Matematički kolokvijum (Banja Luka)
XIV (1)(2008), 5-28

Полуправилни полиедри

Ратко Динић

СМШ "Јован Дучић", Теслић
Карађорђева бб

Сажетак. Уобичајени начин добијања полуправилних полиедара од правилних заснива се на пет трансформација које се према Антону Билимовићу зову: затупљивање, окресавање, тесање, одсецање и савијање. Ове трансформације нису уобичајене у излагањима геометрије, изгледају сувише компликовано, користе се само у овим случајевима, а неке од њих нису довољно прецизне. Циљ овог текста је да покаже како се полуправилни полиедри могу добити од правилних помоћу уобичајених трансформација у геометрији: транслацији и ротацији страна правилних полиедара. У конструкцији се користе: правилни додекаедар, коцка и правилни тетраедар. Из овог текста се, такође, може закључити (не баш непосредо!) да се све конструкције могу извести од коцке. Наиме, правилни додекаедар се Еуклидовом конструкцијом може добити од коцке, а правилни тетраедар од коцке посредством 14-страног 12-теменог полуправилног полиедра.

ДЕФИНИЦИЈА (полуправилних полиедара) Полиедар код кога су сви гљеви подударни, али не и правилни, а све стране правилни, али не подударни полигони зове се *једнакорогљасти полуправилни полиедар* или *полуправилни полиедар прве врсте*.

Полиедар код кога су сви рогљеви правилни, али не и међусобно подударни, а све стране међусобно подударни, али не и правилни полигони зове се *једнакострани полуправилни полиедар* или *полуправилни полиедар друге врсте*.

Око сваког полуправилног једнакорогљастог полиедра се може описа-ти сфера, а у сваки полуправилни једнакострани полиедар се може уписати сфера.

Ова тврђења се доказују за сваки полуправилни полиедар посебно.

Из дефиниције следи да су све ивице полуправилних полиедара једнаке.

Сваки једнакострани полуправилни полиедар може се добити од одговарајућег једнакорогљастог на следећи начин: У теменима једнакорогљастог полуправилног полиедра конструишу се тангентне равни $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ (n-број темена) на сферу описану око њега. Нека је α_i

тангентна раван у темену A_i и нека су $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k}$ (к = 3 или к = 4 или к = 5) суседна темена те-мену A_i и $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_k}$ редом тангентне равни у тим теменима. Тада сваке две од ових равни које садрже суседна темена у пресеку са равни α_i одређују једно теме једнакостраног полуправилног полиедра.

Подножја нормала из центра уписане сфере у једнакострани полуправилни полиедар (додирне тачке сфере и страна) су темена једнакорогљастог полуправилног полиедра.

Ова тврђења се, такође, доказују за сваки полуправилни полиедар посебно.

Једнакорогљасти полуправилни полиедри сем једнакоивичне правилне призме и једнакоивичног призматоида зову се *Архимедова тела* и могу се добити од одговарајућих правилних полиедара (Платонових тела). Уобичајена конструкција којом се добијају Архимедова тела заснива се на пет трансформација које се према Антону Билимовићу зову: *затупљивање*, *окресавање*, *тесање*, *одсецање* и *савијање*. Овом приликом наводимо ове дефиниције у нешто измењеном облику.

ДЕФИНИЦИЈА (тела остатка правилног полиедра) *Тело остатка* (остатак) правилног полиедра је тело које се добија кад се правилни полиедар пресече са једном или са више равни као скуповна разлика правилног полиедра и дела полиедра са оне стране пресечне равни који не садржи центар сфере описане око тог правилног полиедра.

ДЕФИНИЦИЈА (затупљивања) Тело остатка правилног полиедра је *затупљено* ако и само пресечне равни секу све ивице сваког од рогљева и ако те равни немају заједничких тачака на површи правилног полиедра.

ДЕФИНИЦИЈА (окресавања) Тело остатка правилног полиедра је *окресано* ако и само ако је затупљено и ако су нове пресечне равни паралене ивицама правилног полиедра и притом немају заједничких тачака на површи правилног полиедра.

ДЕФИНИЦИЈА (тесања) Тело остатка правилног полиедра је *отеасно* ако и само ако је затупљено и ако су нове пресечне равни пралелне ивицама правилног полиедра и при том имају заједничких тачака на површи полиедра.

ДЕФИНИЦИЈА(одсецања) Тело остатка правилног полиедра је *одсечено* ако и само ако пресечне равни секу све ивице сваког од рогљева и ако сваке две од ових равни које имају заједничку тачку на површи правилног полиедра, онда та тачка припада ивици.

ДЕФИНИЦИЈА (савијања) Тело остатка правилног полиедра, добијено на неки од претходних начина, је *савијено* ако и само ако стране добијене од страна правилног полиедра немају паралелних страница (ивица).

Ове трансформације нису уобичајене у излагањима геометрије, изгледају сувише компликовано, користе се само у овим случајевима и неке од њих нису довољно прецизне (савијање).

Овом приликом наводимо поступак конструкције Архимедових тела који представља општи поступак конструкције ових тела, а који се заснива на уобичајеним геометријским трансформацијама ротацији и транслацији, а изводи се само од коцке и правилног додекаедра и у једном случају од правилног тетраедра, а како се правилни додекаедар може добити Еуклидовом конструкцијом од коцке, онда се све практично изводи од коцке . Поступак конструкције састоји се у следећем: Ротирати сваку страну правилног полиедра око центра описаног круга око те стране у смеру који зависи од векторског производа вектора одређеног центром ротације и теменом правилног полиедра и вектора одређеног центром ротације и сликом тог темена(поједностављено: треба ротирати "удесно" или "улево" сваку страну гледано са спољне стране правилног полиедра). Затим извршити транслацију сваке стране у смеру вектора одређеног центром сфере описане око правилног полиедра и центром описаног круга око наведене стране. Угао ротације и дужину вектора транслације треба изабрати (израчунати) тако да се добију темена одговарајућег Архимедовог тела.

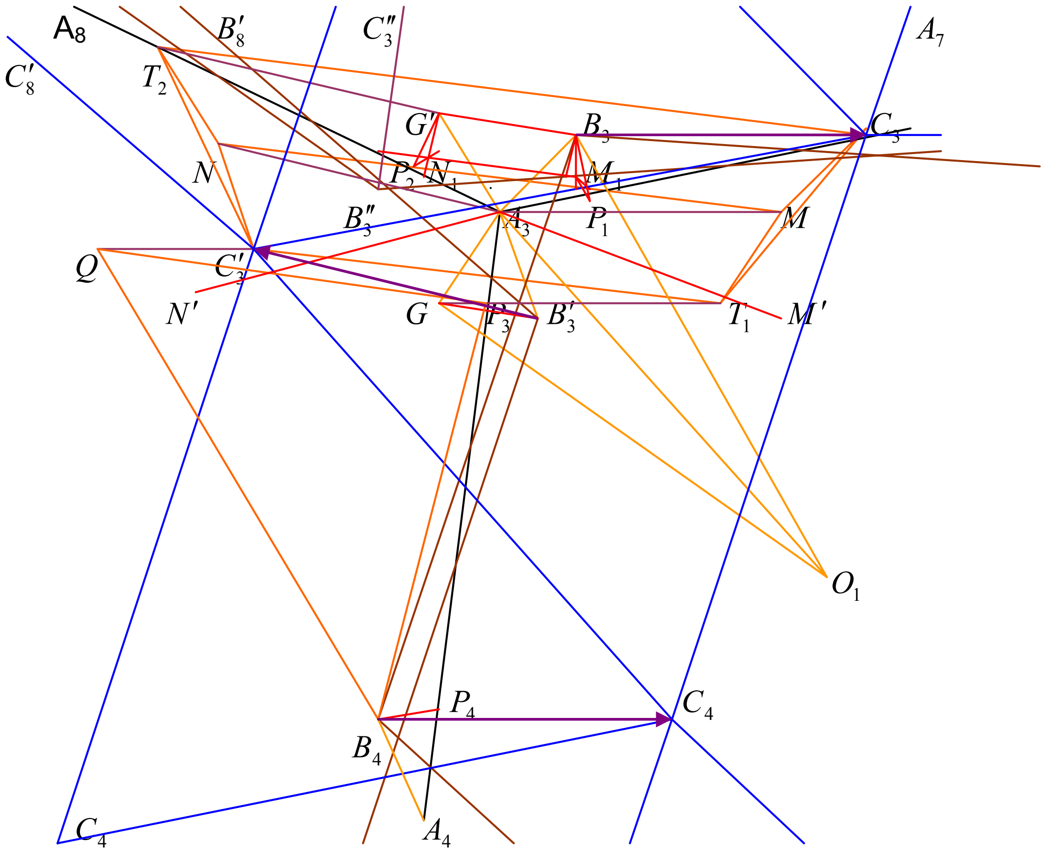
Пре објашњења конструкције треба рећи о називима ових тела која се по Антону Билимовићу изводе из поступка којим су ова тела добијена, а која се нешто разликују од назива који се налазе у страној литератури, а која потичу од Архимеда (Папуса). С обзиром на поступак који наводимо, ова имена не би била одговарајућа, па ће имена бити изведена на основу броја страна и темена полуправилног полиедра, а ако то није дово-љно употребљаваће се и ознака многоугла главне стране полуправилног полиедра.

