MAT-KOL (Banja Luka),
Matematički kolokvijum
XIV(2)(2008), 43-63

Šta je to matematika i ko su ti matematičari? [1]

Daniel A. Romano

Odsjek za matematiku i informatiku, Univerzitet u Banjoj Luci
e-mail: bato49@hotmail.com

---

[1] Tekst predavanje na naučnom skupu "Nastava i nauka na univerzitetu", Filozofski fakultet Univerziteta u Istočnom Sarajevu, Pale, 17-18 maja 2008. i 15-oj Godišnjoj skupštini Naučnoj društva matematičara Banja Luka (Oktobar 2008) u sekciji Metodika nastave matematike.

Sažetak:

Namjera nam je da u ovom izlaganju skrenemo pažnju slušaoca/čitaoca na bitne ideje koje su, po našem mišljenju, neophodne za shvatanje prirode matematike. Kroz tri grupe asocijacija izloženi su naši pogledi na probleme sa kojima se matematičati susreću u poslednje vrijeme:

1. Matematika kao društvena djelatnost. Ritualni aspekt matematike – zašto je to bitno? Složeniji matematički dokazi – da li su oni potrebni? Korištenje kompjutera u matematičkom dokazivanju. „Profesionalna" mašinska matematika protiv „familijarne" matematike čovjeka .

2. Da li je matematika (samo) jedna od nauka, ili je njeno mjesto u sistemu naučnog znanja posebno? Platon /Kant / Hilbert. Postoji li beskonačnost u prirodi? Formalisti i platonisti. Istočnik „nedostižne efektivnosti" matematike – sposobnost matematičara da dobiju maksimum zaključaka iz zadanog skupa pretpostavki.

3. Matematika i modeliranje. U čemu je razlika jednih matematičkih modela od drugih? Odgovor bi mogao biti: To su modeli koje ima smisla istraživati bez stvarne konekcije ka modeliranim objektima. Matematičari treba da se bave razvojem metoda izgradnje i istraživanja takvih modela. Lijeva i desna strana mozga i dva pogleda na matematiku.

0. Uvod

U poznatom radu Briana Davisa, profesora Londonskog kraljevskog koledža, pod naslovom „Wither mathematics?", tvrdi se da je najegzaktnija nauka od svih egzaktnih nauka na prelomu koji će principijelno promijeniti karakter dobivanja rezultata u matematici. U budućnosti, tvrdi Davis, matematika će postati još odvojenija od ostalih nauka nego što je to bila do sada.

Tokom više od dva milenijuma, smatralo se da matematika otkriva neoborivost vječnih istina. Množina značajnih matematičkih tvrdnji, kao što su, na primjer, Euklidova tvrđenja, validne su i danas kao i prije 2000 godina (unutar Euklidovog aksiomatskog sistema). Tokom tog vremena matematika je prebrodila dvije duboke krize, koje su znatno promijenile status matematičkih istraživanja, a sada se nalazi u trećoj.

Prva od njih povezana je sa Gedelovom teoremom o nepotpunosti, koja tvrdi da u proizvoljno dovoljno bogatom aksiomatskom sistemu postoje tvrdnje koje se, unutar tog aksiomatskog sistema, ne mogu ni dokazati ni oboriti. Iako ovaj teorem još uvijek nema značajan uticaj na praktični rad većeg broja matematičara, on je na neposredan način povezan sa problemom ontološkog statusa matematičkih objekata. Većina matematičara se intuitivno pridržava koncepcije poznate kao platonizam. Saglasno toj koncepciji, matematičke bitnosti i konstrukcije (slično Platonovim idejama) imaju neku objektivnu egzistenciju, na primjer kao logičke mogućnosti. Ali, u objektivno egzistirajućoj realnosti, sva svojstva morala bi biti u potpunosti jednoznačno determinisana, u što se ne može uvrstiti rezultat ovog Gedelovog teorema.

Druga velika kriza povezuje se sa počecima primjene kompjutera u matematici. Dokaz teorema o četri boje, na primjer, izveden je uz presudnu primjenu kompjutera. To kod mnogih matematičara podstiće sumnju u opravdanost povjerenja o pravilnosti dokaza dobijenih primjenom kompjuterom.

Kao poseban presedan u kulminaciji „košmara“ u matematici, može se navesti primjer poznat pod imenom 'klasifikacija konačnih prostih grupa'. Za njegovo rješavanje, formiran je, 1970. godine, konzorcij od oko stotinu matematičara. To je, u istoriji matematike, jedinstven pristup u rješavanja nekog problema. Izdvojene su tri beskonačne familije grupa, i 26 posebnih slučajeva konačnih grupa čija egzistencija (jednog broja njih) je obezbijeđena upotrebom kompjutera. Potom se pojavio problem istraživanja karaktera te klasifikacije. Prilikom pokušaja objedinjavanja rezultata raznih grupa istraživaća, pojavili su se mnogobrojni problemi. Većinu njih, matematičari su uspjeli otkloniti. Međutim, još uvijek, i poslije više od 25 godina, nije objelodanjem cjelokupan dokaz ove klasifikacije, iako se neprekidno publikuju tomovi knjiga u kojima se nalaze ti dokazi. Problem je u tome što ne postoji garancija o ispravnosti tog gigantskog dokaza.

Dakle, matematika se spotiče na problem praktično neodređene složenosti dokaza. Da li to znači - da će matematičari, ubuduće, govoriti ne o pouzdanosti znanja, nego o stepenu uvjerenosti u pouzdanost svojih rezultata. Sem toga, sada dolazi do izražaja principijelno-filozofaski problem predmeta matematike i do problema: Šta je to dokaz u matematici.

I. Matematika je društvena djelatnost

Počnimo naše razmatranje sa onim što je neosporno: posmatrajmo matematiku očima nematematičara - kao gotovo svima strano socijalno djelovanje. Šta se može (kolokvijalno govoreći) zaključiti?

(1) Postoje ljudi, od kojih većina nosi naočare, koji sebe nazivaju matematičarima.

(2) Na nekim univerzitetima djeluju katedre za matematiku, i one, između ostalog, predlažu nastavne programe iz matematike. Na tim univerzitetima se može steći matematičko obrazovanje. Na nekim od takvih univerziteta, ali ne na svim, postoje i nastavni programi kojima se produžava prethodno matematičko obrazovanje, te se, uz određene standardizovane rituale, može steći tutula doktora matematike.

(3) Ispunjavajući zahtjeve determinisanih rituala, ponekad se može desiti da osobe koje sebe nazivaju matematičarima (a ispunili su sve zahtjeve rituala iz prethodne tačke) ponekad dobiju od države finansjsku potporu za istraživanja u matematici.

(4) U svijetu se stalno dešavaju matematičke naučne konferencije, i uređuju se i publikuju matematički časopisi. Ponekad se može (uz dosta sreće i poznanstava, i naravno uz ispunjavanje određenih rituala) biti učesnik na nekim od tih naučnih konferencija, i/ili se mogu publikovati matematički članci.

Da li su ove karakteristike smislene? Zar sve druge nauke (a i psudo-nauke) nisu takođe opštedruštvene djelatnoasti! Šta je to specifično kod matematičara i matematike što ih razlikuje od drugih?

1.1. Da li je matematika društveni ritual?

1972. godine Filip Devis (Fillip J. Davis) (rođen 1923. godine) je prvi, po mišljenju znatnog broja filozofa matematike, postavio pitanje - da li su mnogi "fakti" koje matematičari smatraju "nepobitnim" stvarno takvi[2]? Zatim su Devis i Ruben Herš (Reuben Hersh) (rođen 1927. godine), razvijajući tu misao dalje, došli do zaključka da je ono čime se matematičari najviše diče „apsolutna objektivnost, tačnost i strogost matematike"- iluzija, te da je poseban društveni ritual bitna i neodvojiva komponenta matematike (teza poznata pod imenom "Devis-Heršova teza).[3] Radi ilustracije, citiraću njihovo mišljenje: "U stvarnom svijetu matematike, jedan matematički članak postiže dvije stvari: U njemu se potvrđuje da su autor i neki njegovi istomišljenici (ali najčešće - ne baš svi) - saglasni da je neki "rezultat" tačan, i prezentira dijelove nečega na čemu se ta saglasnost zasniva."

Moguće je da znatan broj ljudi smatra da matematika i nije baš takva kakvu je matematičari vole pretstavljati: ona nije "objektivna nauka" (ma šta to značilo), već, prije svega, jedan poseban elitistički društveni ritual, posredstvom kojeg grupa ljudi traži od države značajna materijalna sredstva, a od društvene zajednice traži uvažavanje. Da li Devis-Heršova teza sadrži više istine nego što matematičari to hoće priznati?

