Matematički kolokvijum (Banja Luka)
Mat-Kol (Banja Luka),
XIV (1)(2008), 29 – 58

NAIVNA TEORIJA SKUPOVA – FREGEOV PROJEKT

Daniel A. Romano

Sadržaj:

Glava I: UVOD U LOGIKU PRVOG REDA

1.1 Logički sistemi

U ovom tekstu studiraćemo jedan broj *logičkih sistema*, takođe poznatih i kao *logičke teorije* ili *deduktivni sistemi*. Ne baš precizno govoreći, logički sistem sastoji se od četri stvari:

(0) Matematička logika kao prethodna disciplina
(1) Riječnik primitivnih pojmova korišten u jeziku ovog sistema.
(2) Lista ili skup pravila koja upravljaju transformacijama nizova simbola (takozvanih "formula") koji su gramatički ili sintaktički dobro formirane na jeziku ovog sistema.
(3) Lista *aksioma*, ili podskup dobro formiranih formula izabranih kao osnovne principe ili apriori prihvaćene kao dokazane formule u ovom sistemu.
(4) Specifikacija šta je pravilo zaključivanja je unaprijed data u ovom sistemu.

Kako mi uvijek počinjemo razmatranje logičkog sistema diskusijom o jeziku koji se koristi, počećemo da razmatranjem oznaka korištenog jezika.

Meta-jezik i objekt-jezik

Jezik sistema koji ćemo analizirati jeste simbolički logički jezik. Koriste se simboli kao što su "$\Rightarrow$" and "$\vee$", koje se, uobičajeno, ne susreću u govornom jeziku. Naravno, međutim, većina teksta u ovom rukopisu biće razmatranje o ovim jezicima koji vode porijeklo iz govornog jezika. Tako, jedan jezik se koristi za razmatranje tog drugog jezika. Pravićemo razliku između jezika kojeg analiziramo, kojeg u daljem zovemo *object-jezik*, i govornog jezika u kojem ćemo izvoditi to analiziranje i kojeg ćemo, u daljem, zvati *meta-jezik*.

U ovom tekstu, object-jezik će biti neki od simboličkih jezika prvog i drugog reda matematičke logike kao i aksiomatske teorije skupova naslonjene na te matiematičke logike. Meta-jezik će biti naš govorni jezik. Da bi bili precizniji, to će biti više tehnička varijanta našeg govornog jezika nego kolokvijalni jezik u opštoj upotrebi. Razlog za ovo je što će se jedan broj simbola dodavati našem object-jeziku, a za te simbole koristićemo neke tehničke termine i neke kvazi-matematičke simbole u našem govornom jeziku da bi mogli da se lakše sporazumjevamo.

Logika meta-jezika

Često ćemo koristiti meta-jezik da dokažemo neke stvari o objekt-jeziku kao i da dokažemo bilo koje zahtjeve logičkog vokabulara. Riječi kolokvijalnog jezika kao što su „svaki", „ili", „i", „ne", „ako" ćemo uvijek koristiti dodajući nove riječi kada želimo da iskažemo fraze tipa „ako i samo ako". Naravno, naši objekt-jezici takođe imaju logičke vokabulare i imaju oznake kao što su „$\Rightarrow$", „$\neg$", „$\vee$", „$\forall$". Ali bilo bi bolje da izvršimo restrikciju ovih simbola da ne bi došlo do konfuzuje. Mi želimo da naš meta-jezik bude vrlo jasan i precizan. U tom cilju, kad god koristimo riječ „ili" uvijek mislimo na *inkluzivnu disjunkciju* značenja riječi „ili". Slično, koristimo frazu „ako ..., tada“ u smislu *materijalne implikacije*. Ovo čini naš meta-jezik mnogo preciznijim od kolokvijalnog jezika kojim se uobičajeno koristimo. Ista vrsta logičkih pravila koja se koriste u objekt-jeziku takođe se primjenjuju u meta-jeziku. Dakle,

Ako (nešto, nešto nešto), tada (ovo ovo ovo)
Nešto nešto nešto
Prema tome: ovo ovo ovo

… je validna forma pravilnog zaključivanja. Naravno, koristićemo logiku da izučavamo logiku. Međutim, nećemo navoditi sva logička pravila u meta-jeziku budući da bi nam za to bio potreban meta-meta-jezik, što bi, odmah se vidi, formiralo beskonačni niz meta-jezika. Naravno da postoje posebni razlozi za razumjevanje matematičke prakse te da je razumno korištenje meta-jezika u tom cilju.

