

METODSKA OBRADA TEME

Linearne funkcije i linearne jednačine

Bojan Kovačević¹, Daniela Kreća² i
Daniel A. Romano³

Sažetak:

U Velikoj Britaniji predavanja u osnovnim i srednjim školama razvijena su u skladu sa MEP filozofijom predavanja. Naime, MEP projekat je nastao kao rezultat desetogodišnjeg istraživanja i ima za cilj da svim učenicima omogući da razviju u potpunosti svoje sposobnosti. Stručnjaci su razvojem MEP projekta razvili i čitavu jednu filozofiju predavanja u školama (ja ovdje mislim na predavanja kurseva matematike) koja treba da podstiču da:

- cijeli razred interaktivno uči, uključujući da učenici rade na tabli
- se razvijaju mentalne matematičke vještine kod učenika
- se usavršavaju preciznost, tačnost i urednost u pisanju i izgovaranju matematičkih pojmova, elemenata, postupaka...
- se koristi zadaća kao bitan element učenja
- cijeli razred napreduje sa što manje diferenciranja.

Prosto rečeno, MEP projekat ima za cilj da se kod svih učenika u potpunosti razviju sposobnosti, uzimajući u obzir da te vještine i sposobnosti nisu iste niti su na istom stepenu razvijenosti kod svih učenika.

Zbog toga u ovom projektu prisutno je više materijala nego što je potrebno i na nastavniku je da odabere onaj materijal koji je prilagođen sposobnostima učenika na njegovom času.

Da bi se nastavnicima pomoglo pri donošenju odluke, koji materijal da koristi, u ovom projektu istaknute su i tri rute kroz materijal:

- **Standardna** za učenike koji se muče, i koji bi trebali da usavrše osnovne vještine prije nego se upoznaju sa novim temama i konceptima
- **Akadska** za "prosječne" učenike, to jest, ruta za koju očekujemo da je prati većina učenika; osnovne vještine će biti prerađene, a nove teme i koncepti će biti uvedeni

¹ Seminarski rad iz Metodike nastave matematike, Školska godina 2005/06

² Seminarski rad iz Metodike nastave matematike, Školska godina 2006/07

³ Predmetni nastavnik Metodike nastave matematike

- **Ekspresna** ruta predviđena za učenike koji dobro napreduju i ne trebaju mnogo vježbe sa osnovnim vještinama, ali koji sa lakoćom sa savladavaju i nove koncepte

Dakle, u ovom projektu dat je materijal koji je usmjeren u navedene tri rute. Navedene rute treba da budu samo vodilja nastavniku, a on bi trebao da koristi svoju profesionalnu procjenu pri odabiru materijala koji je prilagodiv da se predaje u njegovom razredu.

Za odjeljenja u kojima su učenici sa različitim vještinama, predlaže se akademska ruta.

U MEP projektu čak je dat i predložen plan nastave za pojedine nastavne jedinice i to za svaku rutu. U ovom seminarskom radu detaljnije ćemo da razmotrimo taj predloženi plan i to specijalno za temu **Linearna funkcija i linearne jednačine**.

Uvod

Za nastavnu temu **Linearna funkcija i linearne jednačine** predložen je sljedeći tematski plan:

Jedinica		S	A	E
<i>Linearna funkcija i linearne jednačine</i>				
1.	Koordinate	+	(+)	*
2.	Grafik linearne funkcije	+	+	(+)
3.	Linearne jednačine	+	+	(+)
4.	Paralelne i okomite prave	*	+	+
5.	Sistem linearnih jednačina	*	(+)	+
6.	Primjena linearnih jednačina na rješavanje problema	*	+	+

Dakle, ovdje su date nastavne jedinice za temu linearne funkcije i linearnih jednačina. Simboli u tabeli su sljedećih značenja:

- S**-standardna ruta
- A**-akademska ruta
- E**-ekspresna ruta
- +** - osnovni materijal
- (+)**- materijal koji bi u najmanju ruku mogao da bude dijelom obrađen
- *** - nepredviđen materijal

Dakle, preporuka je da, ako nastavnik obrađuje temu po standardnoj ruti, obradi nastavne jedinice 1, 2 i 3, a ne obrađuje jedinice 4, 5 i 6; ako obrađuje po akademskoj ruti, obradi sve jedinice, s tim da jedinice 1 i 5 dijelom obradi, to jest, kako bi mi rekli, "površno", a ako obrađuje temu po ekspresnoj ruti, jedinicu 1 ne obrađuje, jedinice 2 i 3 "površno", a fokusira se na jedinice 4, 5 i 6.

U nastavku detaljno ću izložiti preporučeni plan za obradu nastavne teme **Linearna funkcija i linearne jednačine** po akademskoj ruti koji je zasnovan na časovima koji traju 45 minuta.

LEKCIJA BROJ 1: *Grafik linearne funkcije*

	Predloženi plan
1	Uvod
2	Vježba 1 i 2
3	Pregledavanje vježbi
4	Skiciranje grafika linearne funkcije
5	Vježba 3
6	Pregledavanje vježbe 3
7	Vježba 4
8	Pregledavanje vježbe 4
9	Domaća zadaća

1.1. Uvod

U uvodnom dijelu ukratko obnoviti znanje o koordinatama tačaka u ravni. S tim u vezi, nastavnik u interakciji sa učenicima, ponavlja kako se u Dekartovom koordinatnom sistemu određuju koordinate neke tačke kao i kako se u koordinatnom sistemu određuje tačka sa zadanim koordinatama.

1.2. Vježbe 1 i 2

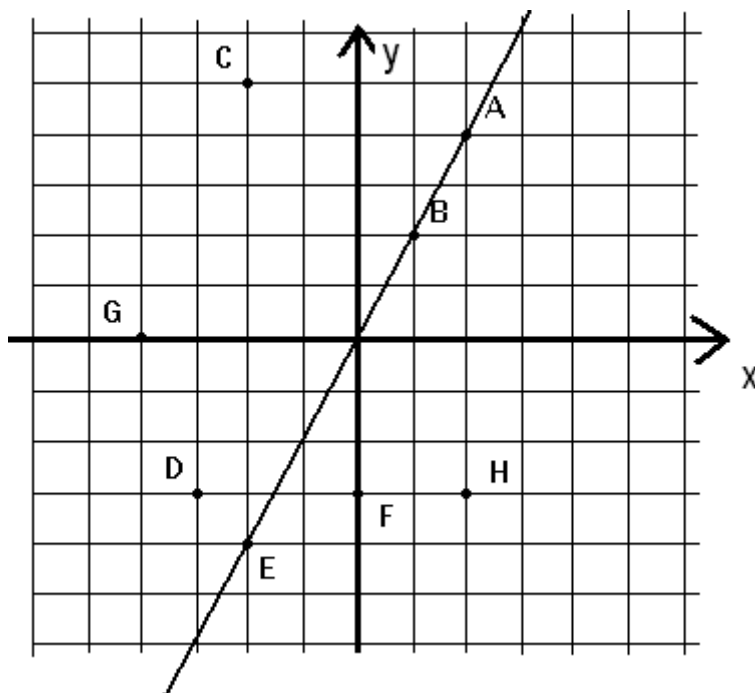
Vježba 1 (interaktivno)

U Dekartovom koordinatnom sistemu označiti tačke :

A(2, 4), B(1, 2), C(-2, 5), D(-3, -3), E(-2, -4), F(0, -3), G(-4, 0), H(2, -3).

Šta možete reći za tačke A, B i E?

Rješenje

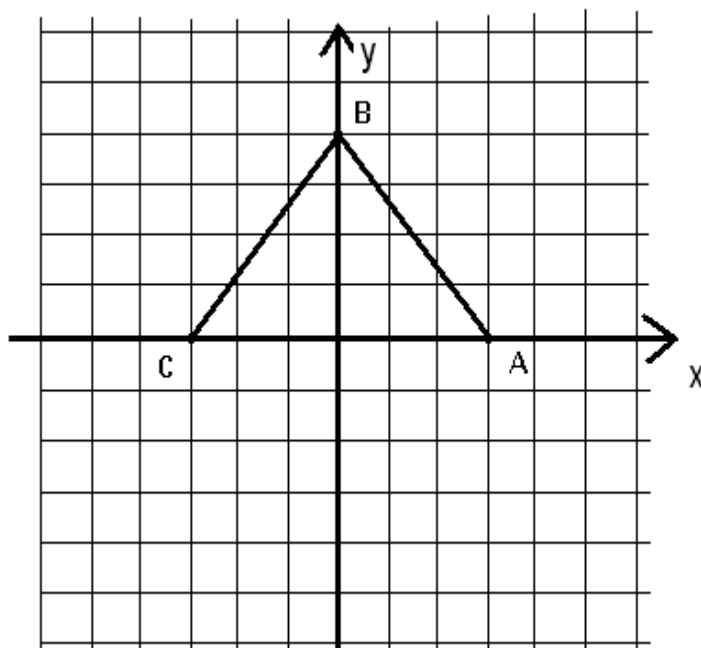


Tačke A, B i E pripadaju istoj pravoj.

Vježba 2 (samostalno)

U Dekartovom koordinatnom sistemu poveži tačke $(3, 0)$, $(0, 4)$ i $(-3, 0)$.
Koju geometrijsku sliku si dobio?

Rješenje:



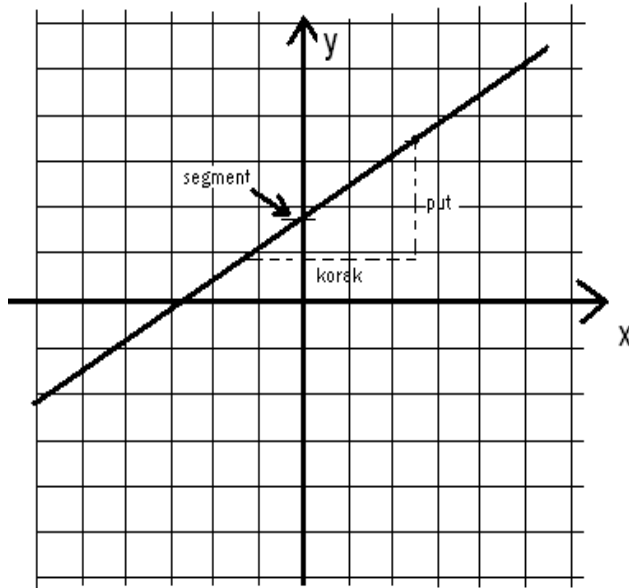
Dobija se jednakokraki trougao čiji su kraci 5, a osnovica 6 jedinica.

1.3. Pregledavanje vježbi

Nadgleda se vježba 2 i nastavnik može izvesti jednog učenika da je uradi na tabli.

1.4. Skiciranje grafika linearne funkcije

Učenicima se pokazuje kako se određuju koordinate tačaka na nekoj pravoj. Zatim, pokazuje se šta je **gradijent** prave, šta je **segment** i šta je jednačina prave. Gradijent je količnik puta i koraka (put je razlika y koordinata dvije tačke na pravoj, a korak je razlika x koordinata tih tačaka), a segment je mjesto gdje prava siječe y-osu.



$$\text{Gradijent} = \frac{\text{put}}{\text{korak}}$$

jednačina prave:
 $y = m \cdot x + c$

gdje je m gradijent, a c segment.