Главна страна полуправилног полиедра је она која се добија ротацијом и транслацијом полигона стране правилног полиедра од којег се добија полуправилни полиедар. Све остале стране полуправилног полиедра су изведене.

Објаснићемо извођење поступка конструције 92-страног 60-теменог полуправилног полиедра или затупљеног, окресаног и савијеног додекае-дра или snub dodecahedron-a. Поступак представља извођење система једначина чија решења предствљају вредности угла ротације и дужину вектора транслације. Уз одређене варијације овог система, као и уз одговарајућу дискусију могу да се добију вредности ових параметара за сваки полуправилни полиедар који се добија од правилног додекаедра. Уз одређене измене у овом систему, а узимајући у обзир елементе коцке, може се добити систем из којег се одговарајућим поступцима добијају сви полуправилни полиедри који за полазну основу имају коцку. Међутим, овај поступак је једноставније извести независно. Тај поступак ће, такође, бити објашњен.

1. 92-СТРАНИ 60-ТЕМЕНИ ПП ПОЛИЕДАР (ОКРЕСАНИ ЗАТУПЉЕНИ И САВИЈЕНИ ДОДЕКАЕДАР) (SNUB DODECAHEDRON)

За поступак извођења овог система код 92-страног 60-теменог полуправилног полиедра идеја се састоји у следећем: Угао ротације и дужину вектора транслације треба изабрати тако да слике суседних страна додекаедра имају темена од којих два суседна једне стране и једно теме друге стране одређују једнакостранични троугао.



сл. 1.
(слика за извођење конструкције 92-страног 60-теменог ПП полиедра)

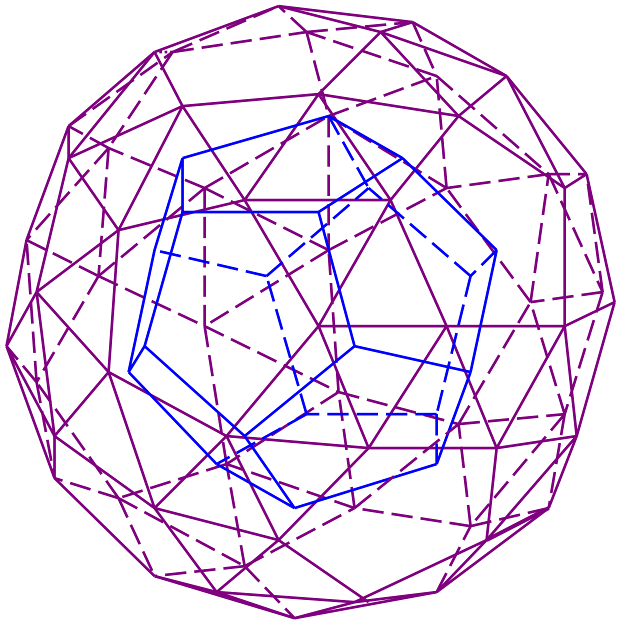
Тачке B_3, B_3' и B_3'' би требало добити ротацијом темена A_3 правилног додекаедра за угао α који треба одредити под наведеним условом. Тачке C_3, C_3' и C_3'' требало би добити транслацијом тачака B_3, B_3' и B_3'' редом за вектор чију дужину треба одредити под наведеним условом. Тачке G и G' су добијене на исти начин као и тачке B_3, B_3' и B_3'', само ротацијом у равни одговарајуће стране у супротном смеру ("улево"). Тачке T_1 и T_2 су добијене транслацијом тачака G и G'. Тада је четвороугао $T_1C_3T_2C_3'$ једнакокраки трапез чија је дуж C_3C_3' дијагонала, а чија би дужина требала би-ти једнака дужини ивице правилног додекаедра. Одређивање мера страни-ца и углова овог трапеза је дуго и компиковано, па тај поступак овом при-ликом не наводимо. Проведеним поступком се добија једначина:

$$d^2 + a\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(36^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\sin\left(36 - \frac{\alpha}{2}\right)\right)d +$$
$$+ a^2\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}\left(\sin^2\alpha - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\left(72^\circ - \alpha\right)\right) + \qquad (1)$$
$$+ a^2\cdot\frac{5+3\sqrt{5}}{5}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\left(36^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{5+\sqrt{5}}{8}\cdot a^2 = 0$$

Нека су тачке B_4 и C_4 добијене на исти начин и нека је тачка Q подно-жје нормале из тачке C_3' на раван стране $A_2A_3A_4A_5A_1$ правилног додекаедра. Тада је четвороугао $C_3'QB_4C_4$ правоугли трапез чији је већи крак дуж $C_3'C_4$, која би требало да је једнака ивици правилног додекаедра. Одређи-вање мера страница и углова овог трапеза је, такође, дуготрајно и компли-ковано, па и ово извођење не наводимо. Проведеним поступком добија се једначина:

$$d^2 - 2\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(36^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)ad +$$
$$+\frac{4\left(5+2\sqrt{5}\right)}{5}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\left(36^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)a^2 - \qquad (2)$$
$$-\left(5+\sqrt{5}\right)\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(36^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\left(1 - 2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(36^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\right)a^2 = 0$$

Решење система (1)-(2) $\alpha = 13{,}106403377^\circ, d = 0{,}86739958287a$ је решење конструкције. Ово приближно решење је добијено методом бисекције.



сл. 2.
(92-страни 60-темени ПП полиедар)

Да бисмо објаснили поступак варијације једначина система (1)-(2) тј. варијације параметара у једначини,биће погодно посматрати неке једначи-не које су изведене у претходном делу, а које се заснивају на изнетој иде-ји, и које су еквивалентне једначинама система.
Једначина (1) је еквивалентна једначини:

$$t^2+2a\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\cos\left(36^0-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\left(36^0-\frac{\alpha}{2}\right)\right)\cdot t+ \qquad (1')$$
$$a^2\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{10}\sin^2\alpha=\frac{1}{4}a_x^2$$

где је $t=d\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}-a\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{5}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(36^0-\frac{\alpha}{2}\right)$, док a_x представља једну од вредности:

$$0,a_5=a,a_{10}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}},a\sqrt{2},a\sqrt{3}\,.$$

Једначина (2) еквивалентна је једначини: $a_1^2+(d-n)^2=b_x^2$ (2'), где је:

$$a_1^2 = (a - 2x_1)^2 + x_2^2 + \frac{1}{5}(2d - x_2)^2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}(2d - x_2)x_2,$$

$$x_1 = x\cos\left(36^0 - \frac{\alpha}{2}\right), x_2 = x\sin\left(36^0 - \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$x = 2a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\sin\frac{\alpha}{2}, n = \frac{\sqrt{5}}{5}(2x_2 + d),\ \text{односно:}$$

$$\left(d - a(\sqrt{5}+1)\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(36^0 - \frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 -$$

$$-a(5+\sqrt{5})\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(36^0 - \frac{\alpha}{2}\right)\cdot \qquad (2'')$$

$$\cdot\left(a - 2a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(36^0 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{5+\sqrt{5}}{8}\left(b_x^2 - a^2\right)$$

2. 62-СТРАНИ 60-ТЕМЕНИ ПП ПОЛИЕДАР (ОТЕСАНИ И ЗАТУПЉЕНИ ДОДЕКАЕДАР) ИЛИ SMALL RHOMBICOSIDODECAHEDRON

Овом приликом објаснићемо одређивање вредности параметара за конструкцију 62-страног 60-теменог ПП полиедра (сл 3.).