Meta-lingvističke variable

Naš govorni jezik, u biti, ne sadrži varijable, ali ih lako možemo napraviti. Budući da se meta-jezik uobičajeno koristi u cilju razumjevanja objekt-jezika, varijable najčešće koristimo u meta-jeziku kada govorimo o *svim* ili *nekim* ekspresijama objekt-jezika. Ne želimo da uzimanje varijabli u meta-jeziku pobrkamo sa varijablama u objekt-jeziku. Podsjetimo se da matematička logika koristi slova kao šro su 'x' i 'y' kao varijable. Da bi ih razlikovali od varijabli meta-jezika mi ćemo koristiti grčka slova kao šro su 'α' i 'β' za označavanje varijabli u meta-jeziku i pri tome misliti na bilo koju ekspresiju objekt-jezika. Na primjer, možemo kazati rečenicu kao što je ova:
Ako je α rečenica matematičke logike, tada α ne sadrži varijable niti je ograničena nekim kvantifikatorem. Napomenimo da, u ovoj izjavi, varijabla 'α' je korištena a da prethodno nije pomenuta. Slovo 'α' se samo po sebi ne koristi u matematičkoj logici i ne sadrži varijable vezane ili slobodne. To je nešto što mi koristimo u meta-jeziku da iskažemo da se, pri tome, misli na *bilo koju rečenicu* objekt-jezika. Dakle, α može biti "F(a)" ili može biti "$(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x))$", i tako dalje. Variable koje koristimo u meta-jeziku nazivamo *shematska slova*.

Umjesto da koristimo grčka slova, mogu se koristiti velika slova u kurzivu kao na primjer 'A ' i 'B ' kao shematska slova u meta-jeziku, ili na neki drugi način.

1.2. Teorije prvog reda: Sintaksa

Neki logički sistemi su poznati kao *teorije prvog reda*. Da bi determinisali ovaj pojam, počećemo sa ispisivanjem osnovnih simbola koji se koriste u jezicima takvih sistema:

Definicija: *Individualne varijable* su mala slova latinice sa ili bez indeksa. Ima ih najviše prebrojivo mnogo.

Primjer: 'x', 'x_1', 'x_{12}', 'y', 'y_2', 'z', 'z_{13}', i tako dalje.

• Može se koristiti i niz ‘x_1’ , …, ‘x_n’, … .

Definicija: *Individualne konstante* su (posebno izabrana) mala slova latinske abecede sa ili bez indeksa kao što su ‘*a*’ ili ‘*e*’, ali se (unaprijed) mora znati razlika između slava za varijable i slova za konstante.

Primjer: ‘a’, ‘a_2’, ‘b’, ‘c_{124}’, i tako dalje.

• Može se koristiti i niz ‘a_1’ , …, ‘a_n’, … .

Definicija: *Predikatska slova* su velika slova latinske abecede napisana sa ili bez gornjih i/ili donjih indeksa.

Primjeri: ‘A_1’, ‘R^2’, ‘H^4’, ‘F_1^2’, ‘G^3_4, i tako dalje.

• Gornji indeksi pokazuju dužinu predikatskog slova, tj. na koliko terma (ovaj pojam će biti definisan malo kasnije) ovo predikatsko slovo može djelovati.
• Predikatsko slovo dužine 1 naziva se *monadičko predikatsko slovo*.
• Predikatsko slovo dužine 2 se naziva *binarno* ili *diadsko predikatsko slovo*.
• Donji indeksi služe samo da bi razlikovali slova, na primjer A_1 od slova A_2 .

Uobičajeno je da se gornji i donji indeksi izostavljaju ako u kontekstu neće doći do zabune i ako se zna koje su dužine upotrebljena slova. Na primjer, može se umjesto $R^2(a,b)$ pisati samo R(a,b).

Definicija: *Funkcionalna slova* su mala slova latinske abecede sa ili bez gornjih i/ili donjih indeksa.

Primjeri: ‘f^1’, ‘g^2’, ‘h^3_3’, i tako dalje.

Napomene koje se odnose na predikatska slova odnose se i na funkcionalna slova.

Definicija: *Term* u jeziku prvog reda se definiše rekurzivno na sljedeći način:
(i) sva individualne varijable su termi;
(ii) sva individualne konstante su termi;
(iii) Ako je φ funkcionalno slovo dužine n a $t_1, \ldots, t_n$ termi, tada je i niz nis simbola $\varphi(t_1 , \ldots, t_n)$ takođe term;
(iv) drugih terma osim onih koji su napravljeni konačnom primjenom pravila (i) – (iii) ove definicije, nema.

Primjeri: ‘a’, ‘x’, “$f(a)$”, “$g(x, f(y))$”, i tako dalje.

Definicuija: *Atomarna formula* ili *atom* je niz simbola oblika $\pi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ gdje je π neko predikatsko slovo dužine n a $\tau_1, \ldots, \tau_n$ su termi.

Primjeri: “$F^1(a)$”, “$F^1(f(x))$”, “$R^3_4(a, b, c)$ ”, “$H^4(x, b, y, g(a, x))$”, i tako dalje.