1.2. Matematika na granici mogućeg

Stvar je u tome da ritualna komponenta matematike znatno dolazi do izražaja kada treba razmotriti složene matematičke dokaze. Zar se ne može prihvatiti teza - da se matematičari, rješavajući sve složenije matematičke probleme, približavaju granicama ljudskih sposobnosti? (Za specijaliste računarskih struka, takva je situacija već nastala.)

Na primjer, kada je 23. jula 1993. godine, Endrju Vajls (Andrew John Wiles) (rođen 1953. godine), poslije sedam godina uloženog truda, objavio da ima dokaz "Velike Fermaove teoreme", ipak se ispostavilo da dokaz sadrži grešku. Poslije mnogih mjeseci očajničke borbe (prema njegovim riječima) 19.septembra 1994. godine, došao je na ideju kako da okonča dokaz. Sasvim opravdano se postavlja pitanje: Na čemu se zasniva uvjerenost matematičara da u tom, vrlo složenom dokazu, nema još grešaka?

Analogna situacija u matematici se ponavlja sve češće: nije rijedak slučaj da se publikovao pogrešan rezultat, kao što su, na primjer, Rimanova hipoteza, hipoteza prostih brojeva – blizanaca, ili neka druga pogrešna rješenja nekih znamenitih nerješenih problema. U najboljem slučaju, poslije ispravljanja grešaka nastajala je situacija kao u sljedećem slučaju. U slučaju, za sada u istoriji matematike najsloženijem matematičkom dokazu, u teoremu o klasifikaciji konačnih prostih grupa, situacija je još lošija:

"To my knowledge the main theorem of [AS] closes the last gap in the original proof, so (for the moment) the Classification Theorem can be regarded as a theorem. On the other hand, I hope I have convinced you that it is important to complete the

[2] Davis, P. J. *Fidelity in mathematical discourse: Is one and one really two?* American Mathematical Monthly*,* 79(3)(1972), 252–263.

[3] Philip J. Davis and Reuben Hersh: *Rhetoric and mathematics*. In J. S. Nelson, A. Mcgill & D. N. McCloskey (Eds.)*, The rhetoric of the human sciences.* Madison: University of Wisconsin, 1987, 53-69.

program by carefully writing out a more reliable proof in order to minimize the chance of other gaps being discovered in the future."[4]

Naravno, to ne isključuje mogućnost da, slično velikoj Fermaovoj teoremi, neki od značajnih problema na kraju ipak bude riješen. Čime se garantuje da predloženi, vrlo složeni, matematički dokazi ne sadrže greške? Ili će zaključak opet glasiti „ritualno“: značajan broj specijalista oblasti je usaglasio mišljenje da je „dokaz potpun i pravilan“?

1.3. Problem četri boje: mašinska matematika?

Trideset godina ranije, 1976, pojavio se još jedan u nizu dokaza da se „tako ne može živjeti“. Podsjetimo se teorema o četri boje:

Teorem o četri boje: *Proizvoljna geografska karta može se obojiti sa četri boje, tako da susjedne zemlje uvijek budu obojene različitim bojama.*

Kao hipoteza, ovu tvrdnju iskazao je Francis Gutri (Francis Guthrie) (1831-1899) 1852. godine, ali je matematičarima uspjelo napraviti dokaz ove tvrdnje tek 1976. godine. To su uradili Volfgang Haken i Kenet Apel (Wolfgang Haken (rođen 1928), Kennet Appel (rođen 1932)), i što je vrlo interesantno – na ranije nikad viđeni način!

Tokom četri godine, potrošili su 1200 sati (tadašnjeg) mašinskog vremena - da bi provjerili 1476 mogućnosti koje su se pojavile u postupku utvrđivanja tačnosti Teorema o četri boje. Ni jedan čovjek nije u mogućnosti da provede takvu „vruću“ analizu niti da provjeri rezultate dobijene putem kompjutera! Za proteklih 30 godina, Haken-Apelov dokaz je usavršen smanjenjem broja mogućih varijanti na 633, ali to je za čovjeka još uvijek nedostižna mogućnost.[5] 2004. godine, postignut je, do sada najbolji rezultat, uključujući kompjuterski program pregledavanja: dobijen je formalizovani dokaz, a njegova korektnost bila je provjerena i potvrđena univerzalnim programom *Coq proof checking system*.[6] No, situacija se, za nas ljude, nije bitno promjenila: dokaz Teoreme o četri boje je i dalje nedostižan. Ovdje se može postaviti pitanje: Da li je prihvatljivo da kompjuterski odgovor bude na deset metara dugačkom papiru?

Analogne situacije su:

(1) 1989. godine, Klement Lem (Clement W.H.Lam) je, sa saradnicima, koristeći super-kompjuter, završio svoj dokaz o nemogućnosti postojanja projektivne ravni reda 10;

(2) 1998. godine, Tomas Hejs (Thomas C. Hales) je završio svoj dokaz Keplerove hipotere iz 1911. godine.

Kojem od dokaza smo dužni pokloniti više povjerenja: - „rutinskim“- mašinskim dokazima, ili znatno složenim dokazima, ispisanim rukom? Gdje su

---

[4] Michael Aschbacher: *The status of the classification of the finite simple groups*. Notices of the AMS, August 2004, vol. 51, N 7, pp. 736-740

[5] Robin Thomas: *The Four Color Theorem*; Ryan Proper Mysteries of Mathematics , December 14, 1999 Final Paper

[6] Georges Gonthier: *A computer-checked proof of the Four Color Theorem*; http: //research.microsoft.com / ~ gounthier /4colproof. pdf (2004)

greške vjerovatnije? Da li Hakena i Apela treba smatrati matematičarima? Da li je Haken-Apelov rezultat „stvarna“ matematika?

1.4 Mašinska matematika protiv matematike čovjeka?

Primjenom kompjutera, granice matematičkih sposobnosti čovjeka se proširuju. Kakva je to nova matematika parcijalno dostupna čovjeku?

Doron Zeilberger (rođen 1950. godine) ovdje posmatra analogiju sa situacijom koja se može naći u vezi sa šahom. U današnje vrijeme, šahisti se mogu upoređivati samo među sobom, uopšte ne nadajući se da će pobijediti neki od najboljih šahovskih programa. Tako očekujemo da će biti i u matematici ubuduće: matematičari (koji ne budu prihvatali pomoć kompjutera) biće u mogućnosti da razvijju samo ograničenu matematiku.[7]

Prema tome, dopadalo se to matematičarima ili ne, Devis-Herschova teza naslućije neizbježno: složenost jednog broja matematičkih problema prevazilazi ljudske sposobnosti i ako u toj situaciji matematičari odustanu od upotrebe kompjutera, taj dio matematike stvarno će se transformisati u elitni društveni ritual (u najgorem smislu riječi). I, saglasno prethodnom, insistiranje na tome da se govori o matematici koju samo ljudi proizvode je, u najmanju ruku, neumjesno. Matematiku ne rade samo ljudi. Trebalo bi da se buduće generacije studenata obrazuju da se matematika može razvijati i uz pomoć kompjutera. Istaknimo ovdje da su veliku većinu sadašnjeg znanja iz kompjuterskih nauka čovječanstvu poklonili matematičari.

II. Da li je matematika standardna grana nauke?

Sada napravimo pristup sa druge strane. Pokušajmo sa izjavom da je matematika grana nauke, kao što su na primjer, fizika, hemija, biologija ili istorija. U svakoj nauci postoji određeni ritualni aspekt. Međutim, kod prirodnih i društvenih nauka protiv toga djeluje “nezavisni“ regulator – predmet izučavanja te nauke. Tzv. „nominalna“ grana nauke zanima se svojim posebnim predmetom – nekim parcijalnim dijelom okružujućeg svemira. Zato u tim naukama previše smjele fantazije obično se brzo izgube. U biologiji, na primjer, skoro da nije bilo “istraživanja” izmišljenih, nepostojećih životinja? Ili – “živih struktura” koje umjesto kiseonika koriste flor.

Da li je matematika jedna od takvih predmetno orijentisanih grana nauke? Da li matematiku možemo posmatrati kao neku posebnu društvenu djelatnost, svojstvenu samoj sebi (ortogonalnu u odnosu na “paralelne ravni ostalih nauka“)?

Do pojave neeuklidskih geometrija (1820. godine), matematiku je bilo moguće posmatrati kao „jednu od nauka“. Na primjer, prema Euklidovoj geometriji odnosili su se kao apsolutno bezgrešnoj „fizičkoj“ realnosti prostora.

