MAT-KOL (Banja Luka)
XV(1)(2009), 59-66

Неколико различитих начина решавања једног геометријског задатка

Слађана Бабић
Природно-математички факултет, 78000 Бања Лука
Младена Стојановића 2, Б&Х
e-mail: sladjanababic71@yahoo.com

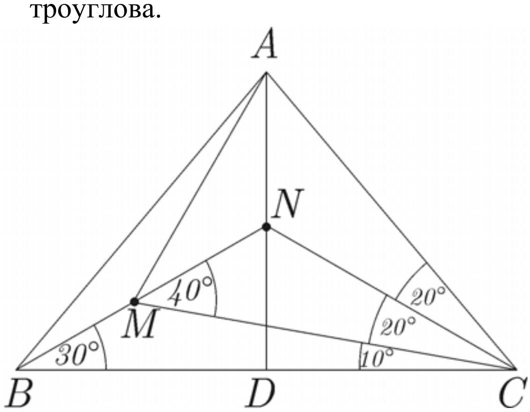
Сажетак: У тексту разматрамо на више начина један задатак из геометрије. Четири решења су чисто геометријска, једно је тригонометријско, а три су аналитичка (два на комплексној равни, а једно у Декартовој равни).

Задатак и решења

У овом тексту дато је неколико решења следећег задатка:

У једнакокраком троуглу ABC са основом BC угао при врху A једнак је 80°. У унутрашњости троугла ABC дата је тачка M таква да је угао $\measuredangle MBC = 30°$ *и угао* $\measuredangle MCB = 10°$. *Наћи величину угла AMC.*

Овај задатак је био задат на републичком такмичењу из математике за седми разред 2008. године (додуше са нешто другачијим обележавањем темена). Решење које следи је предложено на том такмичењу, а налазимо га и у [2] стр. 84. тј. 92. Решење које следи базира се на подударности троуглова.



Решење 1.
Нека је D подножје висине из врха A на основицу BC троугла ABC и нека је тачка N пресек правих AD и BM. Тада је угао $\measuredangle CMN$ спољашњи за троугао BMC па је једнак
$\measuredangle CMN = \measuredangle MBC + \measuredangle MCB = 40°$.
Такође је $\measuredangle NAC = 40°$ јер је половина угла при врху једнако-

краког троугла *ABC*. Пошто $N \in AD$ троугао *BCN* је једнакокраки, па је $\measuredangle NCB = \measuredangle NBC = 30°$. Одавде је:

$$\measuredangle NCM = \measuredangle NCB - \measuredangle MCB = 20° .$$

Преостаје да је:

$$\measuredangle ACN = \measuredangle ACB - \measuredangle NCB = 20° .$$

Сада имамо

$$\measuredangle MNC = 180° - \measuredangle NMC - \measuredangle NCM = 120°$$

и

$$\measuredangle ANC = 180° - \measuredangle NAC - \measuredangle NCA = 120°.$$

Дакле троугао *MNC* је подударан са троуглом *ANC* јер је

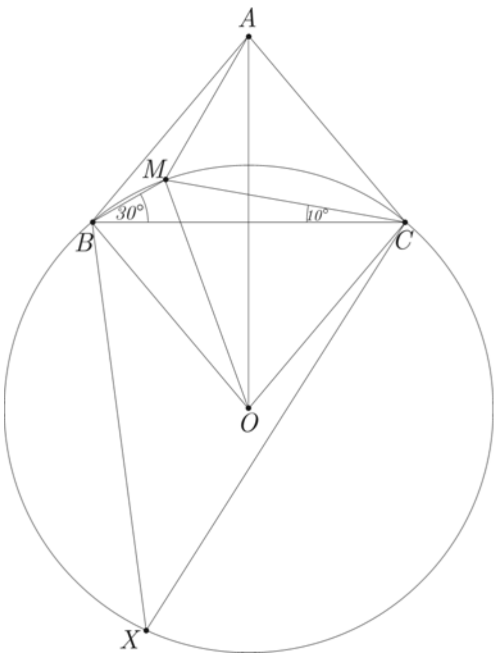
$$\measuredangle ANC = \measuredangle MNC = 120° ,$$

$$\measuredangle ACN = \measuredangle MCN = 20°$$

и *NC*=*NC*. Из те подударности закључујемо да је *AC*=*MC* па је троугао *ACM* једнакокраки са углом при врху $\measuredangle ACM = 40°$. Дакле углови на његовој основици су $\measuredangle AMC = \measuredangle MAC = 70°.$ Крај решења 1