1.5. Vježba 3

(a) Doprši tabelu za $y = 2 \cdot x - 2$

x	-2	-1	0	1	3	5
y						

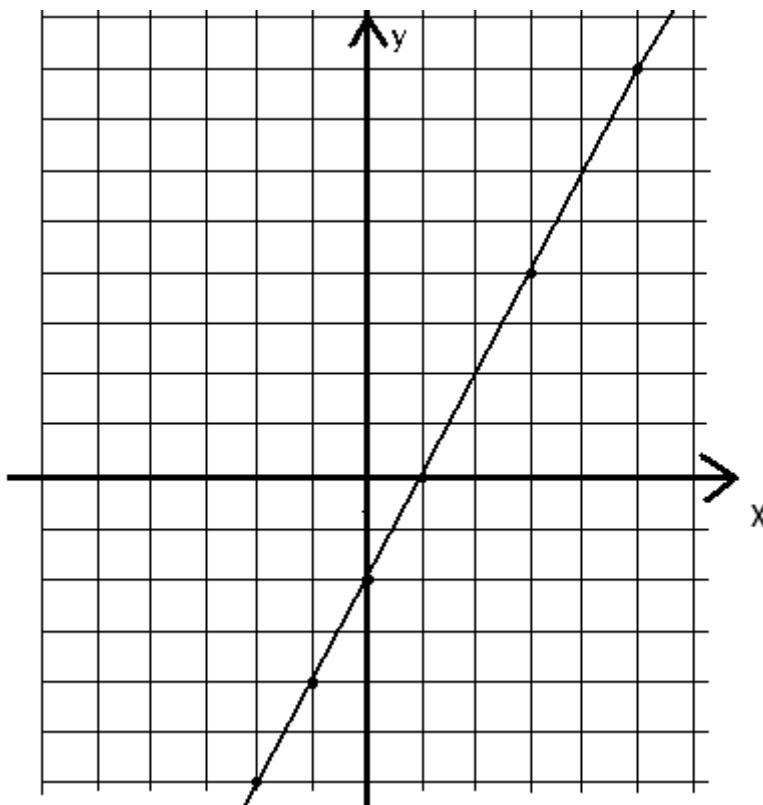
(b) Skiciraj grafik funkcije $y = 2 \cdot x - 2$.

Rješenje:

(a)

x	-2	-1	0	1	3	5
y	-6	-4	-2	0	4	8

b)



1.6. Pregledavanje vježbe

Ovu vježbu se radi interaktivno sa učenicima pa nastavnik može da uz pomoć učenika riješi pod a), a zatim da oni sami urade pod b) i da on nadgleda taj rad te da na kraju skicira.

1.7. Vježba 4 (samostalno)

Skicirati grafike funkcija (svaku funkciju u zaseban koordinatni sistem) zadatih jednačinama:

- a) $y = x + 3$
- b) $y = x - 4$
- c) $y = 4x - 1$
- d) $y = 3x + 1$
- e) $y = 4 - x$
- f) $y = 8 - 2x$

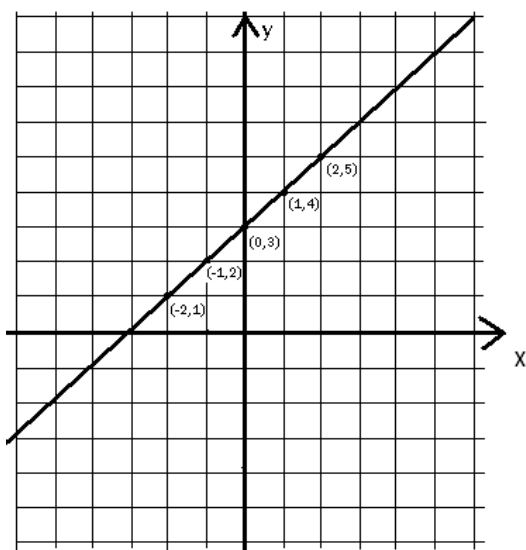
Rješenje:

a)

x	-2	-1	0	1	2
y	1	2	3	4	5

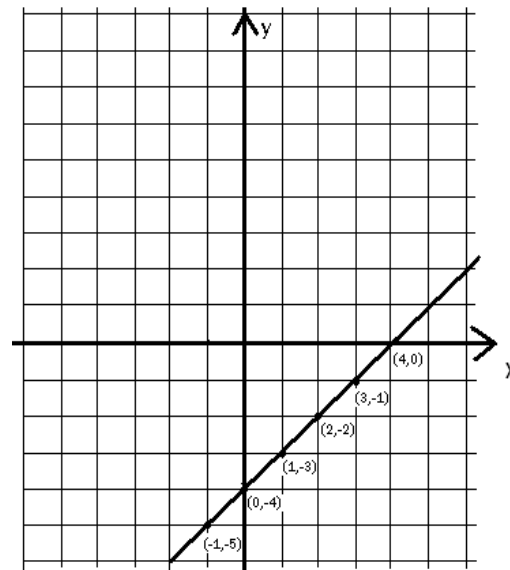
b)

x	-1	0	1	2	3
y	-5	-4	-3	-2	-1



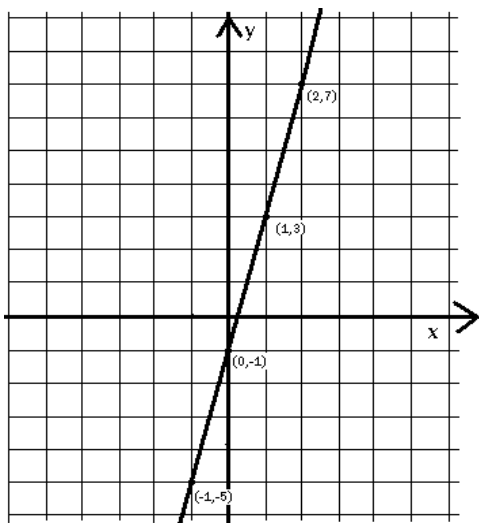
(c)

x	-1	0	1	2	3
y	-5	-1	3	7	11



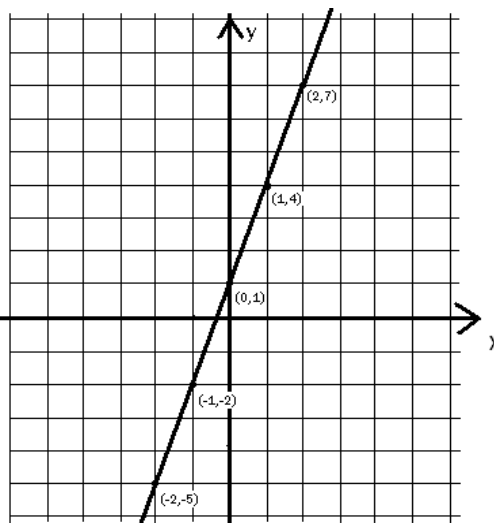
(d)

x	-2	-1	0	1	2
y	-5	-2	1	4	7



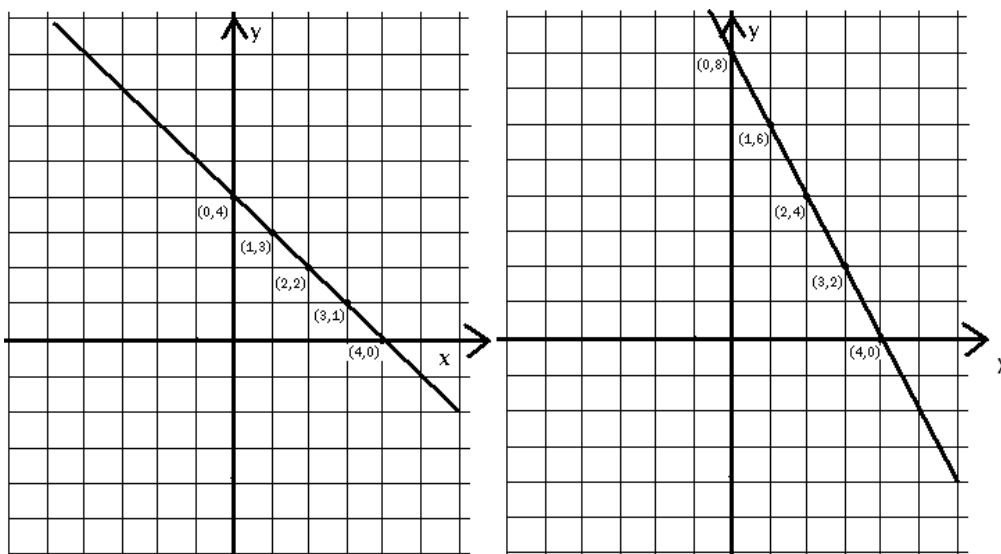
(e)

x	0	1	2	3	4
y	4	3	2	1	0



(f)

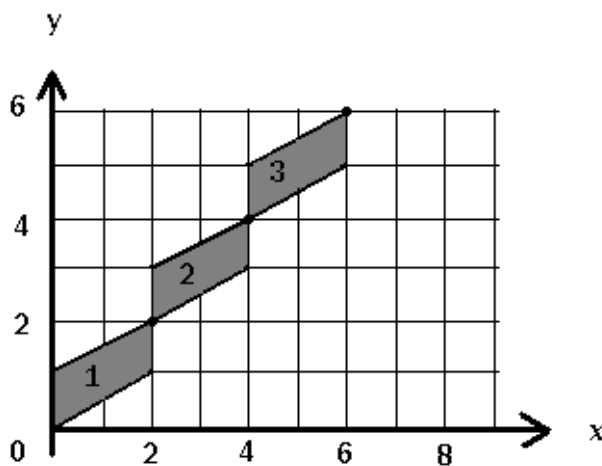
x	0	1	2	3	4
y	8	6	4	2	0



1.8 Pregledavanje vježbe 4

1.9 Domaća zadaća

1) Danijel ima nekoliko ploča u obliku paralelograma. Sve ih je položio na zemljište tako da desno gornje tjemne svake ploče dodiruje lijevo donje tjemne naredne ploče. Redajući ih na zemlju on je brojao ploče. Na slici je prikazan dio poredanih ploča:



Danijel je gornja desna tjemena označio sa ".".Koordinate tjemena "." ploče 3 su (6,6).

<i>Broj ploče</i>	<i>Koordinate tjemena ×</i>
1	(2, 1)
2	
3	
4	

- (a) Koje su koordinate tjemena "." ploče 4 ?
- (b) Koje koordinate tjemena "." ploče 20?
Objasni kako si došao do rješenja!
- (c) Danijel je rekao: "Jedan od tjemena "." ima koordinate (25,25)".
Objasni zašto je Danijel pogriješio!
- (d) Danijel je donje desno tjemena svake ploče označio sa ×.Dovrši tabelu:
- (e) Dovrši rečenicu!
"Tjemena × ploče broj 7 ima koordinate (,)".
- (f) Dovrši rečenicu!
"Tjemena × ploče broj ima koordinate (20,19)".

(2) Robot se kreće po terenu. On može da se kreće u četiri smjera: gore, dolje, lijevo i desno i to tako da pravi korak po korak. Robot kreće sa tačke označene sa • na tlu (slika ispod). Pravi dva koraka :

- 1. korak – lijevo
- 2. korak – gore

i dolazi do tačke označene sa ×.

	<p>(a) Robot ponovo kreće sa mjesta • .Označi sa × mjesto na koje će doći robot pošto napravi dva koraka:</p> <ul style="list-style-type: none"> 1. korak – dolje 2.korak – dolje
--	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

	<p>(b) Robot uvijek kreće sa mjesta \bullet. Nađi sva mjesta i označi ih sa \times na koja robot može da dođe nakon što napravi dva koraka.</p>
--	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

(c) Sada neki drugi robot uvijek kreće sa mjesta \blacksquare na terenu. On pravi tri koraka :
 1. korak – dolje, 2. korak – desno i 3. korak – desno i dolazi na mjesto \times .
 Robot opet kreće sa mjesta \blacksquare . Nađi još dva puta, pored navedenog, kojima u tri
 koraka robot može sa mjesta \blacksquare
 doći na mjesto \times .