Materijalisti i marksisti pokušavaju održati tu koncepciju čak i u naše vrijeme, izjavljujući da su predmet matematike prostorne forme i količinski odnosi realnog svijeta. Da bi ovo moglo da opstane, pojam količine shvatan je maksimalno široko -

[7] D.Zeilberger: Theorem for a price: *Tomorrow's semi rigorous mathematical culture*, Notices of the Amer. Math. Soc. v. 40, no. 8 (Oct. 1993) 978-981. Reprinted in the Math. Intell. v. 16, no. 4 (Fall 1994) 11-14

kao što je to radio Hegel: količina to je „savršeno“ svojstvo. Na taj način, pod tom definicijom može se podvesti ne samo geometrija i matematička analiza nego i apstraktna algebra, topologija i sve ostale matematičke strukture. Tako je determinacija Englesa - da „čista matematika, kao svoj object, uzima prostorne forme i količinske odnose realnog svijeta” - bio je materijal koji je stalno citiran. Podsjetimo se - da je, svojevremeno, Kolmogorov pisao: "...в результате как внутренних потребностей М., так и новых запросов естествознания круг количественных отношений и пространственных форм, изучаемых М., чрезвычайно расширяется; в него входят отношения, существующие между элементами произвольной группы, векторами, операторами в функциональных пространствах, всё разнообразие форм пространств любого числа измерений и т. п. При таком широком понимании терминов «количественные отношения» и “пространственные формы” приведённое в начале статьи определение М. применимо и на новом, современном этапе её развития."[8]

2.1. Matematika je ipak “ortogonalna“ grana nauke?

Po svemu sudeći, na sreću matematičara, postoji jedan broj mislilaca, koji smatra da je matematika nije nauka u uobičajenom smislu riječi.

Platon je pokušao da objasni posebnost matematike, pomoću svojih koncepcija “svijeta ideaja“ i „svijeta stvari“ (pri čemu je drugi svijet nesavršeno utjelovljenje prvog). Do rođenja čovjeka, njegova „duša“ obitava u „svijetu ideja“, a poslije toga, za vrijeme njegovog zemaljskog života, zanimajući se matematikom - čovjek se koristi sjećanjem na ono što je njegova duša naučila u „svijetu ideja“. Dakle, po Platonu, matematičari ništa ne izgrađuju, oni, „po sjećanju“ istražuju gotove strukture.

Po mišljenju znatnog broja matematičara, ova Platonova ideja je bila genijalna slutnja.

U osamnaestom vijeku, Imanuel Kant je učinio sljedeći korak u tom pravcu - predloživši svoju koncepciju sintetičkog apriornog. Kao i Platon, Kant je bio fasciniran egzaktnošću sa kojoj je Euklidova geometrija korespondirala prostoru, koji nas okružuje. U to doba nikakvu drugačiju strukturu prostora niko nije mogao ni da predpostavi. Za raliku od Platona, Kant je predložio, u cilju objašnjavanja tog fenomena, da se na Euklidovu geometriju gleda kao na apriornu formu, koju je stvorio čovječiji razum, a pomoću koje čovjek upoređuje svoja čuvstva. Na primjer, aritmetika prirodnih brojeva je „izgrađena“ na intuiciji vremena.

To je bila još jedna genijalna slutnja.

(Naravno, u ovom promišljanju iskorišteni su modeli, umjesto Platonovih i Kantovih „izvornih mišljenja“.)

Sada je prihvaćen stav da to nisu više moderne ideje. No, po mišljenju jednog broja matematičkih mislilaca, trebalo bi ove ideje pokušati razviti do kraja.

2.2. O aksiomama, teoremama i dokazima

Razmatranja u ovom segmentu počnimo sa jednom od prvih teorema iz VI vijeka prije naše ere:

Teorem *Posle svakog prostog broja nalazi se bar još jedan prost broj.*

[8] http://www.kolmogorov.pms.ru/bse-mathimatic.html

Potpuna empirijska provjera ove tvrdnje je nemoguća, jer, kao što znamo, prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo. Sasvim je opravdano postaviti pitanje: Kako su matematičari ubijedili sami sebe da je iskaz ovog teorema tačan?

Dokaz: Dokaz se izvodi korištenjem kontrapozicije: Predpostavimo da tvrdnja teorema nije tačna, tj. da prostih brojeva ima samo konačno mnogo, recimo k. Neka su to brojevi: $p_1, p_2, ..., p_k$. Tada, lako se vidi, broj $p_1p_2...p_k+1$ nije djeljiv ni sa jednim prostim brojem, a razlikuje se od svakog od njih. Prema tome, to je takođe prost broj. Dobili smo kontradikciju da prostih brojeva ima veše od k. Dakle, treba odbaciti hipotezu da prostih brojeva ima samo konačno mnogo. Q.E.D.

Zašto matematičari prihvataju prethodno kao dokaz iskaza gornje tvrdnje? Zar nas bilo koji dokaz ne dovodi do potrebe da dokažemo neko prethodno tvrđenje? Šta se nalazi na početku ovog lanca? Da bi se izbjegla dubioza vrćenja u krug i/ili u beskonačnu regresiju, dokazivanje mora odnekud početi, sa nekim tvrdnjama sa kojima su svi saglasni. Te polazne tvrdnje nazivamo aksiomama. Tako su stari Grci prešli ka ideji aksiomatizacije. To je bila genijalna ideja, ali je, nažalost, stagnirala preko 2000 godina. Potom su tu ideju, u XIX vijeku, Fridrih Gotlab Frege (Fridrich Ludwig Gottlob Frege) (1848-1925) i Čarls Pirs (Charles Sanders Pierce) (1839-1914) doveli do pojma formalizacije.

Konačno je, krajem XIX vijeka, David Hilbert (1862-1943) postavio pitanje: Da li je moguće izabrati konačan i potpun spisak aksioma iz kojeg je onda moguće, uz primjenu konačno mnogo pravila zaključivanja, dobiti sve matematičke teoreme? (Ovo pitanje je još jedna genijalna slutnja.). Ono je ravnopravno pitanju: Mogu li se pomoću aksioma determinisati osnovne matematičke stukture, kao što su skupovi, brojevi i slično? Ili, pak, te strukture postoje nezavisno, a pomoću aksioma možemo samo pokušati da ih, što je bolje moguće, opišemo?

Upravo ovdje je mjesto kada treba podsjetiti da matematičari znaju dokaz samo unutar nekog aksiomatskog sistema baziranom na nekoj unaprijed izabranoj logici sa pravilima zaključivanja, te da pouzdanost (skoro) poistovjećuju sa izvodljivošću unutar tog sistema. U sistemima oslonjenim na Klasičnu dvovalentnu logiku prihvata se postojanje direktnog i indirektnog dokaza jer je, u ovom slučaju, kontrapozicija, validna. U sistemima oslonjenim, na primjer na Intuicionističku logiku, indirektni dokaz nije prihvatljiv.

2.3. Problem postojanja matematičkih struktura

Misao o nezavisnosti postojanja matematičkih struktura, kod ljudi pojavila se relativno brzo – već pri učenju matematike u školi. Radi ilustracije izvedimo jedan test.

Posmatrajmo niz prostih brojeva - blizanaca:

$$(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71,73),$$
$$(101, 103), (107,109), (137, 139), (149, 151), (179, 181), (191, 193),$$
$$..., (1787, 1789), ..., (1871, 1873), ...,$$
$$(1931, 1933), (1949, 1951), (1997, 1999), (2027, 2029), ...$$

1849. godine Alfonso d'Polinjak (Alphonse de Polignac) (1817 – 1890) izrekao je tvrdnju da je ovaj niz beskonačan. Ta hipoteza do sada nije dokazana, niti oborena. Moguće je postaviti pitanje: Da li je tačna jedna ili druga tvrdnja?

(a) Niz prostih brojeva – blizanaca je beskonačan.

(b) Niz prostih brojeva-blizanaca prekida se na poslednjem paru.

Budući da do sada ova hipoteza nije niti oborena (tvrdnja (b)), niti dokazana (tvrdnja (a)) prirodno se postavlja pitanje: Da li postoji mogućnost da ne postoji odgovor na gore postavljena pitanja? Naravno, ovo je jeretičko pitanje, i u potpunoj je nesaglasnosti sa gotovo svuda prihvatljivim logičkim principom isključenja trećeg:

$$P \vee \neg P,$$

gdje je P bilo koja tvrdnja. Dakle, ako matematičar uvažava ovaj princip kao logički princip, onda ne može sebi postaviti pitanje o postojanju treće mogućnosti. Da bi treće pitanje dobilo legitimitet neophodno je promijeniti logiku, što je za većinu matematičara „smrtni grijeh". Ko smije postaviti pitanje o trećoj mogućnosti? Ko to pitanje nikako ne može postaviti? Kakva je sličnost i/ili razlika među njima? Na primjer, u Intuicionističkoj logici ovaj princip nije validan logički princip.