Следеће решење је објављено у руском часопису „Квант" 1996. године. Базира се на вези између централног и периферијског угла над истом тетивом.

Решење 2.



Нека је *O* центар кружнице *k* описане око троугла *BMC*. Тада је $\measuredangle MOC = 2\measuredangle MBC = 60°$ јер су углови $\measuredangle MOC$ и $\measuredangle MBC$, редом централни и периферијски над тетивом *MC* кружнице *k.* Пошто је *MO* = *OC* следи да је троугао *MOC* једнакостраничан. Такође је $\measuredangle BOM$ централни док је $\measuredangle BCM$ периферијски над тетивом *BM* кружнице *k*, па је

$$\measuredangle BOM = 2\measuredangle BCM = 20° .$$

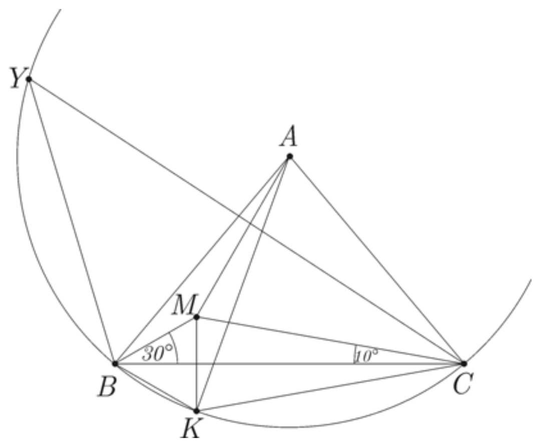
Сада имамо да је $\measuredangle BOC = 80°$, па пошто су основице једнакокраких троуглова *ABC* и *OBC* једнаке (то је дуж BC), као што су им и углови при врху једнаки (тј. $\measuredangle BAC = \measuredangle BOC = 80°$) имамо да су троуглови *ABC* и *OBC* подударни, па је и AC=*OC*. Из чињенице да је троугао *MOC* једнакостраничан имамо да је *MC*=*OC,* па је *AC*=*MC.* Дакле имамо да је троугао AMC једнакокраки са углом при врху $\measuredangle MCA = 40°$. Одавде је $\measuredangle AMC = \measuredangle MAC = 70°$. Крај решења.

Ово решење се може варирати на следећи начин, тако да у први план дођу особине симетричних фигура и тетивног четвороугла.

Решење 3.

Нека је тачка O симетрична са тачком A у односу на праву BC. Тада ће бити $AC = OC$ и $AB = OB$, а пошто је $AB = AC$ биће $AB = AC = OC = OB$. Посматраћемо кружницу k са центром у O и полупречником OB. Пошто је $OB = OC$ имамо да $C \in k$. Нека је X произвољна тачка кружнице k таква да су тачке X и M са разних страна праве BC. Тада је $\measuredangle BXC = \frac{1}{2}\measuredangle BOC = 40°$. Пошто је $\measuredangle BMC = 180° - \measuredangle MBC - \measuredangle MCB = 140°$, имамо да је $\measuredangle BMC + \measuredangle BXC = 180°$, па је четвороугао $BXCM$ тетиван. Како су тачке B, X и C већ на кружници k следи да и M припада k, па је $MO = OC$. Сада је $\measuredangle MOC = 2\measuredangle MBC = 60°$, па је троугао MOC једнакостраничан, одакле следи да је $MC = OC$. Пошто већ имамо да је $AC = OC$, следи да је $MC = AC$, па је троугао MAC једнакокраки, па као у претходној варијанти имамо да је $\measuredangle AMC = \measuredangle MAC = 70°$.

