MAT-KOL (Banja Luka)
XIV(1)(2008), 85-89

O CARDANOOVOM METODU ZA RJEŠAVANJE NEKIH ALGEBARSKIH JEDNAČINA

ZORAN D. MITROVIĆ

Sažetak. Koristeći Cardanoov metod rješavamo jedan oblik algebarske jednačine petog stepena.

1. Uvod

Ovaj rad ima dva cilja. Prvi je da ukratko opišemo Cardanoov metod za rješavanje algebarske jednačine trećeg stepena oblika

$$x^3 + px + q = 0, p, q \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Drugi cilj je da pokažemo da se taj metod može koristiti i za neke algebarske jednačine višeg stepena. Kao primjer, uzeli smo jedan tip algebarske jednačine petog stepena,

$$x^5 + px^3 + \frac{p^2}{5}x + q = 0, p, q \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Napomenimo da je Abel dokazao da svaka algebarska jednačina stepena $n \geq 5$ u opštem slučaju nije rješiva pomoću radikala, dok je Galois dao kriterijume rješivosti algebarskih jednačina pomoću radikala.

2. Cardanoove formule

Iz

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

dobijamo

$$(a+b)^3 - 3(a+b)ab - a^3 - b^3 = 0. \tag{3}$$

Ako stavimo $x = a + b, p = -3ab, q = -a^3 - b^3$, imamo

$$x^3 + px + q = 0.$$

Iz sistema

$$a \cdot b = -\frac{p}{3} \tag{4}$$

$$a^3 + b^3 = -q. \tag{5}$$

dobijamo sistem

$$a^3 \cdot b^3 = -\frac{p^3}{27} \tag{6}$$

$$a^3 + b^3 = -q. \tag{7}$$

Sistem (6)-(7) ima rješenje, jer se svodi na kvadratnu jednačinu. Naime, a^3 i b^3 su rješenja sljedeće kvadratne jednačine,

$$u^2 + uq - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{8}$$

Rješenja jednačine (8) su

$$u_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, u_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Sistem (6)-(7) je simetričan po a i b, pa je dovoljno posmatrati

$$a^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \tag{9}$$

i

$$b^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \tag{10}$$

Označimo sa a_1, a_2, a_3 rješenja jednačine (9) i sa b_1, b_2, b_3 rješenja jednačine (10). Parovi $(a_i, b_j), i, j \in \{1, 2, 3\}$ predstavljaju rješenja sistema (6)-(7), ali nisu svi ovi parovi rješenja sistema (4)-(5) već samo oni koji ispunjavaju uslov

$$a_i \cdot b_j = -\frac{p}{3}. \tag{11}$$

Od devet mogućnosti koje smo dobili samo tri ispunjavaju uslov (11) i to su:

$$a_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, b_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$a_2 = \alpha\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, b_2 = \alpha^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$a_3 = \alpha^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, b_3 = \alpha\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

gdje je $\alpha = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

Prema tome rješenja jednačine (1) su

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$x_2 = \alpha\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \alpha^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$x_3 = \alpha^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \alpha\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

Dobijene formule se zovu Cardanoove formule .

Napomenimo da se jednačina

$$a_0y^3 + a_1y^2 + a_2y + a_3 = 0 \ (a_0 \neq 0, a_i \in \mathbb{C}, i \in \{0,1,2,3\})$$

smjenom $y = x - \dfrac{a_1}{3a_0}$ svodi na oblik jednačine (1).

3. Polinom petog stepena

Primjetimo da nam u prethodnoj sekciji školski identitet (3) daje ideju kako da uvedemo smene za p i q i tako riješimo jednačinu (1). Riješimo sada jednačinu (2) koristeći sličan postupak.

Iz

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

dobijamo

$$(a+b)^5 - 5ab(a+b)^3 + 5a^2b^2(a+b) - a^5 - b^5 = 0.$$

Ako uvedemo smjene

$$x = a+b, p = -5ab, q = -a^5 - b^5,$$

dobijamo oblik jednačine (2). Iz sistema

$$a \cdot b = -\frac{p}{5}$$

$$a^5 + b^5 = -q,$$

imamo sistem

$$a^5 \cdot b^5 = \left(\frac{p}{5}\right)^5 \tag{12}$$

$$a^5 + b^5 = = -q. \tag{13}$$

Iz sistema (12)-(13) zaključujemo da su a^5 i b^5 rješenja kvadratne jednačine

$$u^2 + qu - \left(\frac{p}{5}\right)^5 = 0. \tag{14}$$

Dakle,

$$a^5 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{5}\right)^5}, \tag{15}$$

$$b^5 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{5}\right)^5}, \tag{16}$$

označimo sa $a_i, i \in \{1, \ldots, 5\}$ rješenja jednačine (15) i sa $b_i, i \in \{1, \ldots, 5\}$ rješenja jednačine (16). Parovi $(a_i, b_j), i, j \in \{1, \ldots, 5\}$ su rješenja sistema (12)-(13). Od dvadeset i pet parova koji predstavljaju rješenja sistema (12)-(13) samo pet ispunjava uslov

$$a_i \cdot b_j = -\frac{p}{5}. \tag{17}$$

Koristeći te vrijednosti dobijamo rješenja jednačine (2) i to su:

$$x_1 = \sqrt[5]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{5}\right)^5}} + \sqrt[5]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{5}\right)^5}},$$

$$x_2 = \beta \sqrt[5]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{5}\right)^5}} + \beta^4 \sqrt[5]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{5}\right)^5}},$$

$$x_3 = \beta^2 \sqrt[5]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{5}\right)^5}} + \beta^3 \sqrt[5]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{5}\right)^5}},$$

$$x_4 = \beta^3 \sqrt[5]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{5}\right)^5}} + \beta^2 \sqrt[5]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{5}\right)^5}},$$

$$x_5 = \beta^4 \sqrt[5]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{5}\right)^5}} + \beta \sqrt[5]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{5}\right)^5}},$$

gdje je $\beta = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$. Time smo dobili rješenja jednačine (2).

Na sličan način se može riješiti i sljedeća algebarska jednačina sedmog stepena

$$x^7 + px^5 + \frac{2p^2}{7}x^3 + \frac{4p^3}{49}x + q = 0, p, q \in \mathbb{C}.$$

Napomenimo da pored Cardanoovog metoda postoji i Ferrariev metod (vidjeti npr. [1]) za rješavanje algebarske jednačine četvrtog stepena, koji bi mogao da se iskoristi za rješavanje nekih algebarskih jednačina višeg reda.

Literatura

[1] D. S. Mitrinović, D. Ž. Đoković, Polinomi i matrice, Beograd, 1986.

Autor se zahvaljuje nepoznatim recenzentima na nizu korisnih sugestija i primjedbi.

Zoran D. Mitrović, Faculty of Electrical Engineering, University of Banja Luka, 78000 Banja Luka, Patre 5
E-mail address: zmitrovic@etfbl.net