2.4. Treća mogućnost

Gedelov teorem o nepotpunosti: *Ako sistem aksioma egzaktno formuliše i pomoću njih možemo dokazati prostija svojstva cijelih brojeva, tada taj sistem nije savršen u sljedećem smislu: ili je protivrječan, ili je nedovoljan za rješavanje mnogih problema u oblasti svoje kompetencije.*

Kurt Gedel (Kurt Gödel) (1908-1978) je ovu tvrdnju dokazao još 1930. godine. Naravno, sa praktičke tačke gledišta, Gedelova teorema je samo opšte predskazanje. To se predskazanje potvrdilo, konkretno, kada je Pol Koen (Paul Joseph Cohen) (1934-2007) dokazao 1963. godine da opšte prihvaćeni sistem aksioma teorije skupova (uz predpostavku da su neprotivrječni) ne mogu riješiti problem kontinuuma. Do tog problema došao je 1878. godine Đorđ Kantor (George Philip Cantor) (1845-1918), u obliku sljedećeg pitanja: Postoje li skupovi koji sadrže više elemenata od skupa svih racuionalnih brojeva, a manje od skupa svih realnih brojeva? Kantor je sam postavio hipotezu o nepostojanju takvih skupova.

I tako, pokazalo se da opšte prihvaćeni aksiomi teorije skupova nisu dovoljno moćni da riješe problem kontinuuma. Možda je situacija sa problemom prostih brojeva – blizanaca slična: aksiomi teorije skupova nisu dovoljni za rješavanje ovog problema: unutar teorije skupova, hipotezu Polinjaka nije moguće ni dokazati ni oboriti. Zato se ovdje i pominje treća mogućnost. Predpostavimo, na trenutak, treću mogućnost. Ovdje je sasvim razumno postaviti pitanje svakom pojedinačnom matematičaru: Da li smatrate, bez obzira na gore opisana razmatranja, da "u suštini" niz prostih brojeva – blizanaca mora biti ili konačan ili beskonačan? Da li postoji mogućnost da se nešto uradi tako da naš aksiomatski sistem postane moćan za rješavanje svih matematičkih problema? Da li je to možda zato što naš aksiomatski sistem nije dovoljan da opisuje realnost nizova cijelih brojeva? A ako je to tako, kakva vrsta objekta je taj neulovljivi niz? U kom sluslu taj niz postoji?

2.5. Diofantova teorema o nepotpunosti

Druga Goedelova teorema (o neprotivrječnosti) tvrdi da ako je aritmetika, ili formalni sistem koji je uključuje, neprotivrječna, to dokaz te činjenice ne može biti dosegnuto sredstvima tog sistema. Tako, ako je sistem aksioma potpun, tada je to protivrječan sistem. Prema tome, dokaz neprotivrječnosti nepotpune teorije mora sadržavati sredstva, ideje ili metode, koji nisu sadržani unutar te teorije. I, sa tim se moramo pomiriti. Podsjetimo da je 1970. godine, ruski matematičar Juri Matijaševič (Юрий Владимирович Матиясевич)[9] (rođen 1947. godine) objelodanio - da je riješio Deseti Hilbertov problem[10].

Diofantov toerem o nepotpunosti[11] . *Možemo izgraditi Diofantovu jednačinu četvrtog stepena sa 59 varijabli, tako da:*

(a) *Ako ona ima rješenje u skupu cijelih brojeva, tada Teorija skupova sadrži kontradikciju*;

(b) *Ako ona nema rješenja u skupu cijelih brojeva, tada tu činjenicu ne možemo dokazati u Teoriji skupova.*

Podsjetimo se da drugi Goedelov teorem tvrdi da ako je formalna artimetika, ili formalni sistem koji je uključuje, neprotivrječan, to dokaz te činjenice ne može biti ostvaren sredstvima tog sistema. Tako, ako je sistem aksioma potpun, tada je on protivrječan. Dakle, ako hoćemo da radimo u neprotivrječnim teorijama, tada moramo prihvatiti da su takve teorije nepotpune.

2.6. Da li prirodni brojevi „postoje u prirodi“?

Naravno, do Njutnovog vremena, stvarno se tako moglo misliti. Vasiona je beskonačna, i zato, krečući se u jednom pravcu i brojeci korake, bićemo prinuđeni da „iskoristime“ sve prirodne brojeve. Tj. prirodni brojevi „postoje u prirodi“, i zato - na svako egzaktno formulisano pitanje o njima, moguće je dati određeni odgovor. To znači - da na pitanje o broju prostih brojeva – blizanaca, mogu postojati samo dva odgovora (niz blizanaca se mora okončati, ili se nikad ne okončava).

Međutim, savremena fizika takvu sliku više ne podržava. Saglasno sa sadašnjim opšteprihvaćenim kosmološkim modelom, u Vasioni postoji manje od 10^{1000} elementarnih čestica. Na taj način, iako nas znanja iz aritemtike provociraju da produžimo niz čestica i poslije broja 10^{1000} , u prirodi nešto takvo uopšte ne postoji. Da li ovo znači da „beskonačni rep“ cijelih brojeva je samo naša fantazija?

Kao što je poznato, starogrčki mislilac Pitagora (oko 550 godine p.n.e) izkazao je misao da „Svijetom upravljaju brojevi“. Njegovi sljedbenici, među kojima je bio i Platon, smatrali su da se harmonija Svijeta može iskazati na jeziku matematike. Pitagorjeci su razvili koncepciju o postojanju brojeva koji upravljaju Svijetom. Ako bi se baj jedan ot tih brojeva promjenio – promjenio bi se i sam Svijet.

Istaknimo ovdje da takvi brojevi, a takođe i neki drugi matematički objekti postoje realno u svijetu Više realnosti, platonističke realnosti. Jedan od primjera takvih brojeva su brzina svijetlosti (c), Plankova konstanta (ħ) i gravitaciona konstanta (G). Sa tim brojevima povezana je i konstanta egzaknosti Svijeta $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$. Ako se vrijednost bilo koje od tih konstanti promjeni, promjeniće se i Svemir.

Postoji još jedan vrlo značajan broj – zlatni presjek, definisan kao rješenje kvadratne jednačine $x^2 - x - 1 = 0$. Taj broj se često pojavljuje u u formama živućih organizama, a takođe i u Mikrosvijetu, na primjer, u matricama, koje kodiraju

---

9 http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/index.html

10 http://logic.pdmi.ras.ru/Hilbert10/stat/stat.html, ttp://www.ltn.lv/~podnieks/gt4.html

11 http://www.ltn.lv/~podnieks/gt6.html#BM6_5

kvarknu strukturu adrona u teoriji[12] 'Binarna geometrofizika' Ju.S.Vladimirova (Юрий Сергеевич Владимиров (rođen 1938. godine)). Primjeri vrlo značajnih brojeva u informacionom polju Svemira, prema mišljenju V.G.Krečeta[13] (Владимир Георгиевич Кречет (rođen 1938. godine)) su transcendentni brojevi koji se (neočekivano) pojavljuju u različitim matematičkim konstrukcijama i, prema tome, i u fizikalnim formulama. Na primjer, broj π, odnos obima kružnice prema njenom prečniku, pojavljuje se u vrlo značajnom nesvojstvenim integralima, u sumama nekih beskonačnih redova sastavljenih iz 'kombinacija' prirodnih brojeva.

Analogno, za Eulerov broj e,imamo $\mathbf{e} = \lim_{n}(1+\frac{1}{n})^n$. U skup značajnih brojeva koji igraju veliku ulogu u različitim dijelovima fizike su kompleksni brojevi: podsjetimo se Eulerove formule

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

2.7. Postoje li besknačne strukture u prirodi?

Na gornje pitanje - da li u prirodi postoje beskonačne strukture, odgovor može biti samo jedan: ne postoje! (Sasvim drugo, iako ne manje važno pitanje je - kako mi to možemo saznati?) Ovo je, u stvari, dovoljno složen problem.

Kao i ranije, naša artimetička znanja nas provociraju da zamislimo „broj“ ne samo čestica u prirodi, nego i skupova čestica , „skupova skupova“ i tome slično. Ako se od N čestica dobija skup od 2^N skupova čestica, na taj način, počevši čak i od praznog skupa čestica, možemo „dobiti“ proizvoljno veliku količinu „objekata“!

Međutim, sa fizikalne tačke gledišta, ova aktivnost mora biti okončana iz sljedećih razloga:

(а) spontanosti transformacija elementarnih čestica;

(б) konačnosti brzina svijeta;

(в) konačnosti vremena postojanja Svemira; i

tome slično.