Решење 4.

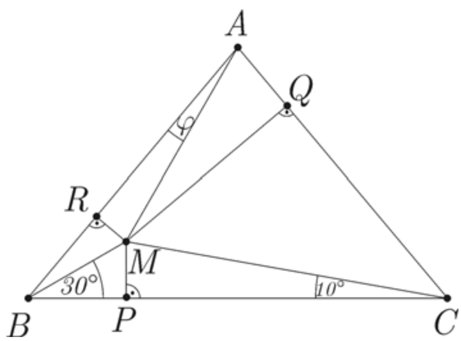


Следеће решење је по идеји врло слично претходном, али је доцртавање другачије: тачку M ћемо симетрично пресликати у односу на праву BC, тако добијамо тачку K. Сада је $\measuredangle ACK = \measuredangle ACM + \measuredangle MCB + \measuredangle BCK = 60°$ (јер је $\measuredangle BCK = \measuredangle BCM = 10°$) и $\measuredangle BKC = \measuredangle BMC = 180° - \measuredangle MBC - \measuredangle MCB = 140°$. Нека је k кружница са центром у A и полупречником AB, пошто је $AB=AC$ имамо да и $C \in k$. Нека је Y произвољна тачка кружнице k таква да су тачке Y и K са разних страна праве BC. Тада је $\measuredangle BYC = \frac{1}{2}\measuredangle BAC = 40°$, па је: $\measuredangle BYC + \measuredangle BKC = 180°$, што значи да је четвороугао $CYBK$ тетиван. Пошто тачке C, Y и B припадају кружници k имамо да и $K \in k$. Сада је $\measuredangle BAK = 2\measuredangle BCK = 20°$, па је

$\measuredangle KAC = \measuredangle BAC - \measuredangle BAK = 80° - 20° = 60°$. Пошто смо већ показали да је $\measuredangle ACK = 60°$ следи да је троугао *AKC* једнакостраничан, одакле је *AC=KC*. Пошто су тачке *M* и *K* симетричне у односу на праву *BC,* имамо да је *MC=KC,* па је и *AC=MC.* Поново смо дошли до чињенице да је троугао *AMC* једнакокраки, одакле налазимо да је $\measuredangle AMC = \measuredangle MAC = 70°$.
Крај решења

Решење 5.

Решење које следи је тригонометријско, користи се синусна теорема и тригонометријски идентитети.



Нека су *P, Q* и *R* подножја нормала из тачке *M* на странице *BC, AC* и *AB*, редом. Дуж *AM* ћемо обележити са *x*, а $\measuredangle BAM = \varphi$. Тада је

$MR = AM \sin\varphi = x\sin\varphi$ и

$MQ = AM \sin(80° - \varphi) =$

$= x\sin(80° - \varphi)$.

Из троугла *BMR* имамо да је $BM = \dfrac{MR}{\sin 20°}$, па је $BM = \dfrac{x\sin\varphi}{\sin 20°}$.

Из троугла *CMQ* је $CM = \dfrac{MQ}{\sin 40°}$, па је $CM = \dfrac{x\sin(80° - \varphi)}{\sin 40°}$.