Može se usvojiti konvencija, kako je to uobičajeno u znantnom broju knjiga, da ako je term u atomarnoj formuli nema funkcionalnih slova, tada se zagrade mogu izostaviti. U ovom tekstu nećemo se pridržavati ove konvencije.

Primjeri: "Fx" je kraće napisano "$F^1(x)$", a "Rab" je kraće pisanje za "$R^2(a, b)$".

Definicija: *Dobro formirana formula* (*well-formed formula*), kratko (wff) je rekurzivno definisana na sljedeći način:

(i) Bilo koja atomarna formula je wff;

(ii) Ako je α wff, tada je i $\neg\alpha$ wff;

(iii) Ako su α i β wffs, tada je i $(\alpha \vee \beta)$ wff;

(iv) Ako je α wff a ξ individualna variabla, tada je sljedeći niz $((\forall\xi)\alpha)$ takođe wff;

(v) Dobro definisane formule (wff) se dobijaju konačnom primjenom pravila (i)-(iv) ove definicije i drugih wff nema.

Ostali standardni logički operatori mogu biti uvedeni definicijama:

$(\alpha \wedge \beta)$ se definiše kao $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$;

$(\alpha \Rightarrow \beta)$ se definiše kao $(\neg\alpha \vee \beta)$;

$(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ se definiše kao $\Leftrightarrow\neg(\alpha \vee \beta) \vee \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$; i

$((\exists\xi)\alpha)$ se definiše kao $\neg((\forall\xi)\neg\alpha)$.

Definicija: *Jezik prvog reda* je bilo koji logički jezik koji koristi gore definisane dobro formirane formule ili neku njegovu modifikaciju uz restrikciju broja konstanti, funkcionalnih slova i predikatskih slova.

Skrećemo pažnju čitaocu da je jezik jezik prvog reda jer se kvantifikatori primjenjuju samo na varijable. Dakle, kvantifikatori se ne primjenjuju na funkcionalna i/ili predikatska slova.

Konvencija o zagradama

U gornjim redovima već je sugerisano da se neke zagrade mogu izostaviti. Ponekad, kada je wff stvarno komplikovana, mnogo lakše je njeno razumjevanje ako se izostave neke zagrade. Budući da bi izostavljanje zagrada moglo dovesti do ambivalentnosti u razumjevanju formula, moramo usvojiti neku *konvenciju* kako ćemo čitati formule u kojima smo izostavili zagrade. U upotrebi je više konvencija o brisanju zagrada. Međutim, u skladu sa usvojenim standardnom konvencijom, kada nije jasno koji operator ima veće polje djelovanja, operator bliži vrhu gornje liste trebalo bi uzeti da su bliži za djelovanje a da su operatori bliži dnu gornje liste trebalo bi da imaju šire polje djelovanja. Na primjer:

$Fa \Rightarrow Fb \vee Fc$ je kraće pisanje za $(Fa \Rightarrow (Fb \vee Fc))$, dok međutim

$Fa \Rightarrow Fb \Leftrightarrow Fc$ je kraće pisanje za sljedeću formulu $((Fa \Rightarrow Fb) \Leftrightarrow Fc)$. Kad su operatori isti, kao na primjer u formuli $Fa \Rightarrow Fb \Rightarrow Fc$, to znači $((Fa \Rightarrow Fb) \Rightarrow Fc)$. Dakle, usvaja se da je polje djelovanja snažnije gledano slijeva.

Naravno, za '$\vee$' i '$\wedge$', ova konvencija 'slijeva' je nevažna budući da je $(\alpha \vee \beta) \vee \delta$ logički ekvivalentno sa $\alpha \vee (\beta \vee \delta)$, i $(\alpha \wedge \beta) \wedge \delta$ je ekvivalentno sa $\alpha \wedge (\beta \wedge \delta)$. Ponedak ova konvencija 'slijeva' može zadavati glavobolju, kao, na primjer, u sljedećoj formuli: $Fa \Rightarrow (Fb \Leftrightarrow Fc)$ ne može biti napisano kao $Fa \Rightarrow Fb \Leftrightarrow Fc$.

1.3. Dedukcije u teorijama prvog reda

U teorijama prvog reda među dobro formiranim formulama izdvajamo listu *aksioma* i listu *pravila zaključivanja*. One su zajednički dio u svim (standardnim) teorijama prvog reda. Hatcher ih je formulisao kao sljedeće:

Svaka instance sljedećih shema je neka logička aksioma (gdje su α, β, δ bilo koje wffs, ξ bilo koja varijabla, a τ bilo koji term sa nekom specijalnom osobinom):

(1) $((\alpha \vee \alpha) \rightarrow \alpha)$,
(2) $(\alpha \rightarrow (\alpha \vee \alpha))$,
(3) $((\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha))$,
(4) $((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((\delta \vee \alpha) \Rightarrow (\delta \vee \beta)))$,
(5) $(\forall\xi)\alpha(\xi) \Rightarrow \alpha(\tau)$, pretpostavljajući da nema varijabli u τ koje su vezane prije nego što su stavljene u kontekst $\alpha(\tau)$.
(6) $(\forall\xi)(\beta \Rightarrow \alpha(\xi)) \Rightarrow (\beta \Rightarrow (\forall\xi)\alpha(\xi))$, predpostavljajući da se ξ ne pojavljuje slobodno u β.