<i>Prvi korak</i>	Dolje	Desno	
<i>Drugi korak</i>	Desno		
<i>Treći korak</i>	Desno		

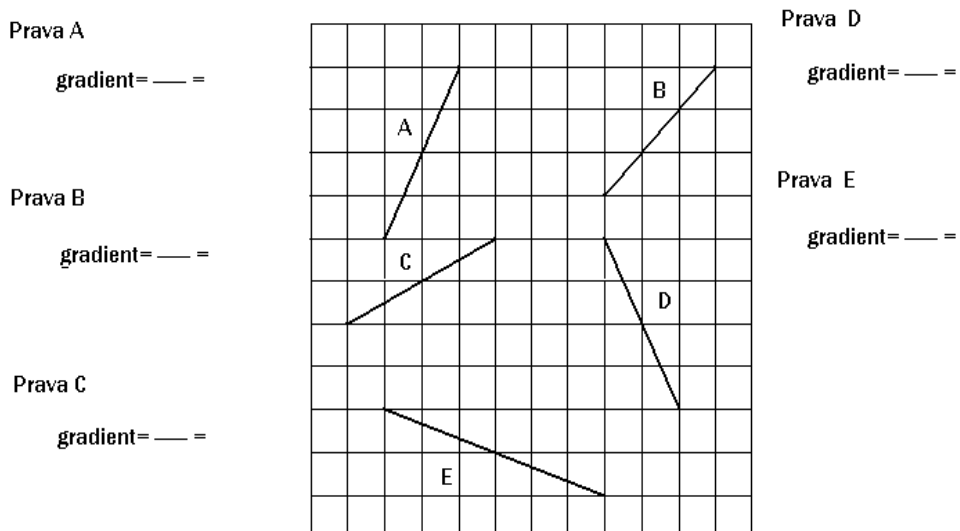
LEKCIJA BROJ 2: *Određivanje jednačine prave 1*

Predloženi plan	
1	Pregledavanje i diskusija domaće zadaće
2	Određivanje gradijenta prave
3	Vježba 1
4	Pregledavanje vježbe 1
5	Vježba 2
6	Aktivnost
7	Domaća zadaća

2.1. Pregledavanje i diskutovanje domaće zadaće

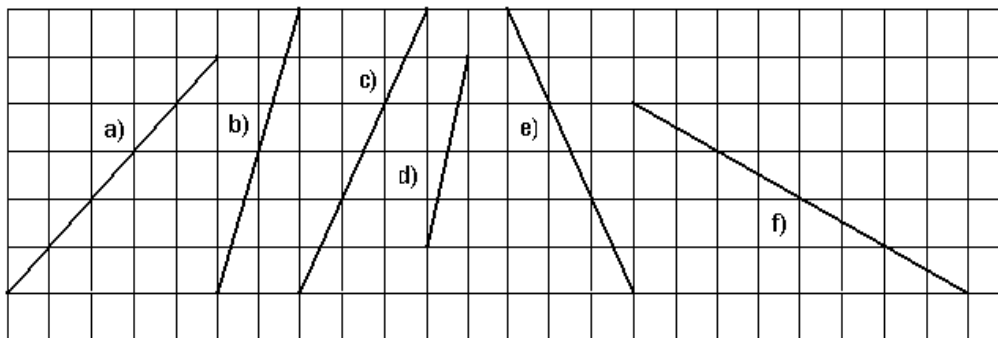
2.2. Određivanje gradijenta prave

U interakciji sa učenicima ponoviti šta je gradijent i riješiti primjer dolje:



2.3. Vježba 1

Odrediti gradijente pravih a)-f)



Rješenje:

a) gradijent = 1; b) gradijent = 3; c) gradijent = 2; d) gradijent = 4; e) gradijent = -2; f) gradijent = -1/2 .

2.4. Pregledavanje vježbe 1

Nastavnik nadgleda, upućuje i izvodi učenike na tablu da urade.

2.5. Vježba 2

Napisati jednačinu prave ako su dati gradijent i segment :

- a) gradijent = 4 i segment = 2.
- b) gradijent = 2 i segment = -5.
- c) gradijent = 1/2 i segment = 1.
- d) gradijent = -1 i segment = -5.

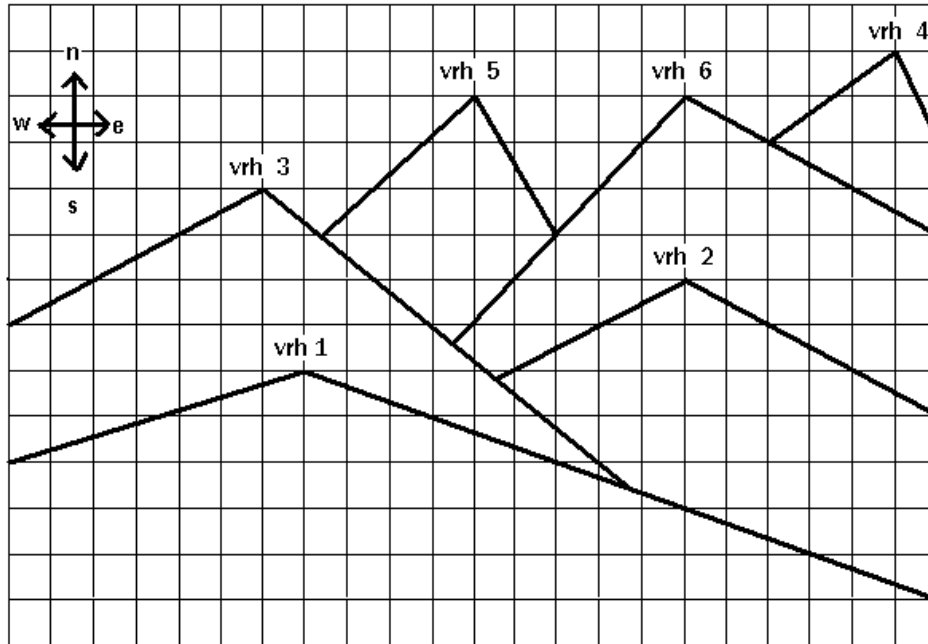
Rješenje:

- a) $y = 4 \cdot x + 2$
- b) $y = 2 \cdot x - 5$

- c) $y = 1/2 \cdot x + 1$
- d) $y = -x - 5$.

2.6. Aktivnost

Nastavnik daje aktivnost i samo nadgleda.



Jedan matematičar dok je boravio na ljetovanju fotografisao je pejzaž na kome se nalazi nekoliko planina. Kad je došao kući, istočne i zapadne padine tih planina on je iscrtao na papir kako je prikazano na slici gore.

- a) Izračunajte gradijente istočne i zapadne padine za svaki vrh!
- b) Na koji vrh bi se bilo najteže popeti?

Rješenje:

- a) Za vrh 1 istočna padina ima gradijent $= -1/3$, a zapadna padina gradijent $= 2/7$.
 Za vrh 2 istočna padina ima gradijent $= -1/2$, a zapadna padina gradijent $= 1/2$.
 Za vrh 3 istočna padina ima gradijent $= -3/4$, a zapadna padina gradijent $= 1/2$.
 Za vrh 4 istočna padina ima gradijent $= -2$, a zapadna padina gradijent $= 2/3$.
 Za vrh 5 istočna padina ima gradijent $= -3/2$, a zapadna padina gradijent $= 1$.
 Za vrh 6 istočna padina ima gradijent $= 1/2$, a zapadna padina gradijent $= 1$.
- b) Najteže bi se bilo popeti uz istočnu padinu vrha 4.

2.7. Domaća zadaća

Dovršiti aktivnost ili ako se aktivnost uspije dovršiti na času onda zadatak

- 1) Popuni tabelu do kraja:

Jednačina prave	Gradijent	Segment
-----------------	-----------	---------

$y = 5x + 7$		
	3	-2
$y = -3x + 2$		
$y = -4x - 2$		
	-2	3
	$\frac{1}{2}$	1
$Y = 4 - x$		
$y = 10 - 3x$		

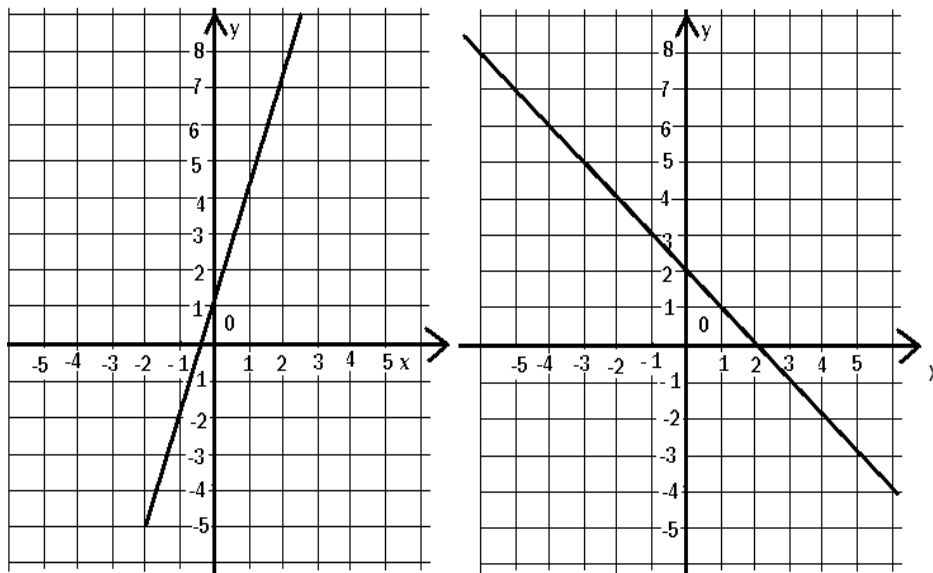
LEKCIJA BROJ 3: *Određivanje jednačine prave 2*

Predloženi plan	
1	Pregledavanje i diskusija domaće zadaće
2	Određivanje jednačine prave
3	Vježba 1
4	Pregledavanje vježbe 1
5	Aktivnost
6	Domaća zadaća

3.1. Pregledavanje i diskusija domaće zadaće

3.2. Određivanje jednačine prave

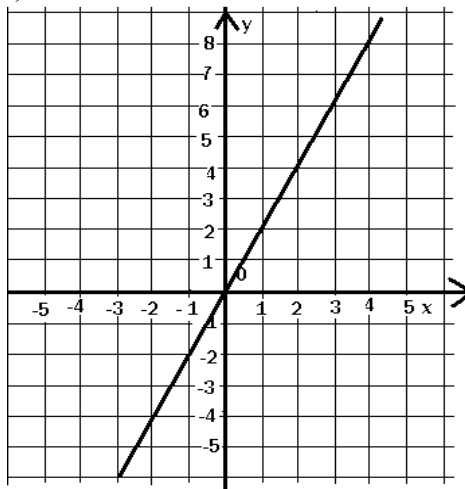
Pokazati kako se odrađuje jednačina zadate prave. Odredi se segment i gradijent. S tim u vezi nastavnik može da uradi jedan do dva primjera zajedno sa učenicima. Odrediti jednačinu pravih:



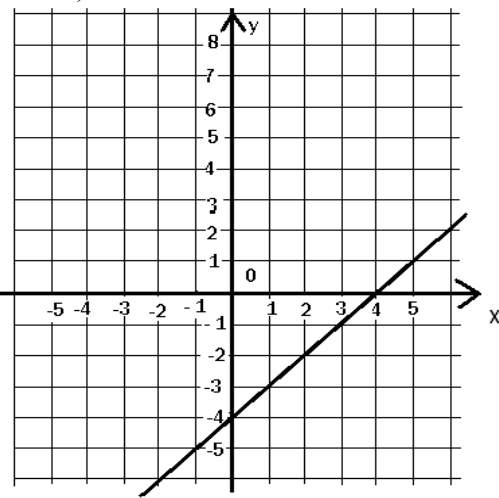
3.3. Vježba 1

Odrediti jednačine sljedećih pravih:

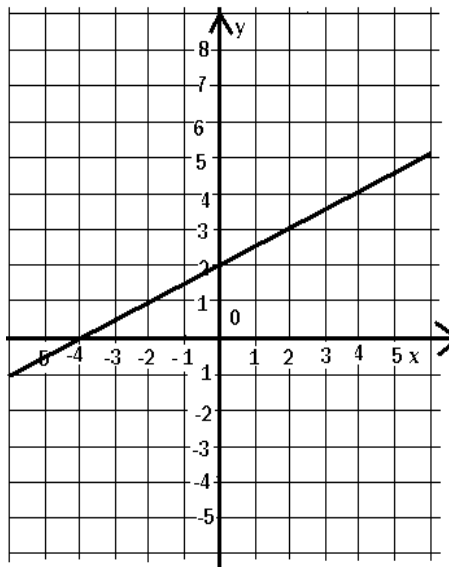
a)



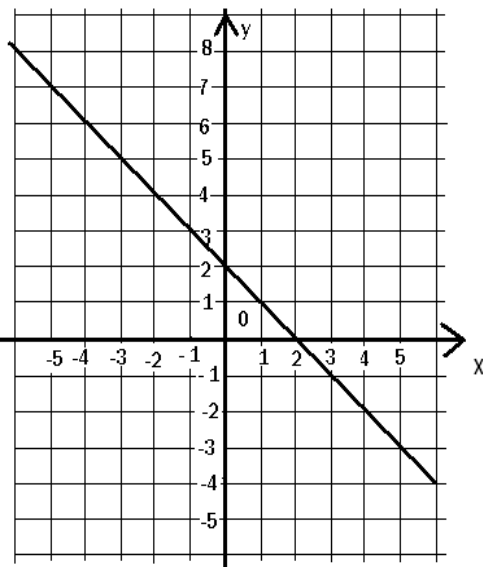
b)



c)

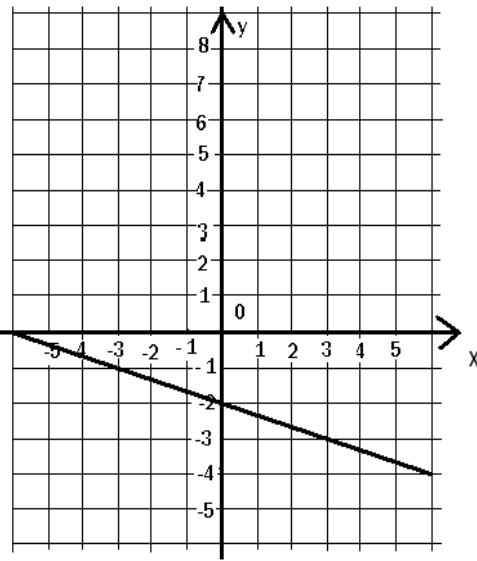
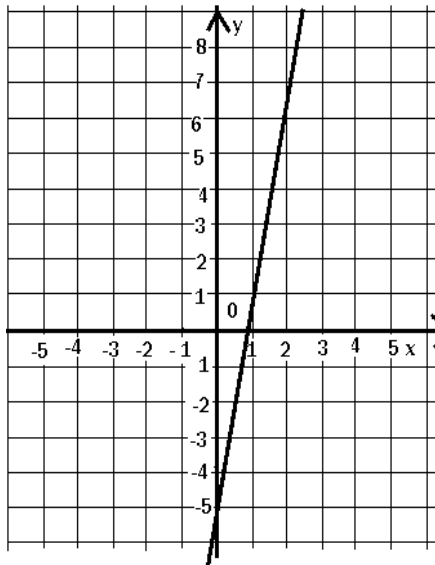


d)



e)

f)



Rješenje:

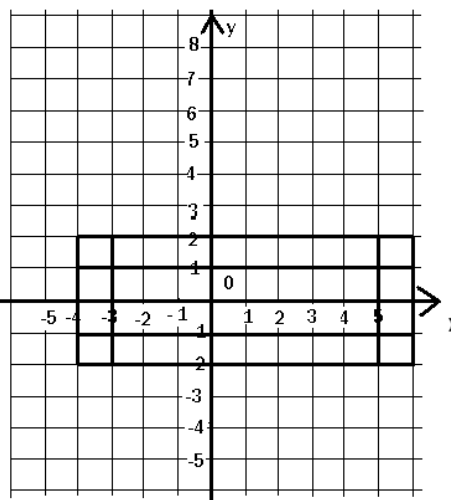
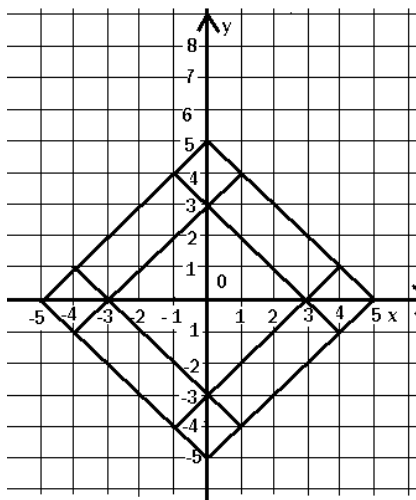
- a) $y = 2x$
- b) $y = x - 4$
- c) $y = \frac{1}{2}x + 2$
- d) $y = 2 - x$
- e) $y = 6x - 5$
- f) $y = -\frac{1}{3}x - 2$

3.4. Pregledavanje vježbe 1

3.5. Aktivnost

1) Odrediti jednačine pravih koje formiraju figuru na slici!

2) Odrediti jednačine pravih koje formiraju figuru na slici!

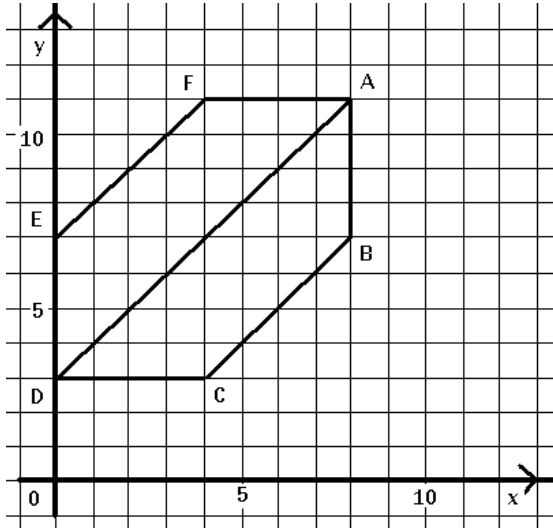


Rješenje:

1) $p_1 \equiv y = x + 5$, $p_2 \equiv y = x + 3$, $p_3 \equiv y = x - 3$, $p_4 \equiv y = x - 5$, $p_5 \equiv y = -x + 5$, $p_6 \equiv y = -x + 3$,
 $p_7 \equiv y = -x - 3$, $p_8 \equiv y = -x - 5$

2) $p_1 \equiv y = 2$, $p_2 \equiv y = 1$, $p_3 \equiv y = -1$, $p_4 \equiv y = -2$, $p_5 \equiv x = -4$, $p_6 \equiv x = -3$, $p_7 \equiv x = 5$,
 $p_8 \equiv x = 6$.

3.6. Domaća zadaća



Dat je dijagram na slici .

- a) Prava koja prolazi kroz tačke A i F ima jednačinu $y = 11$. Kako glasi jednačina prave kroz tačke A i B?
- b) Prava koja prolazi kroz tačke A i D ima jednačinu $y = x + 3$. Kako glasi jednačina prave kroz tačke F i E?
- c) Kako glasi jednačina prave koja prolazi kroz tačke B i C?

LEKCIJA BROJ 4: Linearne jednačine

Predloženi plan	
1	Pregledavanje i diskusija domaće zadaće
2	Rješavanje jednačina
3	Vježba 1
4	Pregledavanje vježbe 1
5	Linearne jednačine sa zagradama
6	Vježba 2
7	Pregledavanje vježbe 2
8	Domaća zadaća

4.1. Pregledavanje i diskusija domaće zadaće

4.2. Rješavanje linearnih jednačina

Pokazati kako se rješavaju obične linearne jednačine na sljedećim primjerima:

Riješiti sljedeće linearne jednačine:

a) $x + 11 = 20$

b) $x - 5 = 9$

c) $8 \cdot x = 40$

d) $\frac{x}{3} = 6$.

4.3. Vježba 1

Rješiti sljedeće linearne jednačine:

a) $x + 6 = 14$

b) $x - 3 = 8$

c) $7 \cdot x = 21$

d) $\frac{x}{3} = 10$

e) $10 \cdot x = 80$

f) $5 \cdot x = 35$

g) $x + 9 = 22$

h) $x - 4 = 3$

i) $x - 22 = 18$

j) $\frac{x}{5} = 100$

k) $3 \cdot x = 96$

l) $x + 22 = 47$.

Rješenje:

(a) $x + 6 = 14$ (oduzmemo 6 od obje strane)

$x = 14 - 6$

$x = 8$

(b) $x - 3 = 8$ (dodamo 3 objema stranama)

$x = 8 + 3$

$x = 11$

c) $7 \cdot x = 21$ (obje strane podijelimo sa 7)

$x = 21 : 7$

$x = 3$

d) $\frac{x}{3} = 10$ (obje strane

pomnožimo sa 3)

$x = 10 \cdot 3$

$x = 30$

e) $10 \cdot x = 80$ (obje strane podijelimo sa 10)

$x = 80 : 10$

$x = 8$

f) $5 \cdot x = 35$ (obje strane podijelimo sa 5)

$x = 35 : 5$

$x = 7$

g) $x + 9 = 22$ (od obje strane oduzmemo 9)

$x = 22 - 9$

$x = 13$

h) $x - 4 = 3$ (objema stranama dodamo 4)

$x = 3 + 4$

$x = 7$

i) $x - 22 = 18$ (objema stranama dodamo 22) j) $\frac{x}{5} = 100$ (obje strane

$$x = 18 + 22$$

$$x = 40$$

pomnožimo sa 5)

$$x = 100 \cdot 5$$

$$x = 500$$

k) $3 \cdot x = 96$ (obje strane podijelimo sa 3)

$$x = 96 : 3$$

$$x = 32$$

l) $x + 22 = 47$ (od obje strane oduzmemo 22)

$$x = 47 - 22$$

$$x = 25$$

4.4. Pregledavanje vježbe 1

Nastavnik u ovoj vježbi treba što intenzivnije da nadgleda rad učenika. Mora da ih upozorava na greške koje prave, mora da im ukazuje na greške, posebno na one kardinalne npr. za jednačinu tipa $x - 4 = 8$ najčešće greška je rješenje da je $x = 4$ umjesto da je $x = 12$. Dakle, mora da im obrati pažnju na postupak u kojem x ostaje samo na jednoj strani.

