику и теорију бројева и данас се интуиционизам поистовећује са Хејтинговом теоријом. На тај начин интуиционизам је добио место математичке дисциплине, чак би се могло рећи да је највише утицао на логику, у смислу да су остали делови интуиционизма мало утицали на развој математике.

Могло би се рећи да конструктивизам пре конструише неку нову математику, него што заснива ону на коју смо навикли, јер су толико радикална сечења која захтева конструктивизам. С друге стране формализам као правац који је највише инсистирао на доказу непротивуречности аксиоматских система на којима се математика заснива је остао без тог доказа. Разлози се могу тражити у слабости формалнологичког језика који поседујемо као и у самом избору основног „градивног материјала“ на коме се заснива математика (питање је да ли су скупови који су сада фундаментални заиста добар избор). Такође стоји питање логике (на које су указали интуиционисти): да ли је сва класична логика поуздана и добро описује законе мишљења, или је то тачно само за један њен део, док остали делови чине посебне теорије слично односу који постоји између апсолутне геометрије и геометрија Еуклида и Лобачевског. Испоставило се да су правци у заснивању математике, посебно формализам и интуиционизам, поставили више питања него што су дали одговора. (Ово не значи да је логицизам у нечему био бољи, он у себи садржи претпоставку о поузданости класичне логике и претпоставку да је теорија типова без парадокса, али то су само претпоставке.)

Дакле, данашња филозофија математике као своје главно питање има отворен проблем заснованости математике и њене епистемолошке поузданости. Ови проблеми нису решени и нису небитни. Они нису проблеми само математике нити само филозофије. Тј. можда то јесу математички проблеми, али они су таквог типа да их, барем досада, само математика није успевала да реши. То је изазивало кризе у математици које су дозвољавале уплив филозофије. Може се поставити и (опет филозофско) питање о решивости ових проблема. Античка мисао није ишла даље од аксиома, општеприхваћених, разуму блиских истина. Данашња филозофија математике баш испитује то што се разуму <u>чини</u> блиско. Иако резултати тих испитивања нису фасцинирајући, мора се признати да су они довели до развоја у математици. Могуће је да треба причекати да тај развој донесе још плодова који ће нам дати потребну зрелост да разрешимо та питања или да разумемо њихову неразрешивост.

Литература

[1] Милан Божић, *Преглед историје и филозофије математике*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд 2002.

[2] Жарко Мијајловић, Зоран Марковић, Коста Дошен, *Хилбертови проблеми и логика*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд 1986.

[3] Н. Ј. Виленкин, *Приче о скуповима*, Школска књига, Загреб 1975.

[4] Александар Крон, *Елементарна теорија скупова*, Математички институт, Београд 1992.