Примењујући синусну теорему на троугао *BCM* имамо да је $\dfrac{BM}{\sin 10°} = \dfrac{CM}{\sin 30°}$ тј. $\dfrac{x\sin\varphi}{\sin 10° \sin 20°} = \dfrac{x\sin(80° - \varphi)}{\sin 30° \sin 40°}$. Одавде је $\dfrac{1}{2}\sin\varphi \sin 40° = \sin(80° - \varphi)\sin 20° \sin 10°$. Рачун који следи је један од начина да се реши претходна тригонометријска једначина:

$$\frac{1}{2}\big(\cos(\varphi - 40°) - \cos(\varphi + 40°)\big) = \big(\cos(70° - \varphi) - \cos(90° - \varphi)\big)\sin 20°$$

$$\frac{1}{2}\big(\cos(\varphi - 40°) - \cos(\varphi + 40°)\big) = \sin(20° + \varphi)\sin 20° - \sin\varphi \sin 20°$$

$$\frac{1}{2}\cos(\varphi - 40°) - \frac{1}{2}\cos(\varphi + 40°) = \frac{1}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}\cos(\varphi + 40°) - \sin\varphi \sin 20°$$

$$2\sin\varphi \sin 20° = \cos\varphi - \cos(\varphi - 40°)$$

$$2\sin\varphi \sin 20° = -2\sin(\varphi - 20°)\sin 20°$$

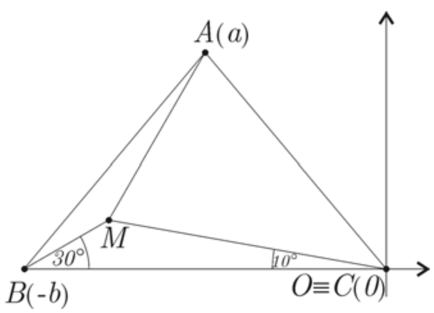
$$\sin\varphi + \sin(\varphi - 20°) = 0$$

$$2\sin(\varphi - 10°)\cos 10° = 0$$

Пошто је 0<φ<80° имамо да из $\sin(\varphi - 10°) = 0$ следи φ=10°. Сада је $\measuredangle MAC = 80° - \varphi = 70°$ и $\measuredangle AMC = 180° - \measuredangle MAC - \measuredangle ACM = 70°$. Крај решења.

Сада ћу навести решење преко комплексних бројева. Као што у аналитичкој геометрији користимо уређене парове реалних бројева као координате тачке, можемо користити комплексан број $z = x + iy$ као координату тачке, пошто се комплексан број z може идентификовати са са уређеним паром *(x,y)*. Навешћу две варијанте решења, у првој ћу показати да је *AC* = *CM*, одакле следи величина $\measuredangle AMC$, док ћу у другој тај угао израчунати директно.

Решење 6/7.



Варијанта 1. Координатни систем ћу тако поставити да се координатни почетак поклапа са тачком *C* и да тачка *B* лежи на негативном делу реалне осе, тј. нека је *B(-b)* и *A(a)*, где је $b \in \mathbb{R}^+$ и $a \in \mathbb{C}$. Избор координатног почетка је веома битан код овог метода јер може много да поједностави формуле које се касније добијају. Конкретно, код овог примера, ако координатни почетак ставимо у тачку *B* и узмемо да *C* лежи на реалној оси, добијамо доста компликованије
формуле. Координату тачке *A* можемо израчунати као пресек правих *AB* и *AC*, међутим једноставнији начин је да користимо чињеницу да је *AB* = *AC* и $\measuredangle BAC = 80°$, тј.

$$R_{A,\frac{4\pi}{9}}(B) = C \quad (1)$$

(тачка *C* се добија ротацијом тачке *B* око тачке *A* за угао 80° = 4π/9). Преко комплексних бројева ротација се једноставно интерпретира (видети [1], стр. 61) па имамо да је превод формуле (1) на комплексне бројеве дат са $(-b-a)e^{i\frac{4\pi}{9}} + a = c$, одакле добијамо $a = \dfrac{be^{i\frac{4\pi}{9}}}{1-e^{i\frac{4\pi}{9}}}$. Користећи чињеницу да је $e^{i\varphi} - 1 = 2ie^{i\frac{\varphi}{2}}\sin\dfrac{\varphi}{2}$ (2) добијамо да је $a = \dfrac{be^{i\frac{2\pi}{9}}}{-2i\sin\dfrac{2\pi}{9}} = \dfrac{be^{i\frac{13\pi}{18}}}{2\sin\dfrac{2\pi}{9}}$, одакле је $AC=AO=\left|a\right|=\dfrac{b}{2\sin\dfrac{2\pi}{9}}$. Да би израчунали координату тачке M написаћемо једначине правих CM и BM. Полуправа CM (са почетком у $C = O$) заклапа угао 170° са позитивним делом x-осе, па је њена једначина облика $z=r_1e^{i\frac{17}{18}\pi},\quad r_1\in\mathbb{R}^+$, одавде следи да је $ze^{-i\frac{17}{18}\pi}=r_1,\quad r_1\in\mathbb{R}^+$, па је $ze^{-i\frac{17}{18}\pi}=\overline{z}e^{i\frac{17}{18}\pi}$, па одавде добијамо да је једначина праве