4.5. Linearne jednačine sa zagradama

Malo složeniji tip linearnih jednačina koji zahtijeva nekoliko koraka do rješenja. Postupak rješavanja takvih jednačina objasniti im na nekoliko primjera.

Na primjer, riješiti sljedeće jednačine:

a) $3 \cdot x - 4 = 11$

b) $3(x + 6) = 21$

c) $\frac{x - 5}{8} = 3$

d) $5(2 \cdot x - 8) = 60$

4.6. Vježba 2

Riješiti sljedeće linearne jednačine:

a) $2x + 7 = 15$

b) $5x - 3 = 32$

c) $6 \cdot x + 4 = 22$

d) $11x - 3 = 19$

e) $5 \cdot x + 2 = 37$

f) $\frac{x + 4}{3} = 21$

g) $\frac{2x - 1}{3} = 5$

h) $4(x + 2) = 28$

i) $3(5x - 6) = 147$

j) $2(3x - 7) = 46$

k) $\frac{2(x + 6)}{3} = 6$

l) $5(2x + 3) = 35$

Rješenje:

a) $2x + 7 = 15$ (od obje strane oduzmemo 7) b) $5x - 3 = 32$ (objema stranama dodamo 3)

$$2x = 15 - 7$$

$$2x = 8 \text{ (obje strane podijelimo sa 2)}$$

$$x = 8:2$$

$$x = 4$$

$$5x = 32 + 3$$

$$5x = 35 \text{ (obje strane podijelimo sa 5)}$$

$$x = 35:5$$

$$x = 7$$

c) $6x + 4 = 22$ (od obje strane oduzmemo 4) d) $11x - 3 = 19$ (objema stranama dodamo 3)

$$6x = 22 - 4$$

$$6x = 18 \text{ (obje strane podijelimo sa 6)}$$

$$x = 18:6$$

$$x = 3$$

$$11x = 19 + 3$$

$$11x = 22 \text{ (obje strane podijelimo sa 11)}$$

$$x = 22:11$$

$$x = 2$$

e) $5x + 2 = 37$ (od obje strane oduzmemo 2) f) $\frac{x + 4}{3} = 21$ (obje strane pomnožimo sa 3)

$$5x = 37 - 2$$

$$5x = 35 \text{ (obje strane podijelimo sa 5)}$$

$$x = 35:5$$

$$x = 7$$

$$x + 4 = 21 \cdot 3$$

$$x + 4 = 63$$

$$x + 4 = 63 \text{ (od obje strane oduzmemo 4)}$$

$$x = 63 - 4$$

$$x = 59$$

g) $\frac{2x - 1}{3} = 5$ (obje strane pomnožimo sa 3) h) $4(x + 2) = 28$ (oslobodimo se zagrade)

$$2x - 1 = 5 \cdot 3$$

$$2x - 1 = 15 \text{ (objema stranama dodamo 1)}$$

$$2x = 15 + 1$$

$$2x = 16 \text{ (obje strane podijelimo sa 2)}$$

$$x = 16:2$$

$$x = 8$$

$$4x + 8 = 28 \text{ (od obje strane oduzmemo 8)}$$

$$4x = 28 - 8$$

$$4x = 20 \text{ (obje strane podijelimo sa 4)}$$

$$x = 20:4$$

$$x = 5$$

i) $3(5x - 6) = 147$ (oslobodimo se zagrade) j) $2(3x - 7) = 46$ (oslobodimo se zagrade)

$$15x - 18 = 147 \text{ (objema stranama dodamo 18)}$$

$$15x = 147 + 18$$

$$15x = 165 \text{ (obje strane podijelimo sa 15)}$$

$$x = 165:15$$

$$x = 11$$

$$6x - 14 = 46 \text{ (objema stranama dodamo 14)}$$

$$6x = 46 + 14$$

$$6x = 60 \text{ (obje strane podijelimo sa 6)}$$

$$x = 60:6$$

$$x = 10$$

$$k) \frac{2(x+6)}{3} = 6 \text{ (obje strane pomnožimo sa 3)} \quad l) 5(2x+3) = 35 \text{ (oslobodimo se zgrade)}$$

$$2(x+6) = 6 \cdot 3 \quad 10x + 15 = 35 \text{ (od obje strane oduzmemo 15)}$$

$$2(x+6) = 18 \text{ (oslobodimo se zgrade)} \quad 10x = 35 - 15$$

$$2x + 12 = 18 \text{ (od obje strane oduzmemo 12)} \quad 10x = 20 \text{ (obje strane podijelimo sa 10)}$$

$$2x = 18 - 12 \quad x = 20:10$$

$$2x = 6 \text{ (obje strane podijelimo sa 2)} \quad x = 2$$

$$x = 6:2$$

$$x = 3$$

4.7. Pregledavanje vježbe 2

Ovu vježbu nastavnik nadzire dok učenici rade i strogo pazi na kardinalne greške, upućuje na njih, sugerše. Nastavnik treba da bude oprezan da uoči takve greške, a to su najčešće greške ovog tipa:

kod jednačine oblika $\frac{x-4}{2} = 3$ učenici često prave grešku i pišu $x - 2 = 3$ to jest, $x = 5$ umjesto da je $x = 10$. Dakle, oni "nekako" izvše dijeljenje na lijevoj strani, koje je pogrešno, i dobiju "neko" rješenje. Na ovo im treba ukazati i uputiti ih kako da riješe ovaj problem.

4.8. Domaća zadaća

1) Riješiti sljedeće jednačine:

a) $x + 1 = 2x - 1$

b) $2x + 4 = 3x - 1$

c) $7x - 2 = 5x + 6$

d) $4x + 7 = 10x - 11$

e) $x + 18 = 9x - 22$

f) $7x + 1 = 3x + 17$

g) $6(x+1) = 14(x-1)$

h) $2(5x+3) = 12x - 3$

2) Riješi sljedeće jednačine

a) $4 - 2y = 10 - 6y$

b) $5y + 20 = 3(y - 4)$

LEKCIJA BROJ 5: Rješavanje linearnih jednačina pomoću grafika linearne funkcije

Predloženi plan	
1	Pregledavanje i diskusija domaće zadaće
2	Rješavanje linearnih jednačina pomoću grafika linearne funkcije
3	Vježba 1
4	Pregledavanje vježbe 1
5	Vježba 2
6	Pregledavanje vježbe 2

7	Aktivnost
8	Domaća zadaća

5.1. Pregledavanje i diskusija domaće zadaće

5.2. Rješavanje linearnih jednačina pomoću grafika linearne funkcije

Nastavnik objašnjava kako se pomoću grafika linearnih funkcija rješavaju linearne jednačine. Od prije je poznata veza između pravih i linearnih jednačina. Ovdje se preporučuje da nastavnik demonstrativno uradi jedan primjer sam.

Na primjer :

Riješiti jednačinu $7 - x = 2x + 1$.

Skiciraju se prava

$$y = 7 - x$$

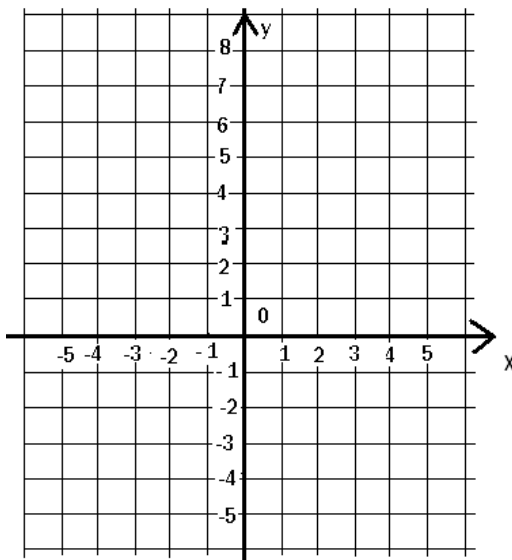
x	-2	-1	0	1	2
y					

i prava

$$y = 2x + 1$$

x	-2	-1	0	1	2
y					

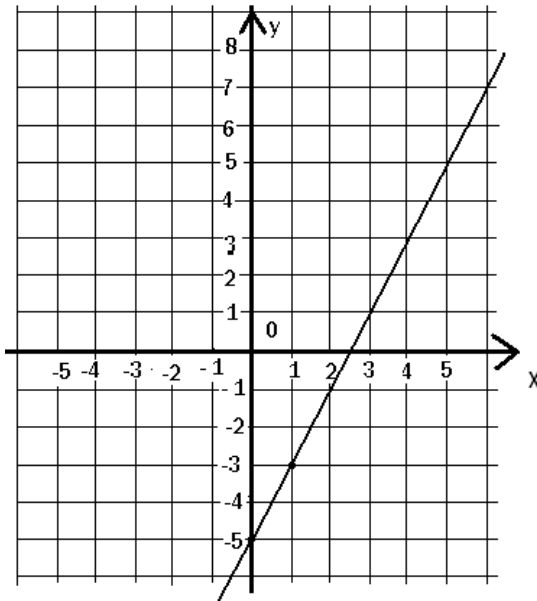
i rješenje je gdje se te prave sijeku (x koordinata te tačke)



x =

y =

5.3. Vježba 1



Na slici je prikazan grafik funkcije $y = 2x - 5$.

Koristeći tu sliku odredi rješenja jednačina:

- a) $2x - 5 = 1$
- b) $2x - 5 = 7$
- c) $2x - 5 = -3$

rješenje:

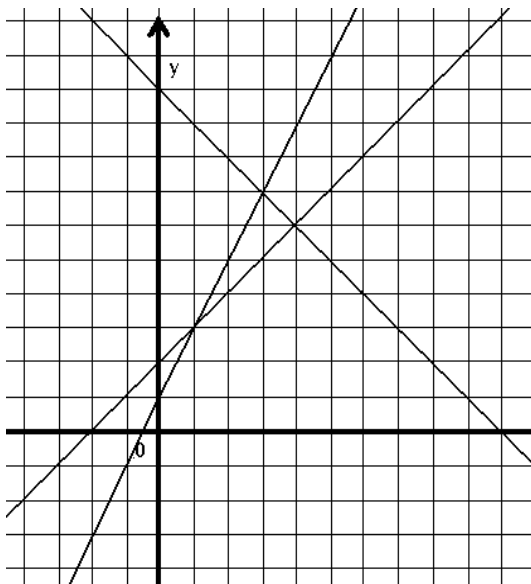
- a) Skiciramo pravu $y = 1$, a već imamo skiciranu pravu $y = 2x - 5$. One će se sjeći u tački $(3, 1)$ te je rješenje $x = 3$.
- b) Skiciramo pravu $y = 7$. Ona će sjeći našu pravu u tački $(6, 7)$ te je rješenje $x = 6$.
- c) Skiciramo pravu $y = -3$. Ona našu pravu siječe u tački $(1, -3)$ te je rješenje $x = 1$.