(Istaknimo da iako ovdje ima samo šest shema aksioma, zapravo ima beskonačno mnogo aksioma, budući da *svaka* wff može da se pojavi u ulozi izgradnje aksioma u formama (1) – (6).)

Pravila zaključivanja su:
- *Modus ponens (*MP): Iz $\alpha \Rightarrow \beta$ i α, zaključujemo β; i
- *Univerzalna generalizacija* (UG)*:* Iz $\alpha(\xi)$, zaključijermo $(\forall\xi)\alpha(\xi)$.

U mnogim drugim knjigama date su ekvivalentne formulacije: Na primjer, Mendelson ima ista pravila pravila zaključivanja ali koristi kao primitivne pojmove $\neg$ i $\Rightarrow$ umjesto $\neg$ i disjunkcije $\vee$ kao ovdje, i, sem toga, sheme aksioma su mu:

$(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha))$
$((\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \delta)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \delta)))$
$((\neg\alpha \Rightarrow \neg\beta) \Rightarrow ((\neg\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \alpha))$

Obje ove formulacije su kompletno ekvivalentne, te one proizvode iste rezultate.

Umjesto da koristite kompletno različite pojave koje nisu aksiome mogu se koristiti brojna pravila zaključivanja. Na primjer, u Hardegree'ovom sistemu SL, koji sadrži pravila DN, $\rightarrow$O, $\vee$I, $\vee$O, &I, &O, $\leftrightarrow$I, $\leftrightarrow$O, $\forall$O, $\exists$O, $\forall$I, i tehnike dokazivanja CD, ID i UD. Opet, rezultati su isti.

Definicija: *Derivacija* ili *dokaz* wff β iz skupa premisa Γ je uređeni niz wffs,

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$$

gdje β je α_n i takav da za svako α_i, $1 \leq i \leq n$, je (1) α_i je jedan od aksioma ove teorije (ili logički aksiom ili nelogički – pravi aksiom), (2) α_i je jedan od premise skupa Γ, ili (3) u nizu koji prethodi ovom članu postoje članovi ovog niza takvi da α_i slijedi iz njih posredstvom jednog od pravila zaključivanja.

Označavanje: Koristićemo oznaku "$\Gamma \vdash_K \beta$" da kažemo da postoji neki dokaz formule β iz Γ u sistemu K. (Najčešće ćemo izostavljati subscript K ako je jasno o kom sistemu se radi.) Pisaćemo "$\vdash_K \beta$" da kažemo da postoji neki dokaz formule β u sistemu K a da se ne koriste neke druge premise osim aksioma i pravila zaključivanja sistema K. U tom slučaju, za β se kaže da je *teorem* u K.

Definicija: *Predikatski račun prvog reda* je teorija prvog reda koja nema nelogičkih aksioma.

(Moglo bi se činiti da postoji samo jedan Predikatski račun prvog reda. Međutim, različiti predikatski računi prvog reda postoje za svaki *jezik prvog reda*.)

Najvjerovatnije, ono što je dokazivo u sistemu prirodne dedikcije moglo se naučiti u prvom susretu sa Matematičkom logikom a to je bilo nešto više od Predikatskog računa prvog reda. Sva pravila zaključivanja mogu se derivirati iz gornjeg aksiomatskog sistema. Prema tome, sugerišem da se koristite oznakama i struktukturama dokaza bilo kojeg sistema priroden dedukcije za Predikatsku logiku prvog reda koju vi znate, bila ona Hardegree'ijev skup pravila, ili Copi'jev, ili neki drugi system. Možete skratiti korake u nekom dokazu koji slijedi iz pravila Logike prvog reda samo pišući "Logika", "SL" ili "FOL" [Logika prvog reda - First Order Logic]", citirajući brojeve odgovarajućih linija.

Hatcher uvodi neki tautologiju koristeći se tablicama istinitosti. Ovaj tekst je napisan uz pretpostavku da je čitalac u stanju da brzo razumije korake u dokazima te da pisanje svakog koraka nije baš neophodno.

U sljedećem su data pravila zaključivanja bilo kojeg predikatskog računa prvog reda, a na desnoj strain data su njihova imena i skraćenice tih imena.