Čini se da dosta svijetla na ovaj problem baca tvrdnja Seta Lojda (Seth Lloyd) (rođenog 1960. godine) sa MIT-a: "The Universe can have performed 10^{120} ops on 10^{90} bits (10^{120} bits including gravitational degrees of freedom)."[14]

Tako, čini se da za vrijeme postojanja Svemir ne može učiniti baš mnogo.

Kako bilo, iako je beskonačni niz prirodnih brojeva proizašao iz ljudske prakse kao apstrakcija realnih procesa svijeta, on ipak nije proizašao kao pravi odraz bilo kakve strukture relanog svijeta. I da li je zato beskonačnost tog niza samo plod ljudske fantazije?

Tako je A.N Kolmogorov (А. Н. Колмогоров) (1903-1987) pokušao da objasni kako je čovjek, iako obitavajući u konačnom svijetu, ipak došao do ideje beskonačnosti. O tome se može naći u djelu „Savremeni pogledi na prirodu

---

[12] Ю.С. Владимиров: *Геометрофизика*, Бином, Москва 2005.

[13] [7], В.Г. Кречет. *О реальном существовании математических объектов и математических структур*; Конференция Философия математики: актуальные проблемы, Москва, 15 - 16 июня 2007

[14] Seth Lloyd: *Computational capacity of the universe*; Physical Review Letters, 88(23)(2002), 237901, 4 pp

matematike", na stranicama 232-233, njegove poznate knjige „Matematika – nauka i profesija".[15]

Postoji jedan broj filozofa matematike, kao što je na primjer, V.G.Krečet, koji zastupaju mišljenje da postoje matematičke strukture same po sebi i da nisu plod ljudskog mišljenja. Kao primjere takvih struktura, on navodi mendeljbrotov skup (Benoît B. Mandelbrot (rođen 1924. godine)), determinisan u kompleksnoj ravni preslikavanjem $z \to z^2 + a$, gdje je a proizvoljan kompleksan broj. „Složenu strukturu ovog skupa sa svim dijelovima ne može da shvati ni jedan matematičar, niti ju je moguće u potpunosti obraditi kompjuterom."[16] Prema Penrouzovom mišljenju (Roger Penrose (rođen 1931. godine)) „Mendeljbrotov skup nije plod ljudske imaginacije, već on uvijek postoji u vanvremenskoj platonističkoj realnosti."[17]. Ne mali broj filozofa matematike navodi kao argumentaciju za tvrdnju o postojanju matematičkih struktura u prirodi 'visoku efektivnost matematike u fizici'. Takvih primjera je mnogo, ističu i navode da je, na primjer, specijalna teorija relativnosti u stvari geometrija prostora Minskovskog, a opšta teorija relativnosti je teorija strukture četvoro-dimenzionalnog pseudo-rimanovskog prostora te da je i sama gravitacija, u stvari, krivina tog prostora

2.8. Formalizam

Ako beskonačan niz cijelih brojeva nije "prirodna struktura", šta su onda objekti tog niza? U kom smislu onda taj niz postoji? I u kom smislu tada postoje složenije matematičke structure: realni brojevi, funkcionalni prostori, algebra, topologije, neprebrojivo beskonačni skupovi, veliki kardinali, kategorije i tome slično? One su, tim prije, takođe ne – "prirodne structure"! Jednostavniji odgovor na ova pitanja bi mogao biti: matematičke structure, same po sebi, ne postoje, postoje samo sistemi aksioma, kojima su determinisani.

(a) Aksiome stvarno postoje;

(b) Matematičari se 'dobrovoljno' zanimaju izvođenjem posljedica iz bilo kojih „interesantnih" aksioma, čak i kad im nije poznato šta te aksiome 'pokrivaju'.

Poznato je da je Lobačevski počeo upravo tako.

U filozofiji matematike takav pristup se naziva formalizam. Formalisti osporavaju pravo matematičarima da istražuju proizvoljne sisteme aksioma. Po njima, sisteme aksioma koji egzaktno 'pokrivaju' određene objekte ima smisla istraživati. Ovdje treba uputiti slušaoca/čitaoca na Podnieks'ovo upozorenje[18]: „Ne brkati ovu ozbiljnu principijelno-filozofsku opciju sa široko prihvaćenim karikaturom da je matematički formalizam besmislena igra sa simbolima. Prihvatanje te karikature je znak matematičke inferiornosti."

Razumije se, početni osnov matematičkih aksioma jeste praktično, tehničko i naučno iskustvo čovječanstva, no aksiome daju značajno više od tog iskustva: one se

---

[15] А. Н. Колмогоров: *Математика – наука и профессия*. Выпуск 64 серии "Библиотечка квант", Москва, Наука, 1988

[16] [7]

[17] Roger Penrose. The Emperor's New Mind (Prevod na Ruski jezik: Р.Пенроуз: *Нови ум краља*, Едиториал УРСС, Москва 2003.)

[18] Karlis Podnieks : *The nature of mathematics* (Talk on Sankt-Peterburg University, June 22, 2006)

ekstrapoliraju, uglađuju, idealizuju i tome slično. Kao rezultat se dobijaju „strukture“ čijih analoga u prirodi nema.

S te tačke gledišta, aksime aritmetike i/ili aksiome teorije skupova ne opisuju stvarne realne brojeve, već se njima determiniše jedan model realnih brojeva. I ako ti askiomi, moguće, nisu u mogućnosti da razrješe problem brojeva-blizanaca, to se sa tim treba pomiriti, ili postaviti sebi pitanja o mogućnostima dopunjavanja ili izmjene te grupe aksioma.

Sa aspekta formalista, Gedelov teorem o nepotpunosti aksiomatskih sistema govori o neizbježnoj dijalektici razvoja matematike – o tome da, koliko god su ti sistemi aksioma dobro izgrađeni, neizbježna je jedna od sljedećih opcija:

(a) taj aksiomatski sistem dovodi do protivrječnosti (kada se moraju usavršavati); ili
(b) taj aksiomatski sistem je nedovoljan za rješavanje mnogih problema u oblasti svoje kompetencije (kada se, oper, moraju usavršavati).

Prema tome, može se izreći mišljenje da je svaki konzervirani aksiomatski sistem nesavršen (upravo zbog svog skamenjenog karaktera), i zato se mora podvrgnuti usavršavanju.

2.9. Platonizam?

Sem rješenja koje su predlagali formalisti, problem postojanja matematičkih struktura može se pokušati riješti i na neki drugi način. Budući da (kako smo vidjeli) matematičke structure ne postoje u prirodi, ali “moraju postojati nezavisno od nas, ljudi”, to one postoje u posebnoj „trećoj realnosti“, u koji čovjećiji razum ima dostup samo pomoću intuicije. Takav pristup se, u filozofiji matematike, naziva *platonizam*. Platonisti istrajavaju na tome da su matematičari obavezni baviti se posljedicama tih jedinstvenih varijanti matematičkih struktura koje postoje u „trećoj realnosti“. S te tačke gledišta, beskonačni niz cijelih brojeva jeste „treća realnost“ po kojem Polignakova hipoteza može biti samo istinita ili samo neitinita (teće mogućnosti nema: niz parova-blizanaca se okončava, ili se ne okončava). Pri tome, Gedelov teorem o nepotpunosti pokazuje da nikakav fiksirani sistem aksioma ne može dati iscrpljujući opis beskonačnog niza cijelih brojeva.

Situacija u teoriji velikih kardinala[19], čini se, podržava tu iluziju.