5.4. Pregledavanje vježbe 1

5.5. Vježba 2

Na slici su dati grafici pravih $y = 2x + 1$, $y = x + 2$ i $y = 10 - x$. Koristeći te grafike riješi sljedeće jednačine:

- a) $2x + 1 = 10 - x$
- b) $2x + 1 = x + 2$
- c) $10 - x = x + 2$

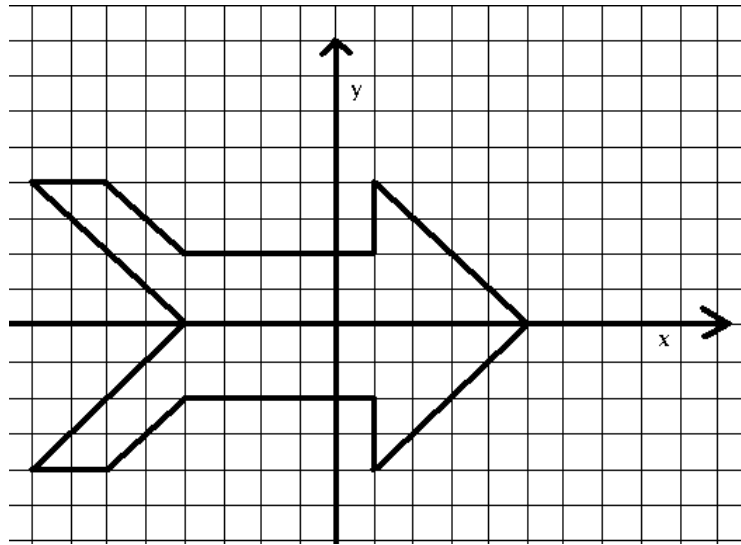


Rješenje:

- a) grafici su već skicirani i vidimo da grafik prave $y = 2x + 1$ siječe grafik $y = 10 - x$ u tački $(3, 7)$ te je rješenje jednačine $x = 3$.
- b) Grafik prave $y = 2x + 1$ siječe pravu $y = x + 2$ u tački $(1, 3)$ pa je rješenje jednačine $x = 1$.
- c) Grafik prave $y = 10 - x$ siječe grafik prav $y = x + 2$ u tački $(4, 6)$ te je rješenje jednačine $x = 4$.

5.6. Pregledavanje vježbe 2

5.7. Aktivnost



Odredi jednačine pravih koje čine figuru na slici.

Rješenje:

Odmah sa slike možemo da odredimo jednačine za 6 pravih:

$l_1 \equiv y = 2$, $l_2 \equiv y = -2$, $l_3 \equiv y = 4$, $l_4 \equiv y = -4$, $l_5 \equiv x = 1$, $l_6 \equiv y = 1$, dakle posljednje dvije prave su ustvari jedna te ista prava. To je prava koja čini stranice koje su okomite na x-osu.

Odredimo sad jednačine ostalih stranica figure. Problem je odrediti segment za te stranice. Nalazimo da su gradijenti za stranice koje čine vrh figure -1 i 1 , za stranice koje su na repu gradijenti su -1 za obje gornje i 1 za obje donje. Segmente određujemo tako što riješimo jednačine $0 = l_p$ gdje je l_p jednačina date stranice. Međutim, mi te jednačine ne znamo te se poslužimo rješavanjem pomoću grafika. Produžimo stranice i vidimo gdje one sijeku y-osu te dobijamo za segmente sljedeće vrijednosti:

Za stranice na vrhu – za gornju segment = 5, a za donju segment = -5

Za stranice na repu – za gornju veću segment = -4 , za gornju manju segment = -2 , za donju veću segment = 4 , a za donju manju segment = 2 . Tako da dobijamo jednačine:

$l_7 \equiv y = -x + 5$, $l_8 \equiv y = x - 5$, $l_9 \equiv y = -x - 4$, $l_{10} \equiv y = -x - 2$, $l_{11} \equiv y = x + 4$, $l_{12} \equiv y = x + 2$.

5.8. Domaća zadaća

Riješiti sljedeće linearne jednačine pomoću grafika linearne funkcije na istom koordinatnom sistemu:

- $2x - 2 = x + 3$
- $2x - 2 = 8$
- $x + 3 = 8$

LEKCIJA BROJ 6: Paralelne i okomite prave

Predloženi plan	
1	Pregledavanje i diskusija domaće zadaće
2	Paralelne prave
3	Vježbe 1 i 2
4	Pregledavanje vježbi 1 i 2
5	Okomite prave
6	Vježbe 3 i 4
7	Pregledavanje vježbi 3 i 4
8	Domaća zadaća

6.1. Pregledavanje i diskusija domaće zadaće

6.2. Paralelne prave

Skicirati tri prave koje su paralelne i vidjeti šta je zajedničko u njihovim jednačinama. Na taj način zaključiti da paralelne prave imaju iste gradijente. Na primjer može se koristiti ovaj primjer:

Skicirati grafike sljedećih pravih:

$y = 2x + 1$

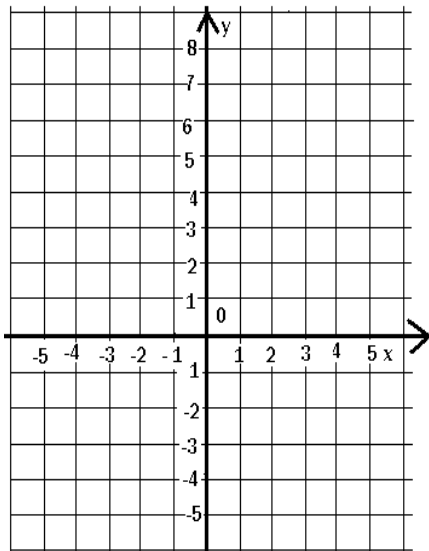
x	-2	-1	0	1	2
y					

$y = 2x + 2$

x	-2	-1	0	1	2
y					

$y = 2x - 3$

x	-2	-1	0	1	2
y					



Šta zaključujemo na osnovu grafika?

Šta je zajedničko za jednačine navedenih pravih?

6.3. Vježbe 1 i 2

Vježba 1

Date su jednačine nekoliko pravih

A $y = 5x - 7$

B $y = 2x + 8$

C $y = 3x + 3$

D $y = 3x - 8$

E $y = 5x + 2$

- Koja prava je paralelna pravoj A?
- Koja prava je paralelna pravoj C?
- Da li je i jedna od navedenih pravih paralelna pravoj B? Zašto?

Rješenje:

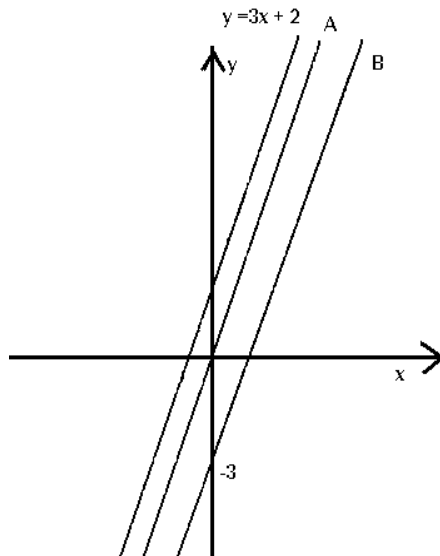
- Prava E je paralelna pravoj A jer imaju iste gradijente.
- Prava D je paralelna pravoj C jer imaju iste gradijente.
- Ne, prava B nije paralelna niti jednoj od navedenih pravih A, C, D, E jer nema ni sa jednom isti gradijent.

Vježba 2

Na slici je prikazana prava $y = 3x + 2$ i dvije druge prave, A i B, koje su paralelne datoj pravoj.

- Koliki je gradijent prave A?
- Odredi jednačinu prave A!

c) Odredi jednačinu prave B!



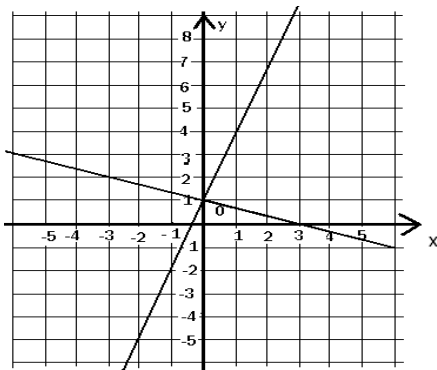
Rješenje:

- Prava A ima gradijent = 3 jer je A paralelna pravoj $y = 3x + 2$, a paralelne prave imaju jednake gradijente.
- $A \equiv y = 3x$
- $B \equiv y = 3x - 3$

6.4. Pregledavanje vježbi 3 i 4

6.5. Okomite prave

Za dvije okomite prave vrijedi da im je proizvod gradijenata jednak -1. Do ovog zaključka doći skiciranjem dvaju pravih koje su okomite, određivanje njihovih jednačina i množenjem njihovih gradijenata. Na primjer, može se koristiti ovaj primjer:



Na slici su date dvije okomite prave.

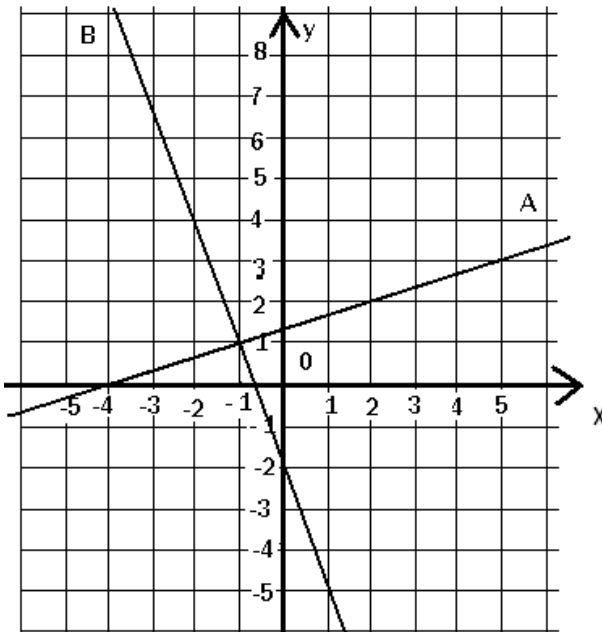
Odredi njihove jednačine.

Kakva je relacija između njihovih gradijenata?

6.6. Vježbe 3 i 4

Vježba 3

Date su dvije prave na slici.



- Izračunaj gradijent prave A!
- Izračunaj gradijent prave B!
- Na osnovu a) i b) objasni zašto su prave A i B okomite.

Rješenje:

- gradijent = $1/3$
- gradijent = -3
- Prave su okomite jer im je proizvod gradijenata jednak -1 .

Vježba 4

Date su jednačine nekoliko pravih

$$A \quad y = 5x + 2$$

$$B \quad y = \frac{1}{2}x + 4$$

C $y = 2x + 1$

D $y = \frac{-1}{5}x + 6$

E $y = -2x + 3$.

- a) Koja prava je okomita na pravu A?
- b) Koja prava je okomita na pravu B?
- c) Koja od navedenih pravih nije okomita niti na jednu ostalu pravu?

Rješenje:

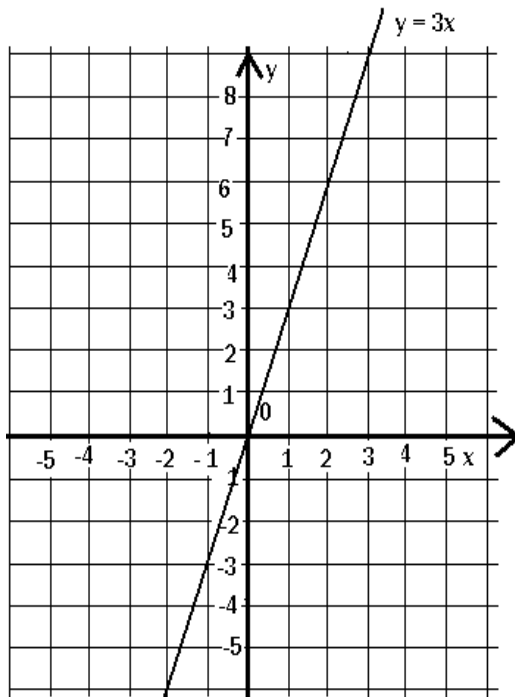
- a) Prava D je okomita na pravu A jer im je proizvod gradijenata -1.
- b) Prava E je okomita na pravu B jer im je proizvod gradijenata jednak -1.
- c) Prava C nije okomita ni na jednu drugu pravu.