Pravila zaključivanja:	**Ime/ Oznaka:**
$\alpha \Rightarrow \beta, \neg \beta \vdash \neg \alpha$	Modus tollens (MT)
$\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \delta \vdash \alpha \Rightarrow \delta$	Hypo. Syllogism (HS)
$\alpha \vee \beta, \neg \beta \vdash \alpha$	Disjunctive syllogism (DS)
$\alpha \vee \beta, \neg \alpha \vdash \beta$	Disjunctive syllogism (DS)
$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \delta) \vdash \beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \delta)$	Interchange (Int)
$\alpha \Rightarrow \beta \vdash \neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$	Transposition (Trans)
$\neg\alpha \Rightarrow \neg\beta \vdash \beta \Rightarrow \alpha$	Transposition (Trans)
$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \delta) \vdash (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \delta$	Exportation (Exp)
$(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \delta \vdash \alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \delta)$	Exportation (Exp)
$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$	Double Negation (DN)
$\alpha \vdash \neg\neg\alpha$	Double Negation (DN)
$\neg\alpha \vdash \alpha \Rightarrow \beta$	False Antecedent (FA)
$\alpha \vdash \beta \Rightarrow \alpha$	True Consequent (TC)
$\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \Rightarrow \beta)$	True Ant/False C.(TAFC)

$\neg(\alpha \Rightarrow \beta) \mid\!- \alpha$	True Antecedent (TA)
$\neg(\alpha \Rightarrow \beta) \mid\!- \neg\beta$	False Antecedent (FC)
$\alpha \Rightarrow \beta, \neg\alpha \Rightarrow \beta \mid\!- \beta$	Inevitability (Inev)
$\alpha \vee \alpha \mid\!- \alpha$	Redundancy (Red)
$\alpha \mid\!- \alpha \wedge \alpha$	Redundancy (Red)
$\alpha \mid\!- \alpha \vee \beta$	Addition (Add)
$\alpha \mid\!- \beta \vee \alpha$	Addition (Add)
$\alpha \vee \beta \mid\!- \beta \vee \alpha$	Commutativity (Com)
$\alpha \wedge \beta \mid\!- \beta \wedge \alpha$	Commutativity (Com)
$\alpha \Leftrightarrow \beta \mid\!- \beta \Leftrightarrow \alpha$	Commutativity (Com)
$(\alpha \wedge \beta) \wedge \delta \mid\!- \alpha \wedge (\beta \wedge \delta)$	Associativity (Assoc)
$\alpha \wedge (\beta \wedge \delta) \mid\!- (\alpha \wedge \beta) \wedge \delta$	Associativity (Assoc)
$(\alpha \vee \beta) \vee \delta \mid\!- \alpha \vee (\beta \vee \delta)$	Associativity (Assoc)
$\alpha \vee (\beta \vee \delta) \mid\!- (\alpha \vee \beta) \vee \delta$	Associativity (Assoc)
$\alpha \wedge \beta \mid\!- \alpha$	Simplification (Simp)
$\alpha \wedge \beta \mid\!- \beta$	Simplification (Simp)
$\alpha, \beta \mid\!- \alpha \wedge \beta$	Conjunction Intro (Conj)
$\neg(\alpha \wedge \beta) \mid\!- \neg\alpha \vee \neg\beta$	DeMorgan's Law (DM)
$\neg(\alpha \vee \beta) \mid\!- \neg\alpha \wedge \neg\beta$	DeMorgan's Law (DM)
$\neg\alpha \vee \neg\beta \mid\!- \neg(\alpha \wedge \beta)$	DeMorgan's Law (DM)
$\neg\alpha \wedge \neg\beta \mid\!- \neg(\alpha \vee \beta)$	DeMorgan's Law (DM)
$\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \alpha \mid\!- \alpha \Leftrightarrow \beta$	Biconditional Intro (BI)
$\alpha, \beta \mid\!- \alpha \Leftrightarrow \beta$	Biconditional Intro (BI)
$\neg\alpha, \neg\beta \mid\!- \alpha \Leftrightarrow \beta$	Biconditional Intro (BI)
$\alpha \Leftrightarrow \beta \mid\!- \alpha \Rightarrow \beta$	Biconditional Elim (BE)
$\alpha \Leftrightarrow \beta \mid\!- \beta \Rightarrow \alpha$	Biconditional Elim (BE)
$\alpha \Leftrightarrow \beta, \alpha \mid\!- \beta$	Bic. Modus Ponens (BMP)
$\alpha \Leftrightarrow \beta, \beta \mid\!- \alpha$	Bic. Modus Ponens (BMP)
$\alpha \Leftrightarrow \beta, \neg\alpha \mid\!- \neg\beta$	Bic. Modus Tollens (BMT)
$\alpha \Leftrightarrow \beta, \neg\beta \mid\!- \neg\alpha$	Bic. Modus Tollens (BMT)
$(\forall\xi)\alpha(\xi) \mid\!- \alpha(\tau)$	Universal instantiation (UI)
$\alpha(\tau) \mid\!- (\exists\xi)\alpha(\xi)$	Existential generalization (EG)
$\neg(\forall\xi)\alpha(\xi) \mid\!- (\exists\xi)\neg\alpha(\xi)$	Change quantifier (CQ)
$\neg(\exists\xi)\alpha(\xi) \mid\!- (\forall\xi)\neg\alpha(\xi)$	Change quantifier (CQ)
$(\exists\xi)\neg\alpha(\xi) \mid\!- \neg(\forall\xi)\alpha(\xi)$	Change quantifier (CQ)
$(\forall\xi)\neg\alpha(\xi) \mid\!- \neg(\exists\xi)\alpha(\xi)$	Change quantifier (CQ)