$$CM: ze^{-i\frac{17}{9}\pi}-\overline{z}=0. \quad (3)$$

Полуправа BM заклапа угао 30° са позитивним делом реалне осе, па је њена једначина $z+b=r_2e^{i\frac{\pi}{6}},\quad r_2\in\mathbb{R}^+$. Слично као и у претходном случају добијамо да је једначина праве

$$BM: (z+b)e^{-i\frac{\pi}{3}}-\overline{z}-b=0. \quad (4)$$

Ако са z обележимо комплексну координату тачке M, добићемо је решавањем система који се састоји од једначина (3) и (4). Сабирањем једначина (3) и (4) добијамо да је $z=\dfrac{be^{-i\frac{\pi}{3}}-b}{e^{-i\frac{17}{9}\pi}-e^{-i\frac{\pi}{3}}}$, овај израз се може упростити на следећи начин

$$z=-b\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}-1}{e^{-i\frac{14}{3}\pi}-1}=-b\frac{2ie^{i\frac{\pi}{6}}\sin\frac{\pi}{6}}{2ie^{-i\frac{7\pi}{9}}\sin\frac{-7\pi}{9}}=be^{i\frac{17\pi}{18}}\frac{1}{2\sin\frac{2\pi}{9}},$$

при чему смо опет користили (2). Дакле имамо да је $CM = OM = \left|z\right|=\dfrac{b}{2\sin\dfrac{2\pi}{9}}$, па уочавамо да је $CM = AC$, одакле следи да је троугао AMC једнакокраки и да је $\measuredangle AMC=\measuredangle MAC=70°$.

Варијанта 2. Уколико не уочимо да је $CM = AC$ не преостаје ништа друго него да $\measuredangle MAC$ рачунамо директно. Рачунање углова и овде, као и у аналитичкој геометрији често доводи до гломазних формула, па је следеће решење најнеелегантније. Мера позитивно оријентисаног угла $\measuredangle MAC$, где су комплексне координате тачака M, A, C дате са z, a, c је $\measuredangle MAC=\arg\dfrac{c-a}{z-a}$ (видети у [1], стр, 60). Пошто је

$$\frac{c-a}{z-a}=\frac{-a}{z-a}=\frac{-\dfrac{be^{i\frac{13\pi}{18}}}{2\sin\frac{2\pi}{9}}}{\dfrac{be^{i\frac{17\pi}{18}}}{2\sin\frac{2\pi}{9}}-\dfrac{be^{i\frac{13\pi}{18}}}{2\sin\frac{2\pi}{9}}}=\frac{e^{i\frac{13\pi}{18}}}{-e^{i\frac{17\pi}{18}}+e^{i\frac{13\pi}{18}}}=\frac{1}{1-e^{i\frac{4\pi}{18}}}=\frac{-1}{2ie^{i\frac{2\pi}{18}}\sin\frac{2\pi}{18}}=\frac{e^{i\frac{7\pi}{18}}}{2\sin\frac{\pi}{9}},$$

имамо да је $\measuredangle MAC=\arg\frac{-a}{z-a}=\frac{7\pi}{18}$, одакле је $\measuredangle AMC=\frac{7\pi}{18}$.

