MAT-KOL (Banja Luka)
Matematički kolokvijum
XIV(3)(2008), 13-21

DEVET RJEŠENJA JEDNOG ZADATKA IZ GEOMETRIJE

Dr Šefket Arslanagić[1] i **Alija Miminagić**[2]

Samostalno rješavanje malog broja teških problema je, bez sumnje, od veće koristi za učenike i studente nego rješavanje velikog broja laganih problema. Ukoliko rješavači imaju pristup nečijim drugim problemima, preporučuje se da ih pogledaju samo nakon što su našli svoja rješenja. Ukoliko nisu uspjeli u rješavanju problema trebalo bi da postignu dubok uvid u problem. Vrlo često, rješenje nekoga ko rješava određeni problem će biti različito od rješenja autora problema. Ovo je vrlo poželjno, jer u takvim situacijama se postiže dublje razumijevanje suštine i sadržaja problema.

U tom smislu ćemo ovdje citirati šta o tome misli čuveni američki matematičar i metodičar George Polya (1887.-1985.) koji kaže: "Riješiti jedan problem na dva ili više načina je od veće vrijednosti nego riješiti stotinu problema sve na isti način."

Ovdje ćemo upravo demonstrirati značenje ovih riječi rješavajući jedan takav problem.

Riječ je o sljedećem zadatku iz geometrije.

Zadatak 1 ***Oko jednakostraničnog trougla*** $\triangle ABC$ ***opisana je kružnica. Dokazati da svaka tačka*** M ***luka*** $\widehat{AB}$ ***ima osobinu*** $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{MC}$.

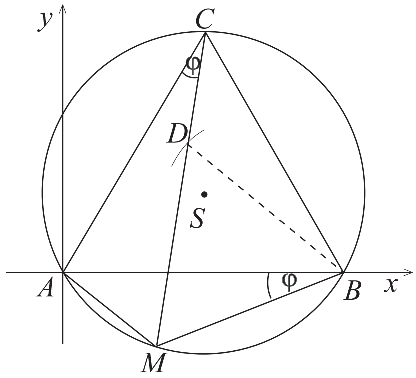
U matematičkoj literaturi ovaj zadatak je poznat kao **Van Schootenova teorema** (Schooten, Frams van, the Younger, c. 1615-c. 1660., holandski matematičar).

Ovaj zadatak se nalazi u mnogim ozbiljnijim zbirkama iz geometrije, a bio je dat i na Republičkom takmičenju u SR Srbiji 1978. godine za II razred (4. zadatak) gdje je službeno rješenje naš dokaz 1.

Daćemo devet različitih rješenja ovog zadatka, čisto geometrijskih, pomoću trigonometrije, pomoću vektora i analitičke geometrije.

Dokaz 1 *Naravno, tačka M pripada luku $\widehat{AB}$ kome ne pripada tačka C (vidi sl. 1). Na duži CM odredimo tačku D, tako da bude $\overline{BM} = \overline{BD}$. Uglovi $\angle BAM$ i $\angle BCD$ su jednaki kao priferijski nad istom tetivom MB. Pošto su uglovi $\angle DMB$ i $\angle BAC = 60°$ jednaki (kao periferijski nad tetivom BC), to je $\angle DMB = 60°$, pa je trougao $\triangle MBD$ (zbog $\overline{BM} = \overline{BD}$) jednakostranični. To znači da je $\angle BDC = 120°$, a i $\angle AMB = 120°$, jer je $\angle AMC = \angle ABC = 60°$ kao periferijski nad tetivom AC (a i zbog toga što je četverougao $AMBC$ tetivni). Svakako $\overline{AB} = \overline{BC}$, pa su trouglovi $\triangle AMB$ i $\triangle CDB$ podudarni, odakle slijedi da je $\overline{CD} = \overline{AM}$. Sada imamo $\overline{MC} = \overline{CD} + \overline{DM} = \overline{MA} + \overline{MB}$, što je i trebalo dokazati.*

[1]Sarajevo, BiH
[2]Nykobing, Danska



sl. 1

Dokaz 2 *Na osnovu **Ptolemejeve teoreme** primjenjene na tetivni četverougao $AMBC$ imamo:*

$$\overline{AM} \cdot \overline{BC} + \overline{MB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{MC}. \tag{1}$$

Kako je $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = a$, iz (1) slijedi:

$$a \cdot \overline{AM} + a \cdot \overline{MB} = a \cdot \overline{MC}$$

ili nakon dijeljenja sa a: $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{MC}$, što je i trebalo dokazati.