Teorem dedukcije koji vrijedi u svakoj teoriji prvog reda ima sljedeću formu:

Teorem dedukcije. *Ako* $\Gamma \cup \{\beta\} \mid\!- \alpha$, *i ni jedan* UG *korak primjenjen na neku slobodnu varijablu u* β *upotrebljen u dokazu ne zavisi od* β, *tada* $\Gamma \mid\!- \beta \Rightarrow \alpha$.

Ovo podvođenje tehnike uslovnog dokaza i tehnike indirektnog dokaza pokazuje da je restrikcija UG koraka obavezujuća.

Hatcher daje dokaz oslanjajući se na na ovaj rezultat

$$\vdash (\forall x)(Fx \Rightarrow ((\forall z)(Fz \Rightarrow Gz) \Rightarrow (\exists y)Gy))$$

(1)	1. Fx	H[ypothesis]
(2)	2. $(\forall z)(Fz \Rightarrow Gz)$	H
(2)	3. $Fx \Rightarrow Gx$	2, $e\forall$ (= UI)
(1,2)	4. Gx	1, 3 MP
(1,2)	5. $(\exists y)Gy$	4, iE (= EG)
(1)	6. $[2 \Rightarrow 5]$	2, 6 eH (= DT = CD = CP)
	7. $[1 \Rightarrow 6]$	1, 6 eH
	8. $(\forall x)[7]$	7, UG

Brojevi u zagradama na lijevoj strani pokazuju broj linije svake rečenice ili hipoteze od koje slijedi ovaj korak. Brojevi u uglastim zagradam su skraćenice za wff koje treba formirati u toj liniji. Prema tome, "$(\forall x)[7]$" je isto što i naš rezultatis traženi rezultat, "$(\forall x)(Fx \Rightarrow ((\forall z)(Fz \Rightarrow Gz) \Rightarrow (\exists y)Gy))$".

Čitalac može zapisivati dokaze na ovaj način, ali može koristiti i druge načine. Međutim, može se koristiti bilo koji metod.

Definicija: U meta-jeziku oznaka "K(Γ)" se koristi da označi skup svih formula β takvih da $\Gamma \vdash_K \beta$.

Zadaci:

1. Dokazati da je Γ podskup od K(Γ) za bilo koji sistem prvog reda, tj. da svaki član od Γ je član od K(Γ).
2. Dokazati da ako je Γ podskup od Δ, tada je K(Γ) podskup od K(Δ), za svaki sistem prvog reda.
3. Dokazati da je K(K(Γ)) = K(Γ) za bilo koji sistem prvog reda.

1.4 Formalna semantička tačnost u teorijama prvog reda

Uređenje predikatske logike

Jedan rečenica ili wff napisana na jezika prvog reda je tačna ili pogrešna u zavisnosti od *interpretacije* ili *modela*.

Slobodnije govoreći, jedna interpretacija je upravo od načina interpretacije našeg jezika: specifikacije za (i), šta je rang varijabli, (ii) šta su konstante, (iii) šta su predikatska slova, i (iv) šta su funkcionalna slova. Sada ćemo ovo iskazati preciznije.

Definicija: *Interpretacija* M jezika prvog reda sastoji se od sljedeća četri skupa stvari:

1. Specifikacija nekog nepraznog skupa D koji se služiti kao *domen za kvantifikaciju* u jeziku prvog reda.

• Ovaj skup se sastoji od entiteta nad kojim se tretiraju varijable i kvantifikacije.
• Domen može sadržavati samo brojeve, ili samo ljude, ili bila šta drugo što možemo da zamislimo.

• Domen na kojem se vrši kvantifikacija se ponekad naziva *univerzum diskursa*.
2. Specifikacija za svaku individualnu konstantu fiksirani su elementi u D koji predstavljaju te konstante.
3. Specifikacija za svako predikatsko slovo dužine n u logičkom jeziku fiksiran je skup uređenih n-torki iz D.
• Ovaj skup možemo, u zavisnosti od potreba, proširiti.
4. Specifikacija za svako funkcionalno slovo dužine n u logičkom jeziku fiksiran je neki operator dužine $n+1$ na D.
• U skupovnom smilsu pod operatorem dužine $n+1$ podrazumjevamo uređeni par, gdje je prva koordinata uređena n-torka elemenata iz D, a druga koordinata je neki element iz D.
• Ovaj operator predstavlja neku funkciju $D^n \to D$, što znači da prva komponenta, uređena n-torka elemenata iz D, predstavlja moguće argumenete, a druga komponenta tog uređenog para predstavlja vrijednost te funkcije.
• Dakle, model fiksira značenje kvantifikatora, konstanata, predikatskih slova i funkcionalnih slova, respektivno.