Ако је $\alpha = 0$, $a_x = a$ за једначину (1'), а за једначину (2') $b_x = a\sqrt{2}$, добија се $t = \frac{1}{2}a$ тј. $d\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} = \frac{1}{2}a \Rightarrow d = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{10}{5-\sqrt{5}}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

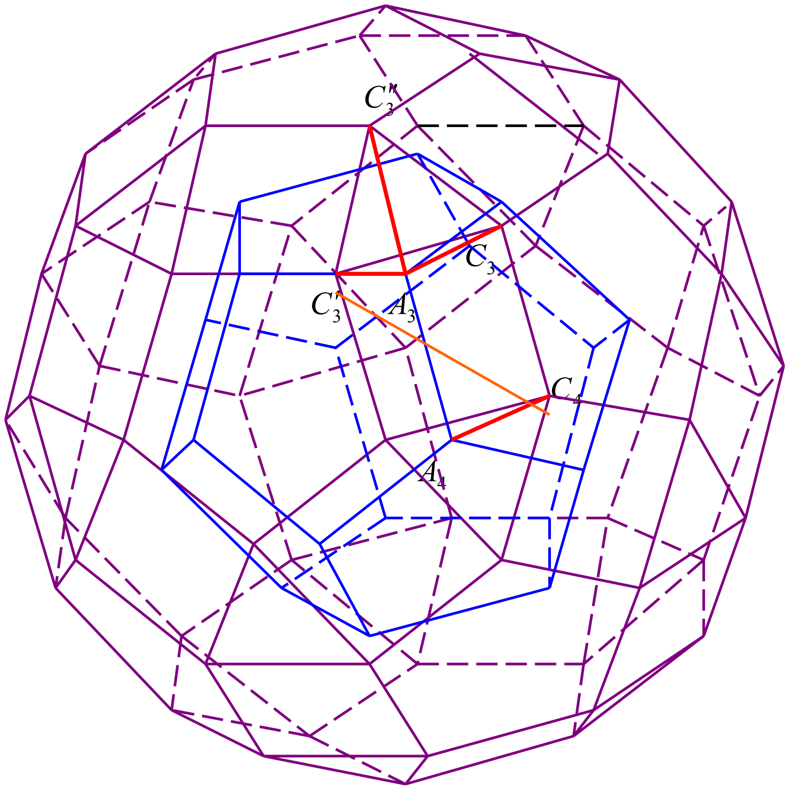
За $\alpha = 0, a_x = a\sqrt{2}$ из једначине (2') се добија: $x = 0, x_1 = 0, x_2 = 0$, па је $a_1^2 = a^2 + \frac{4}{5}d^2$, $n = \frac{\sqrt{5}}{5}d$ из чега следи:

$$a^2 + \frac{4}{5}d^2 + \left(d - \frac{\sqrt{5}}{5}d\right)^2 = 2a^2 \Rightarrow \frac{4}{5}d^2 + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{5}\right)^2 d^2 = a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4}{5} + \frac{30-10\sqrt{5}}{25}\right)d^2 = a^2 \Rightarrow \left(\frac{10-2\sqrt{5}}{5}\right)d^2 = a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{\frac{5}{2(5-\sqrt{5})}} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{5(5+\sqrt{5})}{2\cdot 20}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.$$

Дакле, из обе "поправљене" једначине добије се иста вредност за d .



сл. 3.
(62-страни 60-темени ПП полиедар)

До истог резултата се долази и директном геометријском интерпретаци-јом. Наиме, како се у овом случају врши само транслација страна, то се те-ме A_3, трансформише у темена C_3 ,C'_3 и C''_3 , и важи $A_3C_3=A_3C'_3=A_3C''_3=d$. Сваке две од ових дужи заклапају угао једнак оштром углу φ који заклапа-ју стране правилног додекаедра, па је троугао $A_3C_3C''_3$ једнакокраки, а по услову конструкције дуж $C_3C''_3$ мора бити једнака a , па је онда:

$$d\cdot\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{a}{2}\Rightarrow d=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{10}{5-\sqrt{5}}}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}},$$

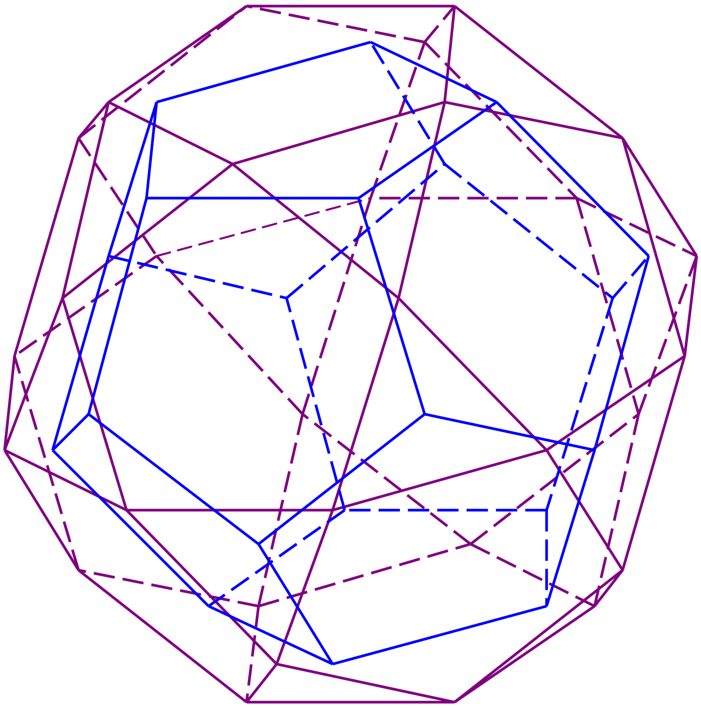
а тада је и $C_4C'_3=a\sqrt{2}$.

Остале дискусије система (1)-(2) су знатно компликованије, па их овом приликом не наводимо. Наводимо само вредности параметара по-требних за конструкцију.

3. 32-СТРАНИ 30-ТЕМЕНИ ПП ПОЛИЕДАР (ОДСЕЧЕНИ ДОДЕКАЕДАР) (ICOSIDODECAHEDRON)

Ако је $\alpha = 36^0$, $a_x = a$ за једначину (1'), а за једначину (2') $b_x = 0$, добија се :

$$d = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \approx 0{,}26286555606a \text{. (сл 4.)}$$