Napravimo za trenutak digresiju i podsjetimo se aksiomatizacija Euklidove geometrije, geometrije Lobačevskog i Rimanove geometrije. Svaki sistem imaja 20 aksioma: $EG = [A_1, ..., A_{19}]+A_{20}$ i $GL = [A_1, ..., A_{19}]+A'_{20}$ $RG = [A_1, ..., A_{19}]+A''_{20}$ pri čemu aksiome A_{20} i A'_{20} i A''_{20} u parovima (a i sve tri) zajedno proizvode kontradikciju. Prvih devetnaest aksioma su im zajedničke. To čini tzv. ’Apsolutnu geometriju’. Razlike nastaju primjenom dvadesetog aksioma. Govoreći kolokvijalnim rječnikom, kako je moguće da nekompatiblini askiomatski sistemi opisuju istu realnost? Ako matematičar prihvata logički princip isključenja trećeg i ako prihvata bilo koji aksiomatski sistem geometrije kao nešto što ’dobro’ pokriva realnost, kako tada razumjeva, na primjer, sljedeća tvrđenja, koje bi za njega trebalo da su tačna:

$$\vdash A_{20} \vee \neg A_{20}, \quad \vdash \neg A_{20} \Rightarrow A'_{20} \vee A''_{20}.$$

[19] http://en.wikipedia.org/wiki/Large_cardinal_property

2.10. Pozitivna uloga platonizma u matematici

Platonistički odnos prema matematičkim strukturama - karakteriše veliku većinu matematičara (koji se, u pravilu, ne zanimaju o smislu svojih aktivnosti). U prvom, oni predpostavljaju da predmet njihovih istraživanja „postoji“ nezavisno od njih samih (i, uopšte, od ljudi). U drugom, oni prenose bez udubljavanja u problematiku, po analogiji, u svoju „treću realnost“ mnoga privlačna svojstva fizičke realnosti (na primjer, kao što je to slučaj sa zakonom isključenja trećeg). Čini se, po njima, da je za nas ljude - platonizam najbolji efektivni način rada sa imaginarnim strukturama. Na primjer, oni sebi predstavljaju nizove cijelih brojeva gotovo fizički – kao „put u beskonačnost“, i da su u mogućnosti po tom putu tražiti poslednji par brojeva-blizanaca, bez obzira da li taj par na tam putu postoji, ili ne. Matematičari žive godinama u svojim strukturama, kao u ličnom svijetu, a da se skoro nikad ne zapitaju o značenju tih stuktura (ako one, uopšte uzev, znače bilo šta).

Radeći na takav način, matematičari su naučili da dobijaju maksimum zaključaka iz datog broja pretpostavki. Tako, znatan broj matematičara tumači “nedostižnu efektivnost” matematike u odnosu na druge nauke.

2.11. Platonizam kao filozofija

Platonizam nije loš metod. Zapravo, kao metod, razmatrao ga je sam autor termina „matematički platonizam“, Pol Bernajs (Paul Isaac Bernays) (1888-1977)[20]. Bernajs je upozoravao da platoniostički metod treba podvrgnuti pažljivom preispitivanju:

"... It is also this transcendent character which requires us to take certain precautions in regard to each platonistic assumption."

Kako bi trebalo procjenjivati platoniastičku ideju o postojanju „treće realnosti“, kao opštefilozofske ideje? Treba li toj ideji dati bilo kakvo preimućstvo? Mogli bi, na primjer, na nasljedeći način:

1. Stoprocentni platonizam je teorijsko skupovni platonizam (vjera u jedinstvenost “originalnog svijeta skupova“), pa i u aksiom velikih kardinala**;**
2. Pedesetprocentni platonizam je platonizam u gledanju na cijele brojeve (sumnja u teoriju skupova, i vjera samo u jedinstvenost niza cijelih brojeva).

Ideju „treće realnosti“ osmislio je još Platon (njegov apsolutno savršeni „svijet ideja“). No skeptični Kant (1727-1804) ne našavši osnove za uvođenje “treće realnosti”, on je matematičke strukture pripisao „drugoj realnosti“, tj. objasnio ih je osobenostima čovjekovog razuma.

Ideja o prihvatljivosti 50% platonizma dolazi od Luisa Brauera (Luitzen Egbertus Jan Brouwer) (1881-1966)[21], koji je predložio sačuvavanje 50% kantovskog sintetičkog apriornog koji se može smatrati „svojstvima čovječijeg razuma“, ali koji se ne odnosi na čitavu matematiku, već samo na ideju niza cijelih brojeva. 50% platonisti propagiraju tu iliziju da su Kant i intuicionisti pripisali

---

[20] P. Bernays: *Sur le platonisme dans les mathematiques*; L'enseignement mathematique*,* 34 (1935), 52-69.

[21] L.E.J.Brauwer: *Intuitionism and Formalism*, Talk on the occasion of his election to the Royal Academy of Sciences in 1912.

svojstva matematičke strukture cijelih brojeva ne u „drugu realnost“ već u „treću realnost“.

Mišljenje neurofiziologa bi možda moglo biti interesantno.[22] Takvo mišljenje podržava i izrealski didaktičar matematike Ure Leron[23].

Mišljenja sam da ovdje treba istaći da konzervativizam platonista još uvijek ne prihvata mogućnost postojanja logika osim dvovalentnih logika. Proteklo je preko 40 godina od otkrića fazi skupova (i fazi logike)[24] i preko dvadeset godina of otkrića Intuicionaističke teorije fazi skupova[25] čija je logika - Intuicionistička logika. Dakle, logika sa beskonačno prebrojivo mnogo istinitisnih vrijednosti.

I na kraju ovog dijela, može se postaviti pitanje: Kako bi trebalo da se odnose prema ideji "Treće realnosti“ naši kompjuteri, koji učestvuju u razvoju matematike?

III. Matematika – to je matematičko modeliranje?

Georg E.P.Box: All models are wrong, but some are useful.[26]

Treći pokušaj pristupa matematici je zasnovan na pojmu modela. Opšte je prihvaćeno da modeliranje igra značajnu ulogu u nauci. Parafrazirajući Kanta[27], moglo bi se reći da u nekoj nauci ima onoliko nauke koliko se ona zanima modelitanjem. Neke nauke pokušavaju modelirati sam proces modeliranja (kao na primjer, filozofija). Međutim, pokazalo se da matematika komunicira sa modeliranjem na poseban način. Model – to je "object" koji se koristi umjesto drugog objekta ("originala") u cilju utvrđivanja svojstava ovog drugog i prognoziranja njegovog ponašanja.

Smatra se da je sa idejama modeliranja bio upoznat i N.I.Lobačevski (Н. И. Лобачевский) (1792-1856), kada je pokušao identifikovati realnu geometriju fizičkog prostora koristeći se astronomskim mjerenjima. Stvar je u tome što je,za razliku od Kanta, njemu bila poznata - ne jedna moguća geometrija već dvije (pri čemu ova druga sa određenim parametrom krivine). I, čini se, da je sasvim prirodno što se kod njega pojavilo pitanje: Koja od geometrija bolje opisuje fizičku realnost?

U biologiji, na primjer, model žive stanice se postepeno razvijao obuhvatajući sve više novih eksperimentalno dobijenih informacija. Da li se može, ako taj potok novih informacija bude okončan iznijeti tvrdnja da će se, odsada, istraživati taj

---

[22] Patricia S. Churchland and Paul Churchland: *Neural worlds and real worlds*. Nature Reviews Neuroscience, No. 3(11)(2002), 903-907.

[23] D.A.Romano: *Some Remarks on Uri Leron's Origin of Mathematical Thinking;* In: The 17th Annual Conference Communication Course and Conference "Communication and Education", August 29th – September 3th, 2005. Inter-University Center, Dubrovnik, Croatia, 1-10 pp.

[24] Fazi skupova u matematiku uveo je Lotfi Asker Zadeh (rođen 1921. godine) još 1965. godine.

[25] Intuicionističku teoriju fazi skupova u matematiku je uveo Krešimir Atanasov (rođen 1954. godine) još 1983. godine u svom izlaganju: *Intuitionistic fuzzy sets*; VII ITKR's Session, Sofia, 1983.

[26] Box, G. E. P: *Robustness in the strategy of scientific model building*; In: R. L. Launer, & G. N. Wilkinson (Eds.), Robustness in statistics. New York: Academic Press. 1979, 201-236

[27] Ich behaupte, dass, in jeder besonderen Naturwissenschaft, nur soviel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden kann, als darin Mathematik enthalten ist.

model takav kakav jeste (ne gledajući na to da je, možda, neprecizan), i izučavati ga sljedećih nekoliko godina? Oprezni naučnik će kazati da, od tog momenta, taj model postaje matematički model.

3.1. Razlikovna karakteristika – konzervirani karakter i samodopadnost

Mnogi će još uvijek kazati da je matematički model - model izgrađen sredstvima matematičkih struktura, pri tome misleći na brojeve, prostore, funkcije i slično. Međutim, po mišljenju znatnog broja specijalista, najtačniji razlikovni znak matematičkih modela sastoji se u tome što su modeli odvojeni od svojih "originala". Njih možemo istraživati godinama a da se pri tome nikad, ili gotovo nikad, ne upustimo u istraživanje "originala" povezujući dobijena svojstva modela sa realnim svojstvima "originala. Matematičatri su saglasni da je to glavna karakteristika matematičkih modela od ne-matematičkih modela. Na taj način, specifičnost koja pravi razliku između matematike i drugih nauka je specifičnost metoda – izgradnja i istraživanje modela koji su u potpunosti odvojeni od modeliranih objekata. "Više nego išta drugo, matematika je modeliranje."[28]. Ili, (Polinije Hamletu) možda je to i bezumlje, ali u njemu ima nekog sistema.[29] Na ovu „matematičku ekskurziju" V.Šekspira skrenuta je pažnja (matematičkoj) javnosti, u knjizi Stanislava Lema „Suma tehnologije". Matematičar može proizvoljno modifikovati svoj model, odaljiti ga od orginala po volji, pa čak i urušiti ga (tj. snadbjeti ga nekom kontradikcijom) i baviti se izučavanjem takvog modela godinama. Po mišljenju jednog broja matematičara-filozofa, u matematici su omogućena takva eksperimentisanja „po definiciji" - zbog odvojenosti modela od „originala". Drugim riječima, zbog konzervativnog i samodopadnog kataktera matematičkih modela.