6.7. Pregledavanje vježbi 3 i 4

6.8. Domaća zadaća

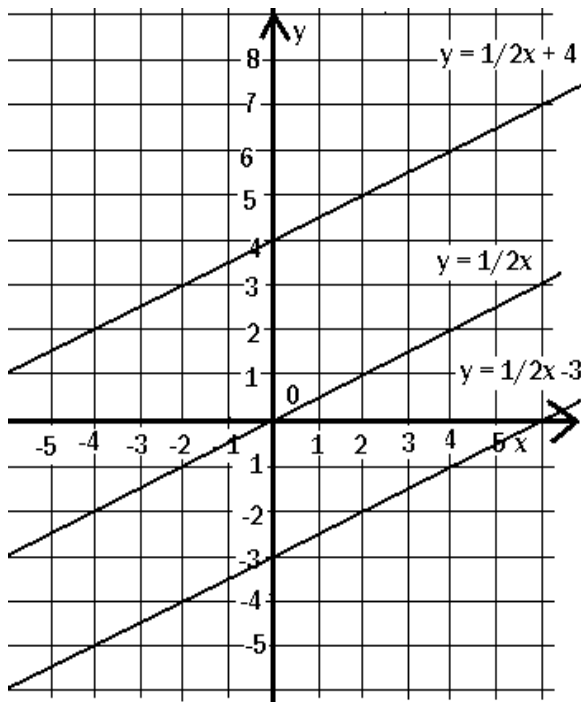
1) Na slici je prikazan grafik prave $y = 3x$

- a) U istom koordinatnom sistemu skiciraj grafik prave $y = 2x$



- b) Napiši jednačini još jedne prave koja prolazi tačkom (0,0).
- c) Prava $y = x - 1$ prolazi tačkom (4,3). U istom koordinatnom sistemu skiciraj grafik te funkcije.
- d) Napiši jednačinu prave koja prolazi kroz tačku (0,-1) i paralelna je pravoj $y = 3x$.

2) Selma je bila veoma zainteresovana za prave linije i u koordinatnom sistemu skicirala je sljedeće prave (slika dolje):



- (a) U svakoj jednačini pojavljuje se $y = 1/2x$. Šta nam to govori o tim pravima.
- (b) Date prave sijeku y-osu u tačkama $(0,-3)$, $(0,0)$ i $(0,4)$. Koji dio jednačina tih pravih nam govori ovu osobinu?
- (c) Selma je odlučila da malo se igra sa pravim linijama pa je trebala veći koordinatni sistem. Gdje će prava $y = 1/2 x - 20$ sjeći y-osu?
- (d) U istom koordinatnom sistemu skiciraj još jednu pravu koja je paralelna pravoj $y = 1/2 x$. Napiši njenu jednačinu!

LEKCIJA BROJ 7: Sistemi linearnih jednačina

Predloženi plan	
1	Pregledavanje i diskusija domaće zadaće
2	Rješavanje sistema linearnih jednačina- grafički metod
3	Vježba 1
4	Pregledavanje vježbe 1
5	Rješavanje sistema linearnih jednačina – metod eliminacije
6	Vježba 2
7	Pregledavanje vježbe 2
8	Domaća zadaća

7.1. Pregledavanje i diskusija domaće zadaće

7.2. Rješavanje sistema linearnih jednačina – grafički metod

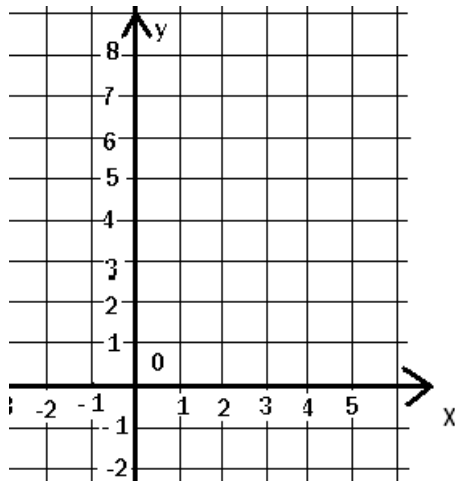
Metod rješavanja sistema linearnih jednačina pomoću grafika linearnih funkcija. Nastavnik upoznaje učenike sa ovom metodom tako što demonstrativno rješava jedna primjer u interakciji sa učenicima. Za primjer može poslužiti na primjer: Riješiti sistem linearnih jednačina sa dvije nepoznate

$$\begin{array}{lcl}
 x + y = 5 & \text{i} & 2x + y = 6 \\
 y = & \text{i} & y =
 \end{array}$$

Skiciraju se grafici datih pravaca:

x	-2	-1	0	1	2
y					

x	-2	-1	0	1	2
y					



Rješenje tačka gdje se grafici sijeku:

x =

y =

7.3. Vježba 1

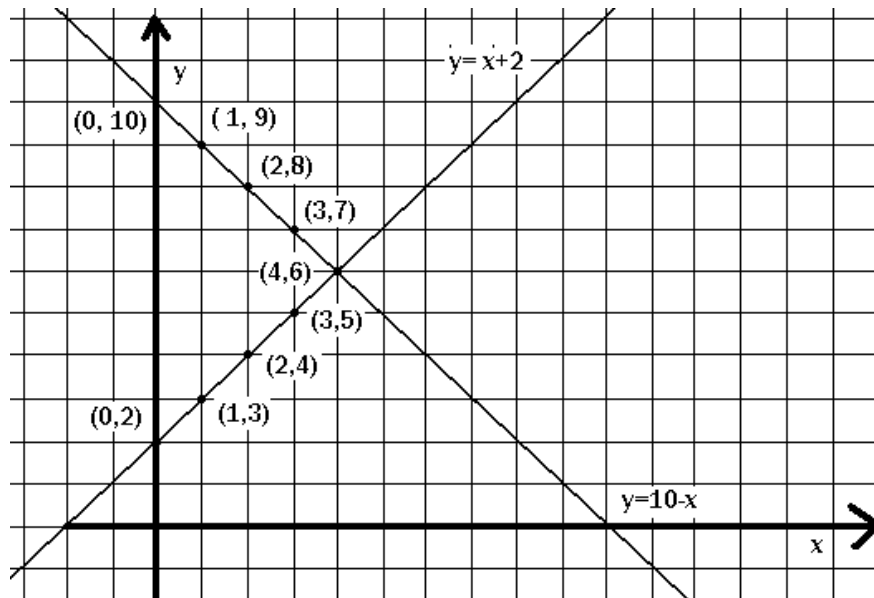
- a) Skiciraj grafike pravih $y = 10 - x$ i $y = x + 2$
- b) Napiši koordinate tačke u kojoj se sijeku date prave.
- c) Šta je rješenje sistema linearnih jednačina:

$$y = 10 - x$$

$$y = x + 2$$

Rješenje:

a)



b)

Таčka у којој се сijekу графици датих функција има координате (4,6).

c) Рјешенје датог система је таčka (4,6), јер се графици прaviх $y = 10-x$ и $y = x+2$ сijekу у таčki (4,6).

7.4. Pregledavanje vježbe 1

7.5. Rješavanje sistema linearnih jednačina – metod eliminacije

Рјешавање система линеарних једначина са двије непознате помоћу метода елиминације састоји се у томе да, пошто обје једначине помножимо одговарајућим скаларима, након сабирања те двије једначине елиминишемо једну од непознатих. Овај метод рјешавања система линеарних једначина са двије непознате наставник може изложити тако да демонстративно ријеши један примјер у интеракцији са ученицима. Примјер може бити слjedeћег типа:

Ријешити систем линеарних једначина

$$2x + 4y = 22$$

$$3x - 5y = -11$$

$$\begin{array}{r} 2x + 4y = 22 \quad / \times 5 \\ 3x - 5y = -11 \quad / \times \underline{\quad} \\ \hline + = \end{array}$$

7.6. Vježba 2

Нека је дат систем линеарних једначина:

$$4x + 2y = 46$$

$$x + 3y = 14$$

- Објасни зашто је збир прве једначине помножене са -1 и друге једначине помножене са 4 једначина са само једном непознатом. На који начин можемо елиминисати другу промјенљиву?
- Ријешити дати систем методом елиминације.

Рјешенје:

a) Након што саберемо прву једначину помножену са -1 и другу помножену са 4 добијемо једначину

$$-4x - 2y + 4x + 12y = -46 + 56, \text{ а након сређивања добијемо } 10y = 10, \text{ а то је једначина са једном непознатом.}$$

Ако би прву једначину помножили са -3, а другу са 2 и тако добијене једначине сабрали добили бисмо једначину

$$-12x - 6y + 2x + 6y = -138 + 28 \text{ што након сређивања даје } -10x = -110, \text{ а то је једначина са једном непознатом}$$

те смо се ријешили друге непознате.

$$\begin{array}{r} b) \quad 4x + 2y = 46 \quad / \times (-1) \\ \quad \quad x + 3y = 14 \quad / \times (4) \\ \hline \end{array}$$

$$-4x - 2y = -46$$

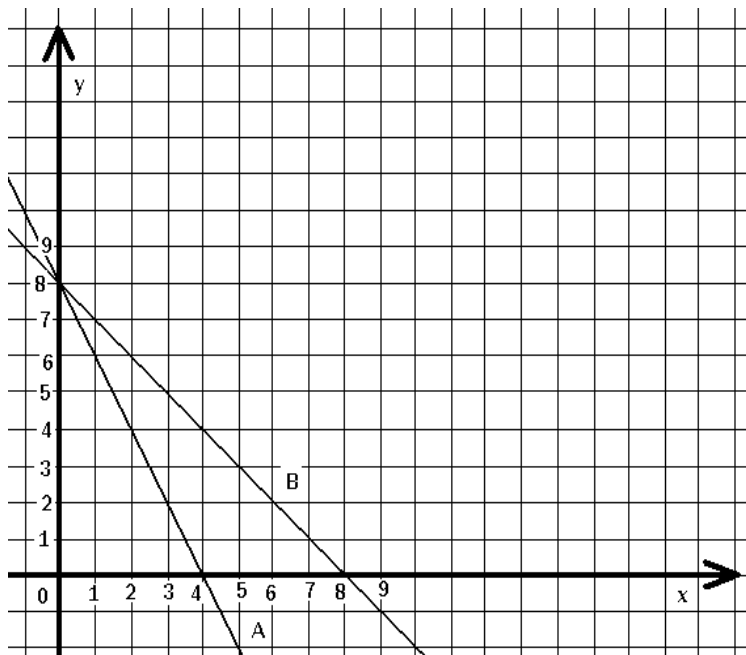
$$\begin{array}{r}
 4x + 12y = 56 \\
 \hline
 -4x - 2y + 4x + 12y = -46 + 56 \\
 10y = 10 \text{ (podijelimo obje strane sa 10)} \\
 y = 10:10 \\
 y = 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4x + 2y = 46 \text{ (uvrstimo vrijednost } y=1) \\
 4x + 2 \cdot 1 = 46 \\
 4x + 2 = 46 \text{ (od obje strane oduzmemo 2)} \\
 4x = 46 - 2 \\
 4x = 44 \text{ (obje strane podijelimo sa 4)} \\
 x = 44:4 \\
 x = 11
 \end{array}$$

Dakle rješenje je $x = 11$ i $y = 1$.