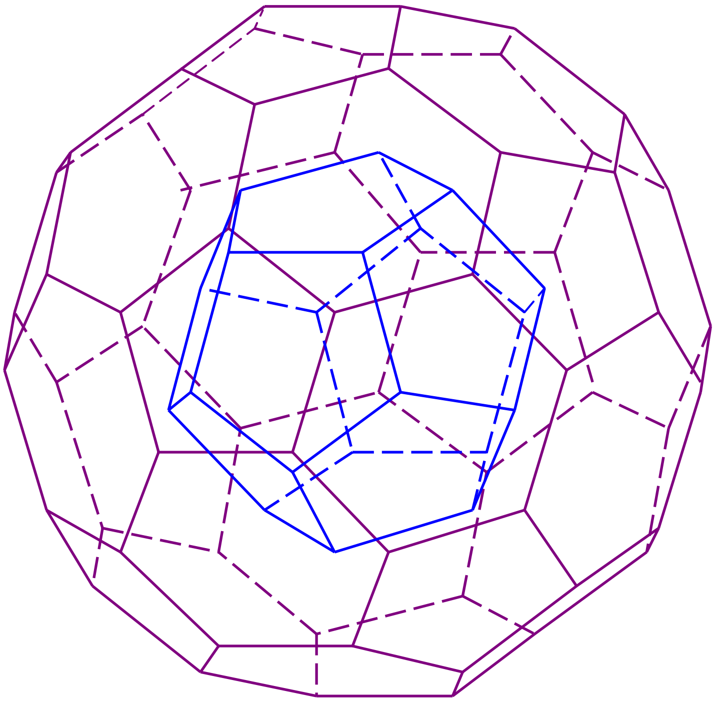


сл. 4.
(32-страни 30-темени ПП полиедар)

4. 5-УГЛИ 32-СТРАНИ 60-ТЕМЕНИ ПП ПОЛИЕДАР (ЗАТУПЉЕНИ ИКОСАЕДАР) (TRUNCATED ICOSAHEDRON) (YCOCEDRON ABSCISUS SOLIDUS)

Ако је $\alpha = 36^0$, $a_x = a\sqrt{3}$ за једначину (1'), а за једначину (2') $b_x = a$, добије се:

$$d = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+2\sqrt{5}}{5}} \approx 1{,}213922072a \text{ . (сл. 5.)}$$

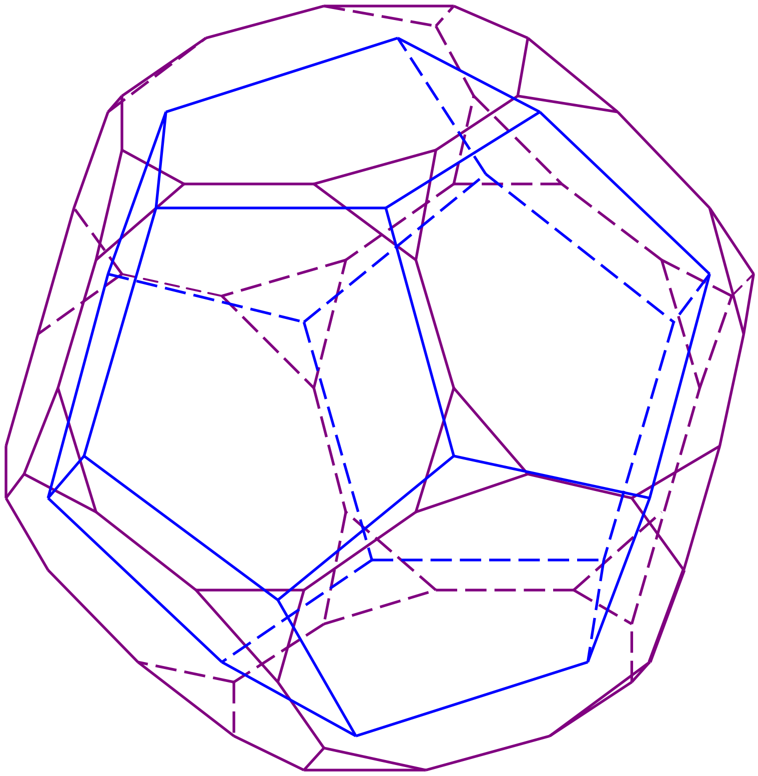


сл. 5.
(5-угли 32-страни 60-темени ПП полиедар)

5. 10-УГЛИ 32-СТРАНИ 60-ТЕМЕНИ ПП ПОЛИЕДАР (ЗАТУПЉЕНИ ДОДЕКАЕДАР) (TRUNCATED DODECAHEDRON)

Ако је $\alpha = 18^0$, $a_x = a\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ за једначину (1') и $b_x = a_x$ за једначину (2') добије се:

$$d = \frac{1}{20}\left(5\left(3+\sqrt{5}\right) - \sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)}\right) \approx 0{,}19550063 \text{ . (сл. 6.)}$$

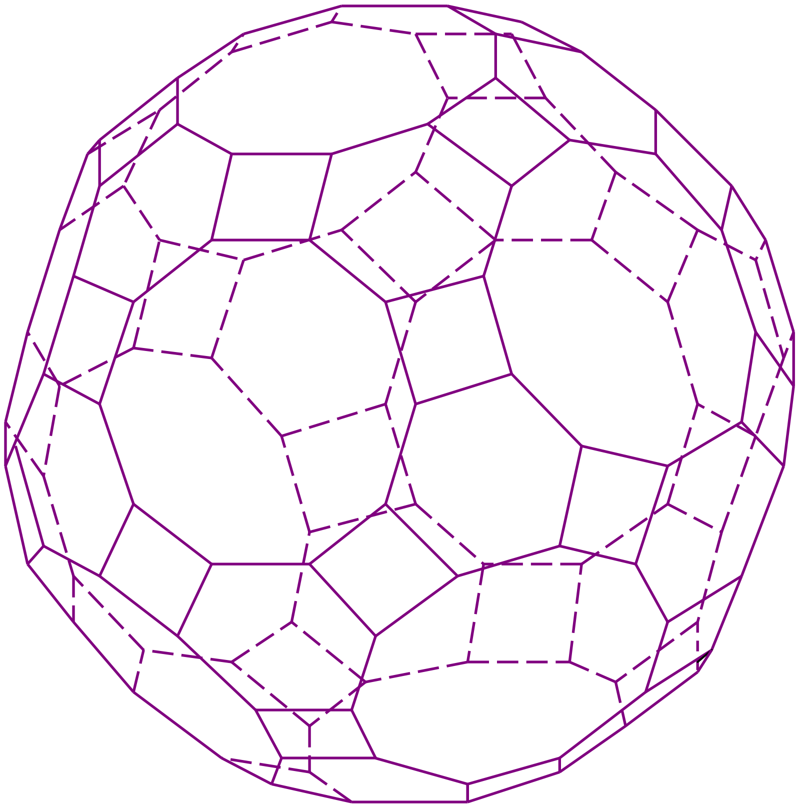


сл. 6.
(10-угли 32-страни 60-темени ПП полиедар)

6. 62-СТРАНИ 120-ТЕМЕНИ ПП ПОЛИЕДАР (ОКРЕСАНИ И ЗАТУПЉЕНИ ДОДЕКАЕДАР) (GREAT ROMBICOSIDODECAHEDRON)

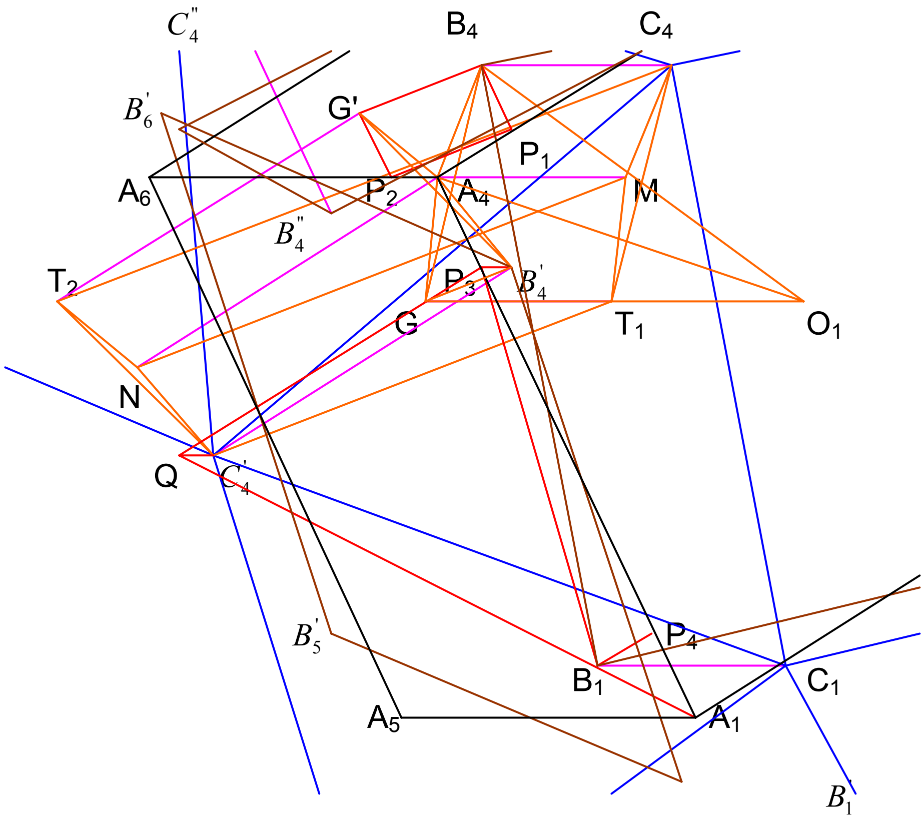
Ако је $\alpha = 18^0$, $a_x = a\sqrt{\dfrac{3(5-\sqrt{5})}{10}}$ за једначину (1') и $b_x = a\sqrt{\dfrac{2\left(5-\sqrt{5}\right)}{10}}$ за једначину (2') добије се:

$$d = \frac{1}{20}\left(5\left(5+\sqrt{5}\right) - \sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)}\right) \approx 0{,}69550063\ .\ (\text{сл. } 7.)$$



сл.7.
(62-страни 120-темени ПП полиедар)

Поступак извођења система једначина чија су решења вредности параметара α и d, а које су потребне за констукцију полуправилних полиедара који се добијају од коцке, је сличан са проведеним поступком код 92-страног 60-теменог ПП полиедра, само је нешто једноставнији. Упоређу-јући слике 1. и 8. примећује се да су теме A_3 правилног додекаедра и теме A_4 коцке одговарајућа темена. Остале значајне тачке за кострукцију су исто обележене. Дуж $G'B_4$ се једноставније одређује, јер је због нормално-сти страна коцке, ова дуж је једнака дужи P_1P_2. Такође се и дуж C'_4Q једноставније одређује, јер је, опет, на основу нормалности страна коцке, једнака дужи $P_3B'_4$.



сл 8.
(слика за извођење конструкције 38-страног 24-теменог ПП полиедра)

На основу проведеног поступка код 38-страног 24-теменог ПП полиедра добија се систем једначина:

$$\left(d+a\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2-a\sin\alpha\left(d+a\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)\right)+ +a^2\sin^2\alpha=\frac{1}{2}a^2 \qquad (1_1)$$

$$d^2-2a\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot d-2a^2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)+ +2a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)=0 \qquad (2_1)$$

У једначини(1_1) у општем случају би на десној страни требало да стоји $\frac{1}{2}a_x^2$, а у једначини (2_1) $\frac{1}{2}\left(b_x^2-a^2\right)$.

Једначине система се, релативно лако, могу решити по непознатој d и узимајући $a=1$, што у овом случају не представља ограничење, добија се систем:

$$d=-\sin^2\frac{\alpha}{2}\pm\frac{\sqrt{2-3\sin^2\alpha}}{2}\wedge d=-\sin^2\frac{\alpha}{2}+\frac{\sin\alpha}{2}\pm\sqrt{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\quad (1'_1)\text{-}(2'_1)$$

Елиминацијом непознате d из једначина и сређивањем добијене тригонометријске једначине, добија се једначина:

$$4\sin\alpha\cdot\cos^3\alpha=1\qquad(3)$$

Увођењем смене $t=tg\alpha$ и сређивањем, добије се алгебарска једначина четвртог степена: $t^4+2t^2-4t+1=0$ (3'). Ова се једначина може трансформисати: $(t-1)(t^3+t^2+3t-1)=0\Leftrightarrow t-1=0\vee t^3+t^2+3t-1=0$. Из ове ди-сјункције следи: $t=1\Rightarrow\alpha=45^0$ или једначина: $t^3+t^2+3t-1=0$ која се може решити Кардановом формулом. Ако се за $\sqrt[3]{1}$ узме 1, добије се прво решење ове једначине које је реалан број:

$t=\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{2\left(13+\sqrt{297}\right)}+\sqrt[3]{13-\sqrt{297}}-1\right)$. Остала два решења су комплексни бројеви, па немају значаја за решавање конструкције. Тада је: $\alpha=arctg\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{2\left(13+\sqrt{297}\right)}+\sqrt[3]{13-\sqrt{297}}-1\right)$

Приближно израчунавање даје $\alpha\approx16{,}4675604^0\approx16^0 28'3{,}2''$.

Једначина (3) није еквивалентана са ирационалном једначином која је добијена елиминацијом непознате d, па њена решења не морају бити и компонента решења система $(1'_1)$-$(2'_1)$. Варијацијом једначина овог систе-ма и дискусијом следе следећи закључци:

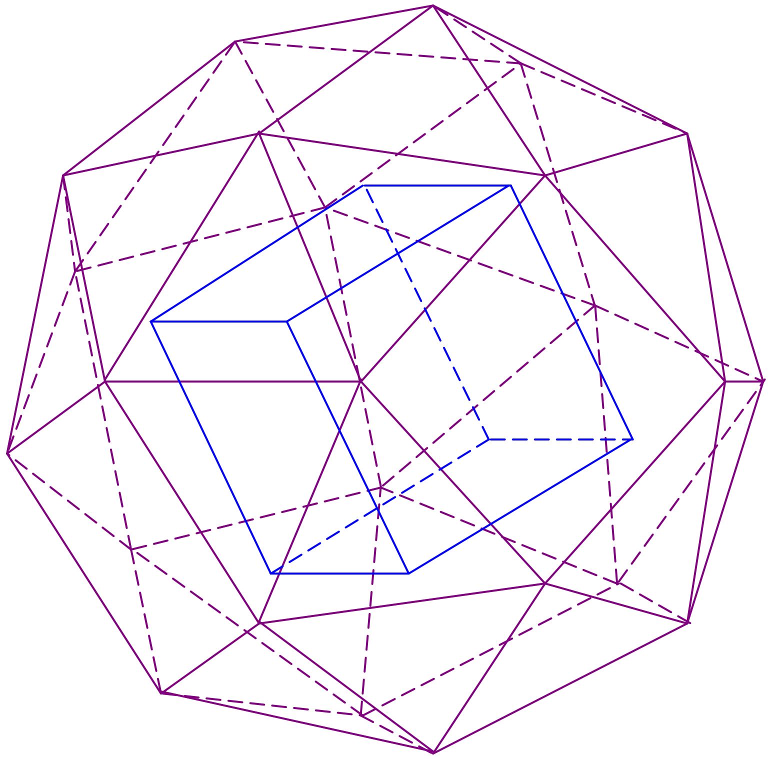
7. 38-СТРАНИ 24-ТЕМЕНИ ПП ПОЛИЕДАР (ЗАТУПЉЕНИ ОКРЕСАНИ И САВИЈЕНИ ХЕКСАЕДАР) (SNUB CUBE)

Ако је $\alpha=16{,}4675604^0$ и

$$d_1=(-\sin^2\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2-3\sin^2\alpha}}{2})a\approx0{,}64261350893a \text{ и}$$

$$d_2=(-\sin^2\frac{\alpha}{2}+\frac{\sin\alpha}{2}\pm\sqrt{\sin\alpha\cdot\cos\alpha})a\approx0{,}64261350893a.$$

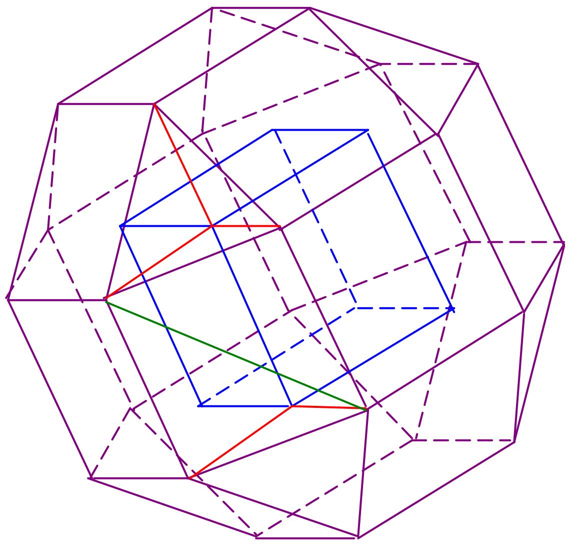
Како је $d_1=d_2$, то су онда ове вредности за d и α решење конструкције 38-страног 24-те-меног ПП полиедра. (сл. 9).