Dokaz 3 *Neka je $AB \cap CM = \{K\}$(sl. 2). Očigledno, $\triangle AKM \sim \triangle BCK$ (jer imaju jednake uglove), pa iz te sličnosti slijedi:*

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{CK}} \Rightarrow \overline{AM} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AK}}{\overline{CK}}. \tag{2}$$

Iz sličnosti trouglova $\triangle MKB \sim \triangle ACK$ (trouglovi imaju jednake uglove) slijedi:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{CK}} \Rightarrow \overline{MB} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BK}}{\overline{CK}}. \tag{3}$$

Sabiranjem jednakosti (2) i (3) dobijamo

$$\begin{aligned}\overline{MA} + \overline{MB} &= \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AK}}{\overline{CK}} + \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BK}}{\overline{CK}} = (\text{zbog } \overline{BC} = \overline{AC} = a) \\ &= \frac{a(\overline{AK} + \overline{BK})}{\overline{CK}} = (\text{zbog } \overline{AK} + \overline{BK} = \overline{AB} = a) = \frac{a^2}{\overline{CK}}.\end{aligned}$$

Dakle,

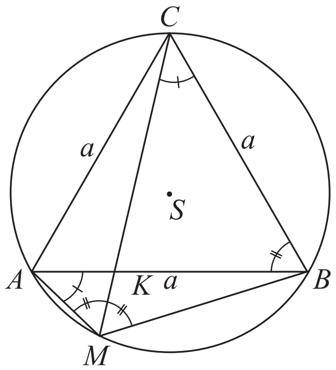
$$\overline{MA} + \overline{MB} = \frac{a^2}{\overline{CK}}. \tag{4}$$

Osim toga je i $\triangle MCB \sim \triangle KCB$ (jer je $\angle C$ zajednički, a $\angle BMC = \angle BAC = \angle ABC = \angle KBC = 60°$), pa je

$$\frac{\overline{MC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CK}} \Rightarrow \overline{MC} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{CK}} = (\text{zbog } \overline{BC} = a) = \frac{a^2}{\overline{CK}}. \tag{5}$$

Konačno, iz (4) i (5) slijedi:

$$\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{MC}, \text{ q.e.d.}$$



sl. 2

Dokaz 4 *Uzmimo tačku E na opisanoj kružnici oko trougla $\triangle ABC$, takvu da je $\overline{CE} = \overline{AM}$. Produžimo CE preko tačke E i MA preko tačke Ai presječnu tačku označimo sa F (sl. 3). Zbog $\overline{CE} = \overline{AM}$ je $\widehat{CE} = \widehat{AM}$, pa je i $\angle CAE = \angle ACM$, a zbog toga je $AE||MC$. Tako je četverougao $CEAM$ jednakokraki trapez i $\angle AMC = \angle MCE = 60°$ (jer je $\angle AMC = \angle ABC = 60°$). Ovo pak znači da je trougao $\triangle MCE$ jednakostranični. Zbog $AE||MC$ je i trougao $\triangle AEF$ jednakostranični, pa je $\overline{FA} = \overline{FE}$. Dalje imamo da je*

$$\widehat{AE} = \widehat{CA} - \widehat{CE} = \widehat{AB} - \widehat{MA} = \widehat{MB},$$

pa je $\overline{AE} = \overline{MB}$. Sada je dakle,

$$\overline{FA} + \overline{AM} = \overline{AE} + \overline{AM} = \overline{MB} + \overline{MA},$$

a u jednakostraničnom trouglu $\triangle MCF$ je:

$$\overline{FA} + \overline{AM} = \overline{FM} = \overline{MC},$$

pa iz dvije posljednje jednakosti slijedi da je:

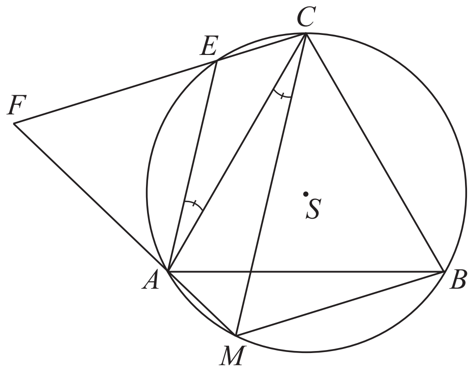
$$\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{MC}, \text{ q.e.d.}$$