Решење 8.

На крају ћу навести и решење преко аналитичке геометрије у Декартовој равни. Нека је *C(0,0)* и *B(-b,0),* $b\in\mathbb{R}^{+}$. Права AC заклапа угао 130° са позитивним делом x-осе, па је њена једначина $AC: y=xtg130°$. Пошто теме *A* лежи на симетрали дужи *BC* биће координата тачке *A* једнака $x_A=-\frac{b}{2}$. Како тачка *A* лежи на правој *AC* биће $y_A=x_Atg130°=-\frac{b}{2}tg130°$. Дакле:

$AC^2=\frac{b^2}{4}+\frac{b^2}{4}tg^2130°=\frac{b^2}{4\cos^2 130°}=\frac{b^2}{4\sin^2 40°}$. Пошто права *MC* заклапа угао од 170° са позитивним делом x-осе, биће њена једначина

$$MC: y=xtg170°. \quad (5)$$

Права *MB* заклапа угао од 30° са позитивним делом x-осе и садржи тачку *B(-b,0),* па је њена једначина

$$MB: y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}b. \quad (6)$$

Координате тачке *M* добијамо решавајући систем који се састоји од једначина (5) и (6). Имамо да је $M\left(\frac{b}{\sqrt{3}tg170°-1},\frac{btg170°}{\sqrt{3}tg170°-1}\right)$, па је

$$MC^2=\frac{b^2(1+tg^2 10°)}{(\sqrt{3}tg10°+1)^2}=\frac{b^2}{(\cos10°+\sqrt{3}\sin10°)^2}=\frac{b^2}{4\sin^2 40°}.$$

Дакле, поново добијамо да је $AC=MC=\frac{b}{2\sin 40°}$, одакле је $\measuredangle AMC=70°$.

Као и у случају решавања задатка преко комплексних бројева и у овом случају се може рачунати величина угла AMC (или MAC) директно. Међутим, већ сама једначина праве AM је врло гломазна, па ћу ову варијанту решења, као врло неелегантну, изоставити.

Коментар

На крају, пошто су наведена чисто геометријска решења, као и аналитичка решења, можемо се запитати о смислу решавања геометријских задатака рачунским методама. Можемо приметити да смо у свим геометријским решењима морали нешто доцртати да бисмо спровели закључивање и дошли до величине траженог угла. Проблем је ако немамо идеју шта да доцртамо, или ако наша идеја не даје добре резултате. (Рецимо пресликавање тачке M симетрично у односу на праву AC је, по мени, погрешан пут.) Тада рачунске методе могу да помогну, али оне су саме по себи компликоване и траже велику рутину у трансформисању добијених израза. Такође у неким областима геометрије рачнске методе дају добре резултате, док је у неким другим њихова примена знатно компликованија од геометријског закључивања. Опште правило би могло да буде да је рачунске методе целисходније употребљавати код компликованијих задатака, тако да овај пример није карактеристичан, геометријска решења су једноставнија од аналитичких.

Ово размишљање се поклапа са Фројденталовим ставом да «када се геометрија укључи у систем линеарне алгебре остају само крхотине геометрије» (видети [4] стр. 56). Суштина овог става је у томе да класичан геометријски приступ обухвата дедуктивно закључивање (што се може видети и на примеру овог задатка), док рачунске методе најчешће само проверавају исправност тврђења задатка.

Да још једном нагласим, овакав, негативан, став према примени рачунских метода у геометрији важи само за школске примере. Код компликованијих проблема рачунске методе дају добре резултате, у смислу да су решења једноставнија од оних које добијамо класичним путем.

Литература:

[1] Andreescu T., Andrica D., *Complex Numbers from A to...Z*, Birkhäuser, Boston, 2006.

[2] Прасолов В.В., *Задачи по планиметрии, част II*, Наука, Москва, 1963.

[3] Квант, 1996/2.

[4] Фройденталь Г., *Математика как педагогическая задача*, Просвещение, Москва, 1983.