сл. 9.
(38-страни 24-темени ПП полиедар)

8. 26-СТРАНИ 24-ТЕМЕНИ ПП ПОЛИЕДАР (ОТЕСАНИ И ЗАТУПЉЕНИ ХЕКСАЕДАР) (SMALL RHOMBICUBOCTAHEDRON)

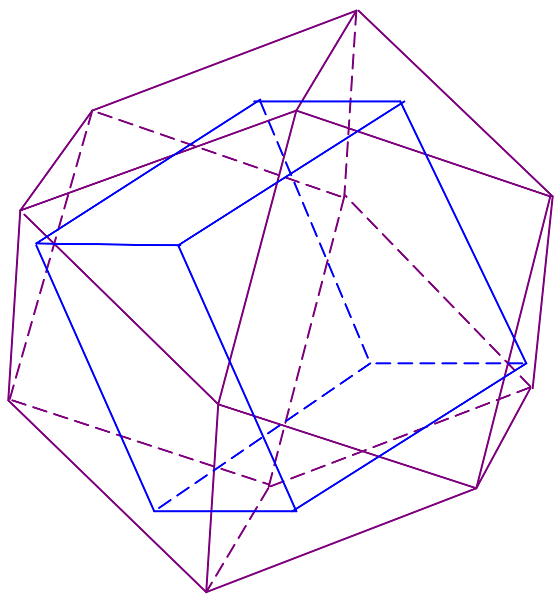
Ако је $\alpha = 0$, $a_x = a$ за једначину (1_1) и $\alpha = 0, b_x = a\sqrt{2}$, за једначину (2_1), тада је $d = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, па ове вредности за d и α представљају решење конструкције 26-страног 24-теменог ПП полиедра (сл. 10).



сл. 10.
(26-страни 24-темени ПП полиедар)

9. 14-СТРАНИ 12-ТЕМЕНИ ПП ПОЛИЕДАР (ОДСЕЧЕНИ ХЕКСАЕДАР)(CUBOCTAHEDRON)

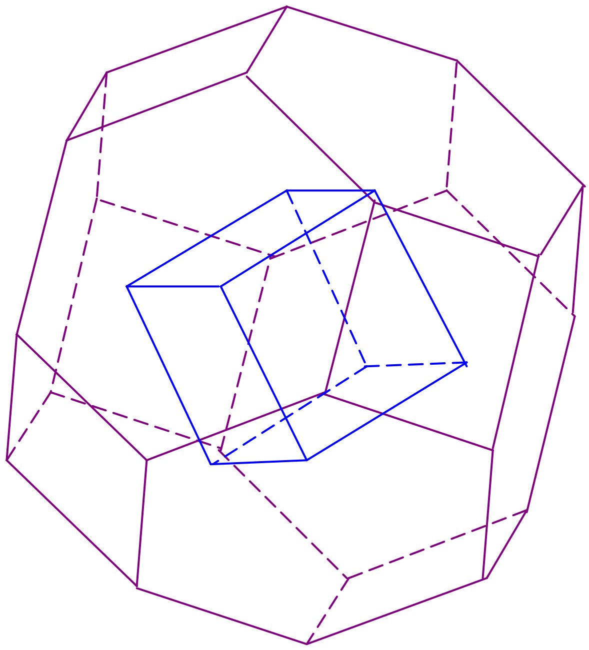
Ако је $\alpha = 45^0, a_x = a$ за једначину (1_1) и $\alpha = 45^0, b_x = 0$ за једначину (2_1), тада је $d = \frac{\sqrt{2}-1}{2}a$, па ове вредности за d и α представљају решење конструкције 14-страног 12-теменог ПП полиедра. (сл. 11.)



сл. 11.
(14-страни 12-темени ПП полиедар)

10. 4-УГЛИ 14-СТРАНИ 24-ТЕМЕНИ ПП ПОЛИЕДАР (ЗАТУПЉЕНИ ОКТАЕДАР) (TRUNCATED OCTAHEDRON)

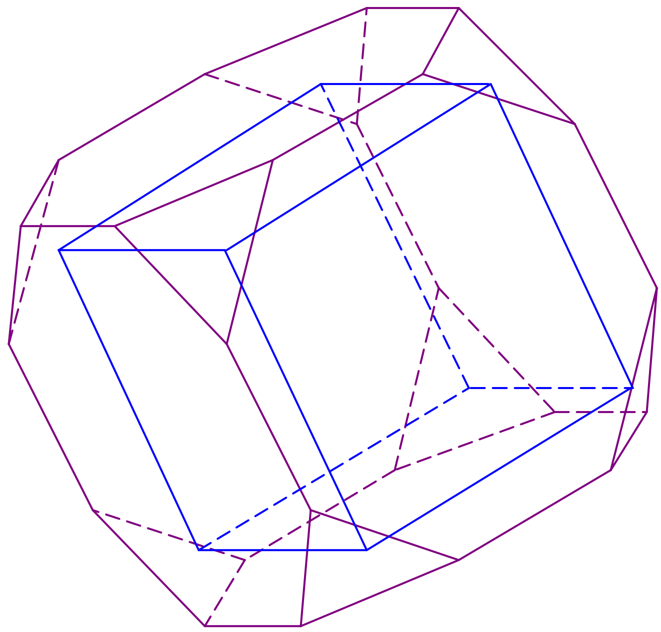
Ако је $\alpha = 45^0, a_x = a\sqrt{3}$ за једначину (1_1) и $\alpha = 45^0, b_x = a$ за једначину (2_1), тада је $d = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)a$, па ове вредности за α и d представљају реше-ње конструкције 4-углог 14-страног 12-теменог ПП полиедра. (сл.12)



сл.12.
(4-угли 14-страни 24-темени ПП полиедар)

11. 8-УГЛИ 14-СТРАНИ 24-ТЕМЕНИ ПП ПОЛИЕДАР (ЗАТУПЉЕНИ ХЕКСАЕДАР) (TRUNCATED CUBE)

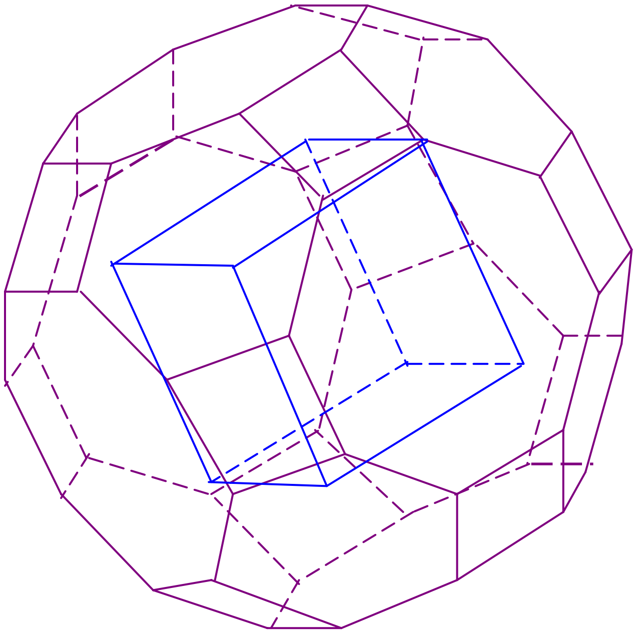
Ако је $\alpha = 22^0 30', a_x = b_x = a\sqrt{2}\sin 22^0 30' = a\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$ за обе једначине система (1_1)-(2_1), тада је $d = a\left(\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4} - \frac{1}{2}\right)$, па су ове вредности за d и α решење конструкције 8-углог 14-страног ПП полиедра (сл.13).