Kada je data neka interpretacija, tada je determinisana istinitosna vrijednost bilo koje *zatvorene wff* . Grubo govoreći ovo daje sljedeće:
Prvo, uzimamo u obzir skup svih mogućih članova domena kao vrijednosti varijabli. Svaka takva varijabla se naziva *niz*. Indirektno, jedan niz korespondira nekom entitetu domena sa svakim termom. (Model fiksira korespodenciju odgovarajućeg entiteta sa svakom konstantom. Niz propisuje neki entitet za svaku varijablu. U slučaju terma, izgrađenog od nekog funkcionalnog slova, mi jednostavno uzimamo vrijednost operacije asocirane u tom modelu sa uređenom n-torkom izgrađenom od entiteta asociranih posredstvom niza sa termom za uređenu n-torku na argument-mjestima u funkcionalnom slovu.)

Za wff kažemo da je *zadovoljena* ili *oboriva* posredstvom sljedećeg niza:

Definicija: Pojam *zadovoljenja* definišemo rekurzivno. Za datu interpretaciju M sa domenom D:
(i) Ako je α *atomska wff* oblika $\pi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, tada niz σ zadovoljava α ako i samo ako uređena n-torka formana posredstvom tih entiteta iz domena D tako da σ korespondira sa $\tau_1, \ldots, \tau_n$ je u ekstenziji of π pri interpretaciji M.
(ii) Niz σ zadovoljava neku wff oblika $\neg\alpha$ ako i samo ako σ ne zadovoljava α.
(iii) Niz σ zadovoljva neku wff oblika $(\alpha \vee \beta)$ ako i samo ako σ zadovoljava α ili σ zadovoljava β.
(iv) Niz σ zadovoljava neku wff oblika $(\forall\xi)\alpha$ ako i samo ako svaki niz σ^*, različit od σ najviše do uvažavanje šta su entiteti u D, korespondira sa varijablom ξ zadovoljava α.

Definicija: Neka wff α je *tačna pri interpretaciji M* ako i samo ako svaki niz koji može biti formiran u domenu D interpretacije M zadovoljava α.

• Oznaka $\models_M$ će značiti da je α tačno za M. (Subscript na $\models$ ovdje je neophodan.)

Definicija: Ako je M neka interpretacija pri kojoj je svaki aksiom neke teorije K prvog reda tačan, tada za M kažemo da je *model* za K.

Definicija: Za wff α kažemo da je *logički tačna* ili *logički valjana formula* ako i samo ako je α tačna formula za svaku moguću interpretaciju.

• Oznaka $\models \alpha$ (izostavljajući bilo koji donji indeks) će značiti da je α logički valjana formula.

Definicija: Neka wff α je *logička posljedica* skupa Γ wff – a ako i samo ako u svakoj interpretaciji svaki niz koji zadovoljava svakog člana skupa Γ takođe zadovoljava α. To označavamo sa $\Gamma \models \alpha$.

1.5. Razvoj teorije

1. *Ako je M model za neku teoriju K prvog reda, tada je svaki teorem u K tačan pri interpretaciji M.*

2. **'Soundness':** *Svaki teorem Računa prvog reda je logički validan, tj. vrijedi*:

Ako je $\vdash \alpha$, tada je $\models \alpha$.

3. Drugi način iskazivanja istog rezultata:
Svaka interpretacija datog jezika prvog reda je model za Predikatski račun prvog reda za taj jezik.

Definicija: Za teoriju K prvog reda kažemo da je *konzistentna* ako ne postoji wff α takva da je istovremeno $\vdash \alpha$ i $\vdash \neg\alpha$.

4. **Konzistentnost:** *Svi Predikatski računi prvog reda su konzistentni, tj.*:

Ne postoji wwf α takav da je istovremeno $\vdash \alpha$ i $\vdash \neg\alpha$.

5. **Gödel'ov teorem kompletnosti:** *Svaka logički validna wwf datog jezika prvog reda je teorem asociranog Predikatskog računa prvog reda,tj.*:

Ako je $\models \alpha$ tada je $\vdash \alpha$.

6. *Teorija prvog reda je konzistentna ako i samo ako ima bar jedan model.*

7. **Skolem-Löwenheim Teorem:** *Ako teorija prvog reda ima bilo kakav model, tada ona ima prebrojiv model,* tj. ima model sa onoliko mnogo elemenata u domenu koliko ima prirodnih brojeva {0, 1, 2, 3, …}.