Dokaz 5 *Produžimo MB preko tačke B do tačke E tako da je $\overline{MC} = \overline{ME}$ (sl. 4). Zbog $\angle CME = 60°$ i $\overline{MC} = \overline{ME}$ trougao $\triangle CME$ je jednakostraničan. Neka je $\angle ACM = x, \angle MCB = y$ i $\angle BCE = z$. Imamo da je $x + y = 60°$ i $y + z = 60°$, pa je $x = z$. Sada je $\angle AMC = 60° = \angle BEC, \angle ACM = x = z\angle BCE$, te $\overline{MC} = \overline{EC} = \overline{ME}$, pa je $\triangle MCA \cong \triangle BEC$ i iz podudarnosti tih trouglova slijedi da je $\overline{MA} = \overline{BE}$. Tako je sada*

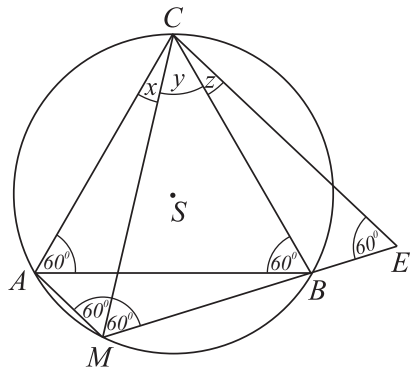
$$\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{BE} + \overline{MB} = \overline{ME} = \overline{MC},$$

tj.

$$\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{MC}, \text{ q.e.d.}$$



sl. 3



sl. 4

Dokaz 6 *Na osnovu* ***kosinusne teoreme*** *primjenjene na trouglove* $\triangle AMC$ *i* $\triangle MBC$*, dobijamo:*

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 - 2\cdot\overline{AM}\cdot\overline{MC}\cdot\cos\angle AMC,\\ \overline{BC}^2 &= \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - 2\cdot\overline{MB}\cdot\overline{MC}\cdot\cos\angle CMB.\end{aligned}$$

Kako je $\angle AMC = \angle CMB = 60^\circ$ *(vidi dokaz 1), to imamo:*

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 - \cdot\overline{AM}\cdot\overline{MC}, \text{ te}\\ \overline{BC}^2 &= \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - \cdot\overline{MB}\cdot\overline{MC}.\end{aligned}$$

Oduzimajući ove jednakosti (gdje je $\overline{AC} = \overline{BC}$*) dobijamo:*

$$0 = \overline{AM}^2 - \overline{MB}^2 - \overline{MC}\cdot(\overline{AM} - \overline{MB}),$$

a odavde, nakon dijeljenja sa $\overline{AM} - \overline{MB} \neq 0$*, imamo:*

$$0 = \overline{AM} + \overline{MB} - \overline{MC}$$

i konačno $\overline{AM}+\overline{MB} = \overline{MC}$*, što je i trebalo dokazati. (U slučaju* $\overline{AM}-\overline{MB} = 0$*, tj.* $\overline{AM} = \overline{MB}$ *lako se pokazuje da je* $\overline{MC} = 2\overline{MS} = \overline{MS}+\overline{MS} = \overline{MA}+\overline{MB}$*).*

Dokaz 7 *Neka je $\angle MCA = \varphi$ (sl. 1). Ugao $\angle MBA$ je jednak također φ (kao periferijski nad tetivom AM). Poznata nam je veza između stranice trougla, sinusa naspramnog ugla i poluprečnika opisane kružnice (sinusna teorema). Iz trouglova $\triangle AMC$ i $\triangle BMC$ dobijamo (R je poluprečnik opisane kružnice nad tim trouglovima):*

$$\overline{MA} = 2R\sin\varphi, \overline{MB} = 2R\sin(60^\circ - \varphi) \text{ i } \overline{MC} = 2R\sin(60^\circ + \varphi).$$

Odavde je:

$$\begin{aligned}\overline{MA} + \overline{BM} &= 2R[\sin\varphi + \sin(60^\circ - \varphi)] = 2R \cdot 2\sin 30^\circ \cos(\varphi - 30^\circ) = \\ &= 2R \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\sin[90^\circ + (\varphi - 30^\circ)] = 2R\sin(60^\circ + \varphi) = \overline{MC},\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Dokaz 8 *Primjenićemo metodu* ***analitičke geometrije****. Uvedimo (sl. 1) pravougli koordinatni sistem sa koordinatnim početkom u tački A, tako da je: $A(0,0), B(a,0)$,*
$C\Big(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\sqrt{3}\Big)$ i $M(x>0, y<0)$. Lako se dobija da je centar kružnice $S\Big(\frac{a}{2}, \frac{a}{6}\sqrt{3}\Big)$, a njen poluprečnik $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Jednačina kružnice glasi:

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{3}, \tag{6}$$

ili

$$x^2 + y^2 - ax - \frac{a\sqrt{3}}{3}y = 0.$$

Dokažimo da je

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-a)^2+y^2} = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2}, \tag{7}$$

odnosno $\overline{MA} + \overline{BM} = \overline{CM}$, pošto je

$$\overline{AM} = \sqrt{x^2+y^2}, \overline{BM} = \sqrt{(x-a)^2+y^2}, \overline{CM} = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2}.$$

Neka je

$$L = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-a)^2+y^2}, \text{ a } D = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2}.$$

Imamo:

$$\begin{aligned}L^2 &= x^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2 + 2\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{(x-a)^2+y^2} \\ &= 2x^2 + 2y^2 - 2ax + a^2 + 2\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2-2ax+a^2)} \\ &= 2x^2 + 2y^2 - 2ax + a^2 + 2\sqrt{(x^2+y^2)^2 - 2ax(x^2+y^2) + a^2x^2 + a^2y^2} \\ &= (x^2+y^2-ax) + a^2 + 2\sqrt{(x^2+y^2-ax)^2 + a^2y^2}.\end{aligned}$$

Iz (6) je $x^2+y^2-ax=\frac{a\sqrt{3}}{3}y$, pa je sada:

$$\begin{aligned} L^2 &= x^2+y^2-ax+\frac{a\sqrt{3}}{3}y+a^2+2\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}y}{3}\right)^2+a^2y^2} \\ &= x^2+y^2-ax+\frac{a\sqrt{3}}{3}y+a^2+2\sqrt{\frac{4}{3}a^2y^2} \\ &= x^2+y^2-ax+\frac{a\sqrt{3}}{3}y+a^2-\frac{4}{\sqrt{3}}ay \end{aligned}$$

(jer je $\sqrt{y^2}=-y$ zbog $y<0$). Dakle, konačno je:

$$L^2=x^2+y^2-ax-\sqrt{3}ay+\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2=D^2.$$

Odavde slijedi da je $L=D$ (jer su $L,D>0$), a time je dokazano (7), odnosno $\overline{MA}+\overline{BM}=\overline{MC}$.

Dokaz 9 *Poslužićemo se* ***vektorskom metodom****. Imamo (sl. 5):*

$$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{SC},$$

odnosno

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{MA}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{MS}\right|^2+\left|\overrightarrow{SA}\right|^2+2\overrightarrow{MS}\cdot\overrightarrow{SA}, \\ \left|\overrightarrow{MB}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{MS}\right|^2+\left|\overrightarrow{SB}\right|^2+2\overrightarrow{MS}\cdot\overrightarrow{SB}, \\ \left|\overrightarrow{MC}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{MS}\right|^2+\left|\overrightarrow{SC}\right|^2+2\overrightarrow{MS}\cdot\overrightarrow{SC}. \end{aligned}$$

Zbog $\left|\overrightarrow{MS}\right|=\left|\overrightarrow{SA}\right|=\left|\overrightarrow{SB}\right|=\left|\overrightarrow{SC}\right|=R$, *imamo:*

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{MA}\right|^2 &= 2R^2+2\left|\overrightarrow{MS}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SA}\right|\cos\angle(\overrightarrow{MS},\overrightarrow{SA}), \\ \left|\overrightarrow{MB}\right|^2 &= 2R^2+2\left|\overrightarrow{MS}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SB}\right|\cos\angle(\overrightarrow{MS},\overrightarrow{SB}), \\ \left|\overrightarrow{MC}\right|^2 &= 2R^2+2\left|\overrightarrow{MS}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SC}\right|\cos\angle(\overrightarrow{MS},\overrightarrow{SC}), \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{MA}\right|^2 &= 2R^2+2R^2\cos\varphi=2R^2(1+\cos\varphi)=4R^2\cos^2\frac{\varphi}{2}, \\ \left|\overrightarrow{MB}\right|^2 &= 2R^2+2R^2\cos\varepsilon=2R^2(1+\cos\varepsilon)=4R^2\cos^2\frac{\varepsilon}{2}, \\ \left|\overrightarrow{MC}\right|^2 &= 2R^2+2R^2\cos\vartheta=2R^2(1+\cos\vartheta)=4R^2\cos^2\frac{\vartheta}{2}. \end{aligned}$$