3.2. Baze podataka – matematički modeli?

Baze podazaka nekog preduzeća su, bez sumnje, model tog preduzeća. Što su baze podataka potpunije, tim se one lakše mogu iskoristiti kao zamjena samog preduzeća, na primjer, za obradu statističkih podataka, ili za finansijsku kontrolu. U odgovarajućim determinisanju složenijih privrednih subjekata, matematički model odvajamo od samih privrednih subjekata, i bavimo se tim modelom samostalno. Takvu odvojenost baze podataka od "subjekta" lako modeliramo prema različitim ciljevima. Čak, možemo napraviti bazu podataka koja sa polaznim „originalom" skoro da nema ništa zajedničko. Gotovo sasvim kao u matematici. Takve baze podataka su, na primjer, podaci koji se po nečemu razlikuje od modela kretanja planeta sunčevog sistema, a koji je, kao model, opšte prihvaćen.

3.3. Formalni modeli ili matematizirani modeli?

Nevjerovatno je, ali istinito (gotovo su svi saglasni) da modeli, odvojeni od svojih „originala" (tj. konzervirani i samodopadni modeli), obrazuju važnu klasu modela. Bilo bi adekvatnije njih nazivati formalizovani modeli, a odgovarajuće baze podataka koje više odgovaraju prirodi nazivati matematički modeli. Baze podataka

[28] Morris Kline: More than anything else mathematics is a method.
[29] Though this be madness, yet there is method in't.

preduzeća, nesumnjivo, predstavljaju formalni model, ili specifičnu klasu formalnih modela. Da li istraživanje tih modela još uvijek ne spada u matematiku? No, kako bi u tom slučaju trebao nazvati nauku koja se bavi istraživanjem ne nekog posebnog formalnog modela ili klasom takvih modela već istraživanjem modela kao takvog? Na ovo piotanje odgovor je ponudio Viktor Mihajlovič Gluškov (Виктор Михайлович Глушков) (1923-1982): "Ako smatrate da matematika mora imati svijetliju budućnost, tada se, vjerovatno, treba saglasiti - da gorepomenute metode takođe spadaju u matematiku. U suprotnom, matematika ide ka konzerviranju, a umjesto nje, pojaviće se nešta novo."[30]

Zato bi se trebalo saglasiti sa konstatacijom da - konzervativnost i samodopadnost jeste autentična razlikovna karakteristika, zapravo, samo matematičkih modela. Tako, u skladu sa ovom tezom, mi se bar malo približavamo razumijevanju „ortogonalne prirode" matematike kao nauke. Matematika može izučavati proizvoljne objekte, procese, sisteme, i tome slično, bez bilo kakvih ograničenosti. Specifikum je samo metod pristupa tom izučavanju – izgradnja modela jeste smisao istraživanja, bez obraćanja ka „nekom originalu". Matematika treba da se bavi razvojem metoda izgradnje i istraživanja takvih metoda.

Sistem cijelih brojeva je model procesa računanja, a sistem realnih brojeva je model procesa mjerenja. Ove dvije strukture se najčešće koriste pri izgradnji matematičkih modela. Nije jasno zašto se „brojevno modeliranje" najčešće poistovječuje sa matematičkim modeliranjem uopšte. Već odavno nije više tako.

U informatici se uveliko koristi tzv. jezik prvog reda (i/ili neki njegove analogije) da bi se modelirala ontologija. Zato se, u informatici, sada može govoriti o ontologijama u množini.

3.4. Aspekt negacije

Odvojenost matematičkih modela od „originala" otvara mogućnost mogućim istraživanjima u nekorisnim pravcima kada se model istražuje sam po sebi, i koji se nikada neće primjenjivati za modeliranje bilo čega korisnog. Ali, smatra jedna broj matematičara, da su to ipak važna istraživanja, jer je važno saznati šta ti aspekti pojavnosti modela nude. To je u vrlo bliskoj vezi sa osnovnim principom – mogućnost odvojenosti modela od njegovog „originala" i negovo izučavanje bez komunikacije sa modelom, i, na kraju, mogućnost da se model izmijeni na takav način da on ne odgovara više nikakvom „originalu". Da li je ovo neozbiljno i/ili smiješno? No, bez ovoga nema matematike.

3.5. Zašto svi nisu saglasni?

Zašto značajan broj matematičara nije saglasan da razlikovni karakter matematičkih teorija upravo i jeste njihov konzervatizam i samodopadnost? Svjatoslav Sergejevič Lavrov (Святослав Сергеевич Лавров) (1923-2004), u pismu Karlisu Podnieksu (oktobra 1988), iznio o tome svoje mišljenje:

[30] В. М. Глушков: *Гносеологические основы математизации наук*; Препринт семинара Института кибернетики АН УССР "*Методологические вопросы кибернетики*", Киев, 1965.

„... Drugo, unutar proizvoljne teorije, njene se teoreme sastoje, u pravilu, iz dva dijela: uslova i zaključaka. Zaključci teorema su, prema tome, posljedice ne samo fiksiranih aksioma nego i nekih konkretnih uslova iskazanih u teoremu. A šta su ti uslovi ako ne proširenje fiksiranih principa sistema? Treće, proizvoljna matematička teorija je otvorena za dopunjavanje novim pojmovima. Tako, u analizi, slijedeći pojam neprekidnosti funkcije, uvode se pojamovi: tačka prekida, klasifikacija takvih tačaka, pojam funkcije neprekidan na segmentu kao i na drugim skupovima, ravnomjerna neprekidnost, Lipšicov uslov, i tome slično. Istraživanja svojstva svakog novog pojma, kao i njihovih svojstava, postepeno potiskuju u drugi plan polazni aksiomatski sistem. ...“[31]

Ovo uopšte ne protivriječi tezi o nezavisnosti neizmjenjenosti polaznog sistema principa (aksioma i pravila zaključivanja), ali sprječava percepciju matematičkih teorija kao „konzerviranih stvari“ na kojima rade 'radni' matematičari.

Rasvjetljavanje konzerviranog i samodopadnog karaktera matematičkih modela je samo prvi korak u shvatanju prirode matematike. Ali je zato, bez tog koraka, nemoguće pravilno shvatiti ni poseban položaj matematike među drugim naukama, ni kako matematika djeluje.

3.7. Dva načina gledanja na matematiku!

Kao što je poznato, postoje dva mehanizma misaonih djelatnosti čovjeka:

(a) Lijeva strana mozga je „kompjuter, koji raspolaže sposobnostima efektivnih algoritamskih djelatnosti, i koja umije dobro da djeluje u granicama zadanih pravila (a da pri tome ne postavlja pitanje „zašto“).

(b) Desna strana mozga je tvorac, sposoban prevazilaziti granice određene datim pravilima (to i jeste sposobnost sinteze i stvaranja).

Sergej Jurjevič Maslov (Сергей Юрьевич Маслов) (1939-1982) ovdje je vidio analogiju sa „nekim apsektima razvoja matematike“.[32, 33]

K. Podnieks je mišljenja da bi trebalo, bez pretjerivanja u strogosti, proširiti ovu analogiju ne samo na 'neke aspekte razvoja matematike' nego i na svu matematiku uopšte.

Dakle, u svijetu matematičkih modela, ljudi se zanimaju dvijema aktivnostima:

(a) Istraživanjem fiksiranih modela, fiksiranih matematičkih struktura ili sistemima aksioma. To 'odgovara' profilu lijeve polupopte – sposobnost ekfektivnog djelovanja u granicama zadanih pravila (bez postavljanja pitanja „zašto“);

(b) Izmjenama postojećih modela, matematičkih struktura ili skupa aksioma kao i izgradnja novih. To 'odgovara' desnoj polulopti – sposobnost prelaženja granica dopuštenog, potreba za novim.

Tako dobijamo da matematika djeluje, moglo bi se reći, u dvije dimenzije. Veći dio radnog vremena matematičari provode u smjerovima prve dimenzije - radeći u konzervativnim teorijama (nad fiksiranim matematičkim strukturama). Zapravo, ovo

---

[31] Karlis Podnieks : *The nature of mathematics* (Talk on Sankt-Peterburg University, June 22, 2006)

[32] С. Ю. Маслов. *Асимметрия познавательных механизмов и ее следствия*; Семиотика и информатика, вып. 20, АН СССР, ВИНИТИ, Москва, 1983, 3-31.