сл.13.
(8-угли 14-страни 24-темени ПП полиедар)

12. 26-СТРАНИ 48-ТЕМЕНИ ПП ПОЛИЕДАР (ЗАТУПЉЕНИ И ОКРЕСАНИ ХЕКСАЕДАР) (GREAT RHOMBICUBOCTAHEDRON)

Ако је $\alpha = 22^0 30', a_x = a\sqrt{\frac{3(2-\sqrt{2})}{2}}$ за једначину (1_1) и $b_x = a\sqrt{2-\sqrt{2}}$ за једначину (2_1), тада је $d = a\left(\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - \frac{1}{2}\right)$, па су ове вредности за d и α решење конструкције 26-страног 48-теменог ПП полиедра. (сл. 14.)



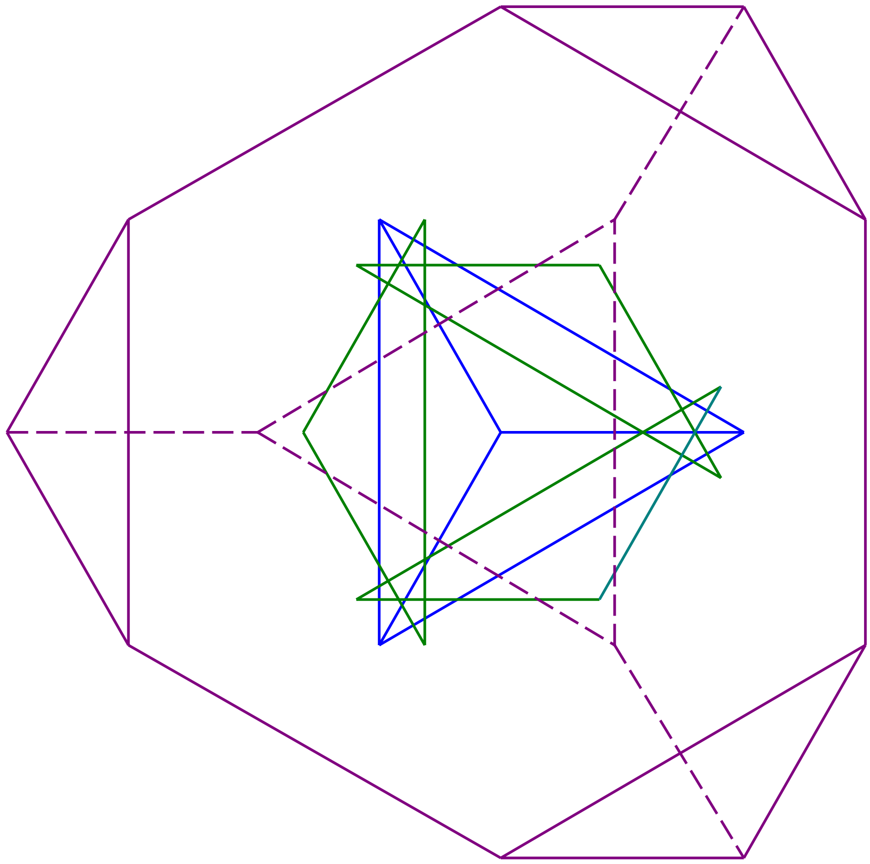
сл.14.
(26-страни 48-темени ПП полиедар)

13. 8-СТРАНИ 12-ТЕМЕНИ ПП ПОЛИЕДАР (ЗАТУПЉЕНИ ТЕТРАЕДАР) (TRUNCATED TETRAHEDRON)

8-страни 12-темени ПП полиедар се добија од правилног тетраедра, па су за извођење његове конструкције неопходни неки значајнији елеме-нти правилног тетраедра. Ако је a ивица правилног тетраедра,онда је ње-гова висина $H = a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, полупречник описане сфере $R_0 = \frac{a\sqrt{6}}{4}$, по-лупречник уписане сфере $R_U = \frac{a\sqrt{6}}{12}$. За угао φ диедра који одређују стра-не тетраедра $\left(\varphi \approx 70{,}52877937^0 \approx 70^0 31' 43{,}6''\right)$ важи:

$$tg\varphi = 2\sqrt{2}, \cos\varphi = \frac{1}{3}, \sin\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{2}, tg\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

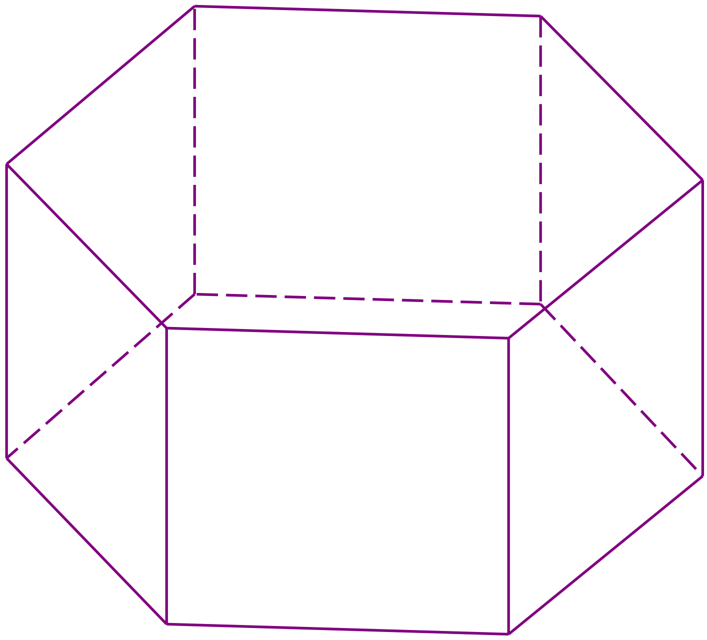
Ако се изврши транслација страна тетраедра "удесно" за угао од 60^0, добије се 12 тачака које се транслацијом за вектор дужине $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ пресликавају у темена овог ПП полиедра. (сл. 15.)



сл. 15.
(8- страни 12-темени ПП полиедар)

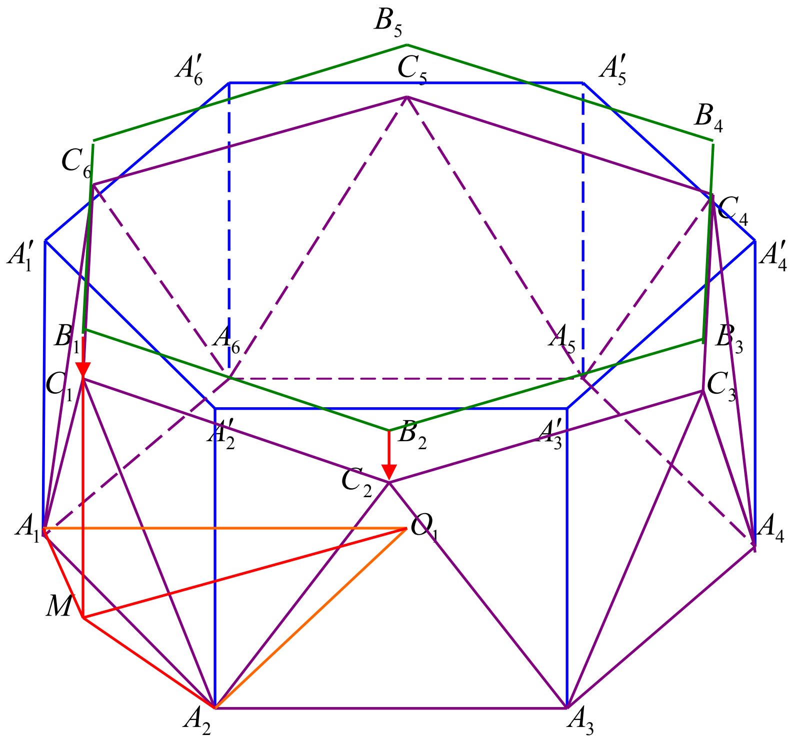
14. ПРАВИЛНА ЈЕДНАКОИВИЧНА ПРИЗМА

У једнакорогљасте ПП полиедре убрајају се још две групе полиедара. Једна од ових група представља све правилне једнако ивичне n-тостране ($n \geq 3$) призме. Како је правилна призма у математичкој литератури дово-љно описана, то је овом приликом није потребно описивати. Илустрација једне такве шестостране призме дата је на сл. 16.