Odavde je:

$$\begin{aligned} \overline{MA} &= \left|\overrightarrow{MA}\right|=2R\cos\frac{\varphi}{2}, \\ \overline{MB} &= \left|\overrightarrow{MB}\right|=2R\cos\frac{\varepsilon}{2}, \\ \overline{MC} &= \left|\overrightarrow{MC}\right|=2R\cos\frac{\vartheta}{2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Dokazaćemo da je

$$\cos\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varepsilon}{2}=\cos\frac{\vartheta}{2}. \tag{9}$$

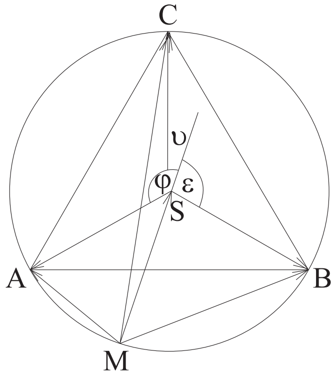
Pošto je (vidi sl. 5): $\varphi+\varepsilon=240^\circ$ *i* $\vartheta=\varphi-120^\circ$, *to sada imamo:*

$$\begin{aligned}\cos\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varepsilon}{2} &= \cos\frac{\varphi}{2}+\cos\left(120^\circ-\frac{\varphi}{2}\right)\\ &= \cos\frac{\varphi}{2}+\cos 120^\circ\cdot\cos\frac{\varphi}{2}+\sin 120^\circ\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\\ &= \cos\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+\sin 120^\circ\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\\ &= \frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+\sin 60^\circ\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\\ &= \cos 60^\circ\cdot\cos\frac{\varphi}{2}+\sin 60^\circ\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\\ &= \cos\left(\frac{\varphi}{2}-60^\circ\right)=\cos\frac{\vartheta}{2}.\end{aligned}$$

Time je dokazano (9). Iz (8) i (9) slijedi:

$$2R\cos\frac{\varphi}{2}+2R\cos\frac{\varepsilon}{2}=2R\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varepsilon}{2}\right)=2R\cos\frac{\vartheta}{2} \text{ ili } \overline{MA}+\overline{BM}=\overline{MC},$$

što je i trebalo dokazati.



sl. 5

Recimo da su u radu [3] dati dokazi 1., 2., 7., 8. i 9. ovog problema (teoreme), dok su dokazi 3., 4., 5. i 6. novi i proizvod su dužeg bavljenja autora ovog rada ovim problemom.

Na kraju ćemo reći nešto o tome koje rješenje (dokaz) je primjereno kojem uzrastu učenika. Po mišljenju autora ovog rada rješenja 1. 4. i 5. su primjerena učenicima I razreda srednje škole (gimnazije) jer se u njima koristi podudarnost trouglova. Rješenja 3. i 2. su primjerena učenicima II razreda srednje škole (gimnazije) ukoliko poznaju sličnost trouglova i Ptolemejevu teoremu za tetivni četverougao. Rješenja 6. i 7. su primjerena učenicima III razreda srednje škole (gimnazije) jer se u njima koristi kosinusna teorema za rješavanje kosouglog trougla. Rješenja 8. i 9. su primjerena učenicima III i IV razreda srednje škole (gimnazije) koji dobro znaju analitičku geometriju u ravni i vektorsku algebru.

Bilo bi dobro da neko od čitatelja ovog rada pronađe i ponudi još jedno rješenje ovog zaista interesantnog geometrijskog zadatka.

Literatura

[1] Arslanagić, Š., *Aspekti nastave matematike za nadarene učenike srednjoškolskog uzrasta*, Udruženje matematičara Bosne i Hercegovine, Sarajevo, 2001.

[2] Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[3] Arslanagić, Š., Milošević, D., *Šest rješenja jednog zadatka iz geoemtrije*, Matematičko-fizički list, Vol.33, Nr. 1/132 (1982/83).

[4] Engel, A., *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[5] Marić, A., *Planimetrija - Zbirka riješenih zadataka*, Element, Zagreb, 1996.