[33] С. Ю. Маслов. *Теория дедуктивных систем и ее применения*; Радио и связь, Москва, 1986.

je suština i izvor tzv. nedostižne efektivnosti matematike (kako je vide drugi) – sposobnost matematičara do dobiju maksimalan broj zaključaka iz zadanog broja predpostavki. No, s vremena na vrijeme, oni su prisiljeni i kretati duž druge dimenzije – mijenjajući svoje teorije (i strukture), ili izgrađujući nove.

A.A.Maslenikova (Масленникова А. А) je na konferenciji posvećenoj filozofiji matematike, održanoj u Moskivi u juna 2007. godine, iznijela tvrđenje[34] da Goedelove teoreme imaju neposrednu vezu sa ustrojstvom ljudskog mozga. R.Penrous je iskazao stav da ih (teoreme) možemo iskoristiti u dokazivanju principijelnih različitosti između između čovječijeg mozga i kompjutera. Njegova razmatranja su išla u pravcu da kompjuter djeluje strogo logično i nije sposoban za odlučivanje ako ono prelazi granice akiomatike, a takva tvrđenja, po Goedelu, postoje. Čovjek, pak, susretivši se sa takvim tvrđenjima, može odrediti njegovu istinitost izlaženjem iz okvira date determinisanosti.

3.8. O drugačinem pristupu

Prvo determinisanje ne iscrpljuje svu suštinu matematike. Zar matematika nije „hrpa“, na prvi pogled, nepovezanih (iako možda fiksiranih i samodopadnih) struktura? Naravno da nije! Matematika je sistem takvih struktura. Zato istraživanje zakonomjernosti tog sistema trebalo da je važna zadaća filozofije matematike. S te tačke gledišta, bi, gledajući poznati višetomni project ‘Nikole Burbakija’[35] - “Elementi matematike” to trebalo prihvatiti kao pokušaj sistematskog razmatranja drugog determinisanja matematike.

U oktobru 2004. godine Matematičko kraljevsko društvo organizovalo je dvodnevnu diskusiju na temu „Priroda matematičkog dokaza“[36], posvećenu mogućnostima izlaska iz najnovije krize. U diskusiji se pojavio širok spektar mišljenja u vezi sa tim, a ni jednom prihvatljivo rješenje. Tema razgovora je bio unutar matematike: problem odnosa među matematičarima koji se bave teorijskom i primjenjenom matematikom i onih koji se bave primjenama u računarskim oblastima matematike.

IV Zaključak

U zaključku postavimo pitanje: Kakve se još krize mogu očekivati u daljem razvoju matematike? Jedna od mogućnosti može biti u nekom zatvorenoj unutrašnjoj protivrječnosti visoke složenosti (unutar matematičkih razmatranja) o kojoj sada niko ni ne razmišlja. Možemo pokušati sebi predstaviti neke protivrječnosti kao

[34] [8] А. А. Масленникова. *Роль теорем Гёделя в основаниях математики* ; Конференция Философия математики: актуальные проблемы, Москва, 15 - 16 июня 2007

[35] Nicolas Bourbaki je speudonim za udruženje matematičara osnovano 1935. godine od strane francuskih matematičara Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Coulomb, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, Charles Ehresmann, René de Possel, Szolem Mandelbrojt, André Weil.

[36] A. Bundy, D. MacKenzie, M. Atiyah and A. MacIntyre, eds., *The nature of mathematical proof*, Proceedings of a Royal Society discussion meeting, Phil. Trans. R. Soc. A, 363(1935) (2005), 2461.

posledice nekih grešaka na novoima dubljih od sadašnje mogućnosti ljudskih poimanja i/ili koji prevazilaze mogućnosti današnjih kompjutera.

Da li će se realizovati ove prognoze, ili ne, sigurno je da će se budućnost čiste matematike bitno razlikovati od njene prošlosti. Krajem XIX vijeka gotovo svaki matematičar bio je u mogućnosti da u potpunosti 'uvidi' ispravnost svih tada postojećih teorema u dosta kratko vrijeme. 100 godina poslije, recimo 1976, poslije dokaza teorema o četri boje, o tome ne može biti ni riječi, ali pojedini matematičari još uvijek teorijski mogli razabrati šta se dešava u dokazima bilo kojeg teorema. Procjenjuje se da će situacija 100 godina poslije, recimo 2075. godine, biti znatno složnjena nego što je to sada. Mnoge oblasti čiste matematičke biće izgrađene uz korištenje teorema čiji dokaze u potpunosti neće moći shvatiti ni jedan živući matematičar toga doba – ni kao pojedinac ni kolektivnim naporima. Naravno, da će većina matematičara i dalje dokazivati teoreme tradicionalnim metodama. Moguće je, takođe, da će se, u to vrijeme, oblasti unutar matematike znatno razdvojiti i, sem toga, da će se veza između matematike i drugih nauka znanto utanjiti te da će principijelo-filozofsko pitanje o jedinstvenom predmetu matematike postati anahronizam.

Savremeni metodološki skepticizam u matematici u značajnoj mjeri oslanja se na rezultate Goedelovih teorema. No, ako ih posmatramo u pesimističkom smislu one nam govore samo o tome da mi ne raspolažemo logičkim sredstvima za dokazivanje neprotivrječnosti mnogih teorija. No, one ništa ne govore o stvarnim svojstvima matematičkih teorija. Po mišljenju jednog broja filozofa matematike, Goedelove teoreme formiraju brane na utabanim putevima formalizacije i logicizma u zasnivanjima osnova matematike, ali upšte ne stavljaju pod sumnju faktičku strogost matematike na planu neprotivrječnosti niti na mogućnost postojanja nekih drugih racionalnih puteva.

V Literatura

korištena pri pisanju ovog teksta

[1] Д.И. Алябьев. *О программе формализма и проблемах обоснования математики* ; Конференция Философия математики: актуальные проблемы, Москва, 15 - 16 июня 2007

[2] M.Balaguer: *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1998.

[3] Г.Д.Глезер и Н.Х.Резов: *8-и медународнии конгрес по математическом образованију*; The teachnig mathematics, 1(1998), 59-68.

[4] E. B. Davies, *Science in the Looking Glass*, Oxford Univ. Press, 2003.

[5] Brian Davies: *Whither Mathematics*? Notice of the AMS, 52(11)(2005), 1350-1356

[6] Morris Kline: *Mathematics and the Search for Knowledge*; Oxford University Press, 1985.

[7] В.Г. Кречет. *О реальном существовании математических объектов и математических структу*р; Конференция Философия математики: актуальные проблемы, Москва, 15 - 16 июня 2007

[8] А. А. Масленникова. *Роль теорем Гёделя в основаниях математики* ; Конференция Философия математики: актуальные проблемы, Москва, 15 - 16 июня 2007

[9] Karlis Podnieks : *The nature of mathematics* (Talk on Sankt-Peterburg University, June 22, 2006)[37]
[10] Michael D. Resnik. *Mathematics as a Science of Patterns*, Preprint 1999
[11] Daniel A.Romano: *Da li postoje perspective za nova istraživanja starih problema filozofije matematike*? Mat-Kol (Banja Luka), XIII(1)(2007), 17-29.
[12] Daniel A.Romano: *Osnove matematike, II Dio: Teorija skupova, Knjiga 2: Zermelo-Fraenkelova aksiomatska teorija skupova*; MAT-KOL (Banja Luka), posebna izdanja, broj 5(2007)
[13] Daniel A.Romano: *Matematička logika, knjiga 1*; MAT-KOL (Banja Luka), posebna izdanja, broj 7(2008)
[14] John F. Sowa, Arun K. Majumdar. *Analogical Reasoning*; In: *Conceptual Structures for Knowledge Creation and Communication*, Proceedings of ICCS 2003, LNAI 2746, Springer-Verlag, Berlin, 2003, 16-36.
[15] Thomas Tymoczko (ed.): *New Directions in the Philosophy of Mathematics*; Prinston University Press, 1986. Revised edition, 1998

Zahvaljujem se Emilu Vlajkiju, profesoru Filozofskog fakulteta Univerziteta u Istočnom Sarajevu, i Siniši Crvenkoviću, profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu, čije sam sugestije inkorporirao u ovaj tekst kao i Ani Krndija – Romano, lektoru gradske skupštine Banja Luka, na nastojanju da ovaj tekst ima što je moguće manje jezičkih nedoumica.

[37] Ovo predavanje je neznatno modifikovan tekst Karlisa Podniekisa