сл. 16.

15. ПРАВИЛНИ ЈЕДНАКОИВИЧНИ ПРИЗМАТОИД



сл. 17.

Нека је $A_1A_2A_3...A_1'A_2'A_3'...$ правилна једнакоивична призма ивице a. Нека је многоугао $B_1B_2B_3...$ добијен ротацијом многоугла основе призме $A_1'A_2'A_3'...$ за угао од $\frac{180^0}{n}$ у једном од два смера око центра описаног круга око те основе. Нека је, даље, многоугао $C_1C_2C_2...$ добијен транслацијом многоугла $B_1B_2B_3...$ за вектор нормалан на раван те основе, у смеру пре-ма другој основи призме и чија је дужина:

$$d = a\left(1 - \frac{1}{2\cos\frac{90^0}{n}}\sqrt{4\cos^2\frac{90^0}{n} - 1}\right).(\text{сл.}17)$$

Нека је тачка M подножје нормале из темена C_1 на раван основе $A_1A_2A_3...$. Како је тачка B_1 подножје нормале из темена C_1 на раван друге основе призме, то је онда тачка C_1 између тачака M и B_1, па важи $MC_1 + C_1B_1 = MB_1$. Како је, по конструкцији, дуж MB_1 једнака бочној иви-ци ове једнакоивичне призме, онда важи:

$$H = |MC_1| = a - d = a - a\left(1 - \frac{1}{2\cos\frac{90^0}{n}}\sqrt{4\cos^2\frac{90^0}{n} - 1}\right) =$$

$$= \frac{a}{2\cos\frac{90^0}{n}}\sqrt{4\cos^2\frac{90^0}{n} - 1} .$$

Троугао C_1MA_1 је правоугли у којем су катете MC_1 и A_1M, а хипотенуза A_1C_1. Како је ротација извршена за угао од $\frac{180^0}{n}$ (половина централног угла круга описаног око основе који одговара страници многоугла осно-ве као тетиви), то онда тачка M припада симетрали угла $A_1O_1A_2$, а како тачка B_1 припада кругу описаном око основе $A_1'A_2'A_3'...$, то онда и тачка M припада кругу описаном око основе $A_1A_2A_3...$, па је дуж A_1M страница правилног $2n$-тоугла. Тада је $|A_1M| = \frac{a}{2\cos\frac{90^0}{n}}$. Из правоуглог троугла C_1MA_1 следи:

$$|A_1C_1| = \sqrt{\left(\frac{a}{2\cos\frac{90^0}{n}}\right)^2 + \left(\frac{a}{2\cos\frac{90^0}{n}}\sqrt{4\cos^2\frac{90^0}{n} - 1}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{4\cos^2\frac{90^0}{n}} + \frac{a^2}{4\cos^2\frac{90^0}{n}}\left(4\cos^2\frac{90^0}{n} - 1\right)} = a\,.$$

На исти начин се показује да су и остале бочне ивице полиедра $A_1A_2A_3...C_1C_2C_3...$ једнаке ивици једнакоивичне призме, па су бочне стра-не једнакостранични троуглови. Тада и сваки рогаљ овог полиедра има четири ивична угла, од којих су три по 60^0, а један је угао правилног n-то-угла. Дакле, сви рогљеви су међусобно подударни, па је овај полиедар по-луправилни полиедар.

Историјски осврт

Први подаци о полуправилним полиедрима приписују се Архимеду из Сиракузе који је живео од 287 до 212 године пре Христа.Међутим, његов оригинални рукопис је изгубљен. Папус из Александрије (друга половина III века) у свом Зборнику у V књизи наводи тринаест полуправилних по-лиедара и назива их Архимедовим телима. Називе појединих од ових тела даје према добијању ових тела од Платонових тела (правилних полиеда-ра) на начин који је описан на почетку овог текста, а који се задржао до данас. Током дугог низа година само су се неки математичари и сликари занимали за правилне и полуправилне полиедре (Леонардо да Винчи - ycocedron abscisus solidus). У 19. веку швајцарски математичар Лудвиг Шлефли (Ludwig Schläfli)(1814 - 1895) и енглеска математичарка из хоби-ја Алиша Бул Стот (Alicia Boole Stoot)(1860-1940), која је уз помоћ хо-ландског математичара Pieter Hendrik Schoute-а објављивала своје радове, су независно дошли до сличних резултата о 4-димензионим правилним полиедрима, као и о неким правилним полиедрима у вишедимензионим просторима.4-димензионе полиедре представљају њиховим пројекцијама у тродимензионалном простору. У том случају неке од пројекција су по-луправилни полиедри из тродимензионог простора. Том приликом А. Бул Стот наводи трансформацију коју зове expansion, а која представља транслацију страна наведену у овом раду. На тај начин она конструише неке од полуправилних полиедара који се могу добити од коцке и прави-лног октаедра. Иначе, А. Бул Стот је имала посебну способност да про-јекције 4-димензионих полиедара представи моделима у 3-димензионом простору. Због ове њене способности математичари, који су се бавили овим проблемима, сарађивали су са њом. Још један од таквих математичара је Х.С.М. Коксетер(Harold Scott MacDonald Coxeter) (1907-2003) који у својој књизи REGULAR POLYTOPES пише о овим проблемима и изме-ђу осталог и о сарадњи са А. Бул Стот. У тексту холандског универзитета у Хронингену (Rijksuniversitet Groningen) Theory and History of Geometric Models, објављеном на интернету 4. маја 2007. , наводи се да је метод конструкције полуправилних полиедара А. Бул Стот нов и врло елегантан начин конструкције ових тела. Међутим, математичари, који су сарађи-вали са њом, нису тој идеји придавали велики значај. Коксетер наводи ову идеју само једном реченицом. Разлог таквој реакцији би се могао обја-снити чињеницом, да је А. Бул Стот до ових конструкција долазила, како то неки кажу, експериментално тј. не наводећи параметре конструкције. Иначе, до вредности ових параметара се без употребе рачунара врло те-шко долази, а код неких је то практично неизводиво.

ЗАКЉУЧАК

Конструкција Архимедових тела наведена у овом тексту, поред тога што представља општи начин добијања ових тела, представља у неким случајевима и много једноставнији начин од класичног Архимедовог. Ипак, у неким случајевима је овај начин компликованији. На пример, кон-струкција 26-страног 24-теменог и 62-страног 60-теменог ПП полиедра је општом конструкцијом много једноставнија, док је конструкција 5-углог 32-страног 60-теменог (икоседрон абсцисус солидус -"фудбалска лопта") једноставнија на класичан начин тј. затупљивањем правилног икосаедра. Општа конструкција може бити врло погодна за практично добијање жи-чаних модела ових тела.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Антон Билимовић: Улога једнако-рогљастих Архимедових полиједара у проблему више тела (Српска краљевска академија, Београд, 1941)
[2] Ратко Динић: Правилни полиедри (аутор, Теслић, 2006)
[3] Еуклид: Елементи (превод А. Билимовића, Научна књига, Београд,1957)
[4] Coxeter: Regular politopes (The Macmillan Compani, New York, 1963)
[5] Regular and semi-regular convex polytopes a short historical overview (internet, 2004)
[6] Theory and History of Geometic Models (internet, 2007)