7.7. Pregledavanje vježbe 2

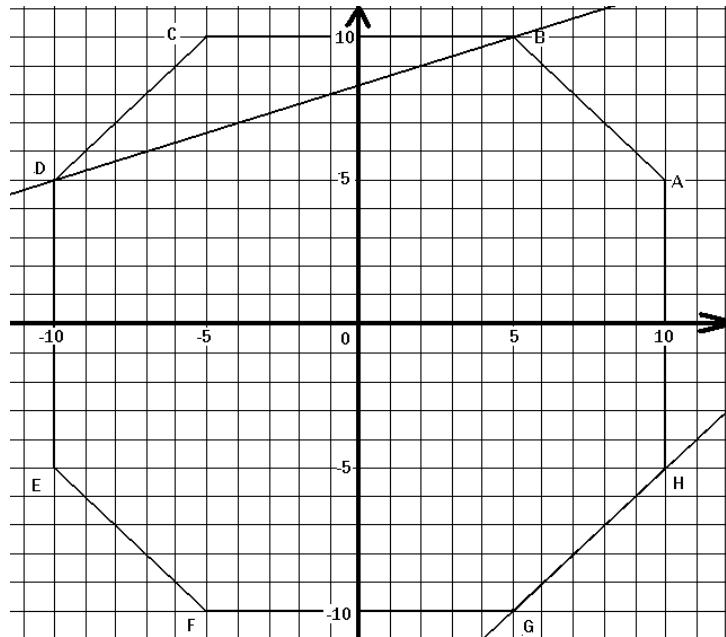
7.8. Domaća zadaća



- 1) Neka su date prave (slika dolje):
- Pokazati da je jednačina prave A $2x + y = 8$
 - Odredi jednačinu prave B!
 - Na istom koordinatnom sistemu skiciraj pravu $C \equiv y = 2x + 1$.
 - Riješi sistem linearnih jednačina.

$$\begin{array}{l}
 y = 2x + 1 \\
 3y = 4x + 6.
 \end{array}$$

- 2) Na slici dat je jedan oktagon.



- a) Prava kroz tačke A i H ima jednačinu $x = 10$.
 Odredi jednačinu prave koja prolazi kroz tačke F i G.
- b) Dopuni rečenicu:
 $x + y = 15$ je jednačina prave kroz tačke ____ i ____.
- c) Dati oktagon ima 4 prave simetrije. Jedna od njih je prava $y = x$. U istom koordinatnom sistemu skiciraj grafik te prave.
- d) Napiši jednačine ostale tri prave simetrije za dati oktagon.
- e) Prava koja prolazi kroz tačke D i B ima jednačinu $3y = x + 25$, a prava kroz tačke G i H ima jednačinu $x = y + 15$. Riješi sistem linearnih jednačina:

$$\begin{aligned} 3y &= x + 25 \\ x &= y + 15. \end{aligned}$$
- f) Prava koja prolazi kroz tačke B i D siječe pravu koja prolazi kroz tačke G i H u tački
 (__ , __).

LEKCIJA BROJ 8: *Primjena linearnih jednačina na rješavanje problema*

Predloženi plan	
1	Pregledavanje i diskusija domaće zadaće
2	Primjena linearnih jednačina na rješavanje problema
3	Vježba 1
4	Pregledavanje vježbe 1
5	Vježba 2
6	Pregledavanje vježbe 2
7	Mentalni test

Cijena iznajmljivanja auta iznosi 20 KM za jedan dan i plus 50 pf za svaki pređeni kilometar.

- Napiši izraz za cijenu, c , u feninzima, putovanja m km za jedan dan u iznajmljenom automobilu!
- Napiši izraz za cijenu, d , u feninzima, za putovanje m kilometara za dva dana u iznajmljenom automobilu!
- Nikola je iznajmio automobil na dva dana i na kraju platio ukupnu cijenu od 68,50 KM. Koliko je kilometara prešao iznajmljenim automobilom?

Rješenje:

a) Dakle, u cijenu c ulazi cijena iznajmljivanja na jedan dan, a to je 2000pf i plus cijena vožnje tim autom od m kilometara, $50 \cdot m$, to jest:

$$c = 50 \cdot m + 2000$$

b) Dakle, dva dana putujemo iznajmljenim autom i prelazimo m km. Plaćemo cijenu iznajmljivanja za dva dana, $2 \cdot 2000 = 4000$, i cijenu pređene kilometraže, $50 \cdot m$, pa ćemo platiti.

$$d = 50 \cdot m + 4000.$$

c) Nikola je platio iznajmljivanje auta od dva dana i cijenu pređenih m kilometara 6850 pf, to jest:

$$50 \cdot m + 4000 = 6850 \quad (\text{od obje strane oduzmimo } 4000)$$

$$50 \cdot m = 6850 - 4000$$

$$50 \cdot m = 2850 \quad (\text{obje strane podijelimo sa } 50)$$

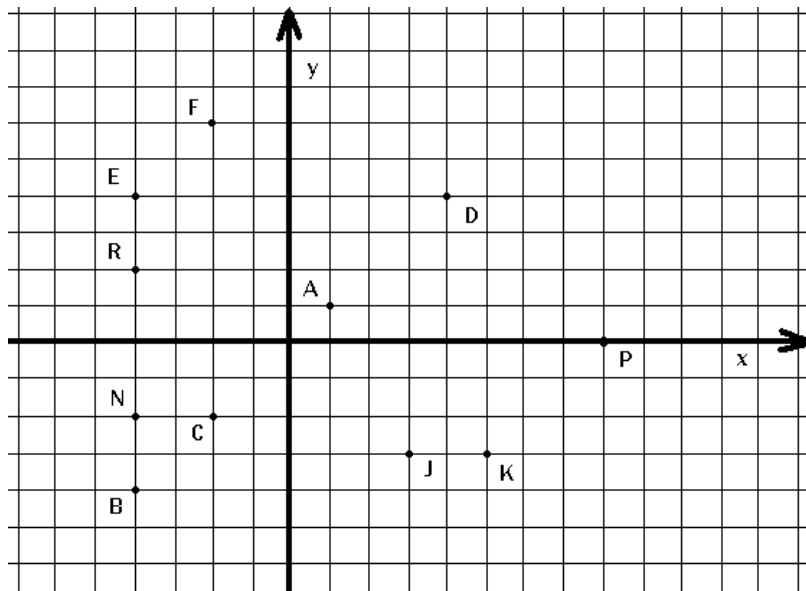
$$m = 2850 : 50 \quad \text{pa je Nikola prešao}$$

$$m = 57 \text{ km.}$$

8.6. Pregledavanje vježbe 2

8.7. Mentalni test

Dat je koordinatni sistem i u njemu nekoliko tačaka.



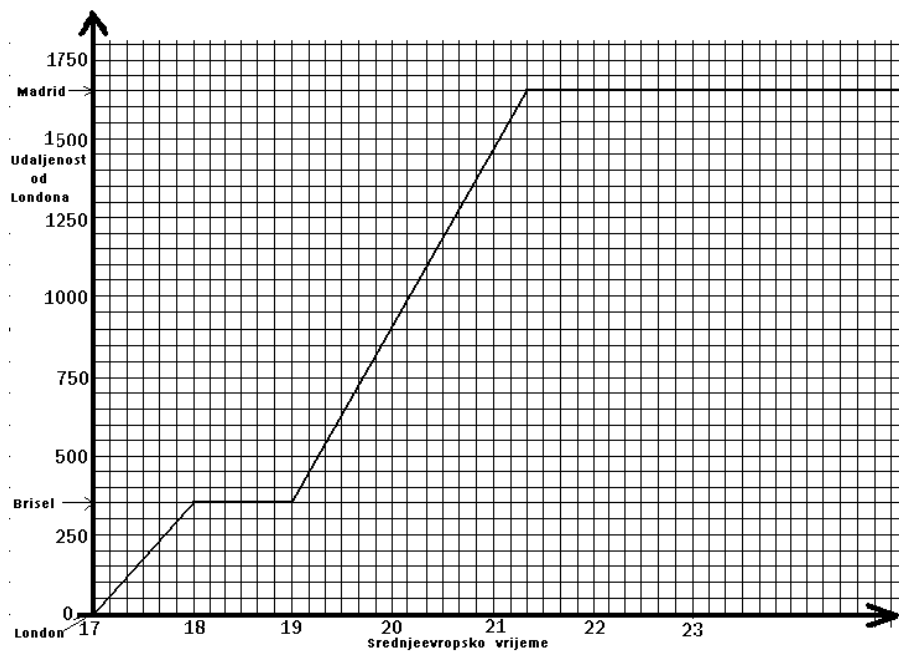
Riješi sljedeće zadatke!

1. Napiši koordinate tačke P ! (8,0)
2. Napiši koordinate tačke R! (-4,2)
3. Koja tačka ima koordinate (-2,6)? (F)
4. Koja tačka ima koordinate (-4,-2)? (N)
5. Koliki je gradijent prave koja prolazi kroz tačke E i F? (1)
6. Koliki je gradijent prave koja prolazi kroz tačke R i F? (2)
7. Koliki je gradijent prave koja prolazi kroz tačke R i A? (-1/5)
8. Tačke A, B, C i D su na istoj pravoj. Odrediti njenu jednačinu! ($y = x$)
9. Tačke E i J leže na istoj pravoj. Odredi njenu jednačinu! ($y = -x$)
10. Koja tačka ima istu y- koordinatu kao i tačka K? (J)

8.8. Pregled testa

8.9. Domaća zadaća

Na sljedećoj slici grafički je prikazan let aviona iz Londona za Madrid preko Brisela.



- Kolika je srednja brzina aviona na ruti od Londona do Brisela?
- Na osnovu čega na grafiku, bez računanja, možeš da zaključiš da je srednja brzina aviona na ruti od Brisela do Madrida veća nego na ruti od Londona do Brisela?
- Drugi avion poleće iz Madrida za London preko Brisela. Iz Madrida poleće u 18 h, sleće u Brisel u 20 h, zatim poleće iz Brisela u 21:10 i konačno sleće u London u 22:20. Na istom grafu grafički prikaži njegov let!
- U koje vrijeme će ta dva aviona biti na istoj udaljenosti od Londona?

LEKCIJA BROJ 9: *Revizioni test*

Predloženi plan	
1	Pregledavanje i diskusija domaće zadaće
2	Revizioni test

9.1. Pregledavanje i diskusija domaće zadaće

9.2. Revizioni test

Test provjere znanja iz oblasti **Linearna funkcija i linearne jednačine**. Nastavnik ove testove može da nađe na oficijelnoj web stranici MEP projekta. Stranice sa testovima su osigurane.

LEKCIJA BROJ 10: *Rekapitulacija*

Predloženi plan	
1	Vraćanje ocjenjenih testova
2	Ispravak testa
3	Pregled oblasti Linearne funkcije i linearnih jednačina

10.1. Vraćanje ocjenjenih testova

10.2. Ispravak testa

Interaktivno prelaziti preko pitanja koja su bila na testu. Dakle, davanje tačnih odgovora na pitanja u testu i ukazivanje na greške koje su se pojavljivale i njihovo ispravljanje.

10.3. Pregled oblasti Linearne funkcije i linearnih jednačina

Do kraja časa ponavljati ono što je naučeno iz ove teme. Otklanjanje nejasnoća koje se eventualno javljaju kod nekih učenika i vježbanje primjera.