1.6. Teorije sa jednakošću

A. Osnove

Definicija: Teorija K prvog reda je *teorija prvog reda sa jednakošću* ako i samo ako postoji predikatsko slovo $A^2{}_1$ koji se koristi tako da je :

$$(\forall x)A^2{}_1(x, x)$$

aksiom ili teorem, a za svaku wff β koja ne sadrži ograničeno pojavljivanje varijable '*y*', sljedeća wff:

$$(\forall x)(\forall y)(A^2{}_1(x,y) \Rightarrow (\beta(x,x) \Rightarrow \beta(x,y))),$$

pri čemu se $\beta(x,y)$ obrazuje od β supstotucijom '*y*' umjesto nijedne ili više slobodnih pojavljivanja varijable '*x*' u $\beta(x, x)$, je aksiom ili teorem.

U takvim teorijama, wff $A^2{}_1(\tau,\mu)$ se uobičajeno označava sa $\tau = \mu$, a $\neg A^2{}_1(\tau,\mu)$ se označava sa $\tau \neq \mu$.

Ako umjesto predikatskog slova $A^2{}_1$, u teoriji K, postoji neka složenija wwf $\alpha(x,y)$ sa dvije slobodne varijable takva da je teorija K izgrađena od sličnih aksioma i teorema, tada kažemo da je u teoriji K *moguće definisati jednakost* ili da je *jednakost definibilna*.

Zadaci: Dokazati sljedeće:

Ako je K teorija sa jednakošću, tada imamo sljedeće rezultate za sve terme τ, μ i θ:

$\vdash_K \tau = \tau$ (Refleksivnost jednakosti)

$\tau = \mu \vdash_K \mu = \tau,$ (Simetričnost jednakosti)

$\tau = \mu, \mu = \theta \vdash_K \tau = \theta$ (Tranzitivnost jednakosti)

(LL) $\tau = \mu, \beta(\tau,\tau) \vdash_K \beta(\tau,\mu)$, pod uslovom da ni τ ni μ ne sadrže varijable ograničene u $\beta(\tau,\tau)$ ili $\beta(\tau,\mu)$.

B. Semantika za teorije sa jednakošću

Definicija: Interpretacija M je *normalni model* ako i samo ako ekstenzija predikatom $A^2{}_1$ svi uređeni parovi formiranih od elemenata domene *D* iz M oblika $\langle o,o\rangle$.

Definicija: *Predikatski račun prvog reda sa jednakošću* je teorija prvog reda čija su jedine nelogičke aksiome

$(\forall x)(x = x)$

i svaka instance sljedeće wwf

$(\forall x)(\forall y)(x = y \rightarrow (\beta \rightarrow \beta^*)),$

pri čemu β je wff koja ne sadrži ograničeno '*y*', a β* se dobija iz β supstitucijom '*y*' za nijednu ili više slobodnih pojavljivanja '*x*'.

Neki rezultati su:

1. **'Soundness':** *Ako wff α je teorem Predikatskog računa prvog reda sa jednakošću, tada je α tačno u svim normalnim modelima.*
2. *Svaki normalni model za jezik prvog reda je model za asocirani Predikatski račun prvog reda sa jednakošću.*

3. **Konzistentnost:** *Svaki Predikatski račun K prvog reda sa jedankošću je konzistentan,* tj. ne postoji wff α takva da je istovremeno $\vdash_K \alpha$ i $\vdash_K \neg\alpha$.
4. *Ako je teorija prvog reda sa jednakošću konzistentna, tada ona ima normalan model.*
5. **Semantička kompletnost**: *Ake je* α *wff jezika prvog reda, i* α *je tačno u svom normalnim modelima, tada ako je K asocirani Predikatski račun prvog reda sa jednakošću sa datim jezikom, tada je* $\vdash_K \alpha$.

1.7. Term-operator povezanih varijabli (Variable Binding Term Operators – VBTOs)

A. Uvod

Definicija: *Jezik prvog reda sa* ***vbtos*** je jezik prvog reda uz dodatak terma oblika

$$(\nu\xi)\alpha(\xi),$$

gdje je ξ bilo koja varijabla i $\alpha(\xi)$ bilo koja wff, a ν neki novi simbol specijalan za taj jezik. Term operator povezanih varijabli se takođe naziva *subnectives*.

Svako pojavljivanje varijable ξ u termima oblika $\nu\xi\alpha(\xi)$ je vezano pojavljivanje.

Mi ćemo ograničiti naša razmatranja na *vbtos* sa jednom ograničenom varijablom. Mi ćemo, takođe, ograničiti naša razmatranja na *extensionalni vbtos*, tj. i.e., one koji daju terme koji su postojani za iste objekte kad god orvorenu wff, u izabranom *vbto*, zadovoljavaju isti entiteti.

Primjeri *vbtos*:
1. Opisni operator: $(\iota x)\alpha(x)$ se čita: takav x da $\alpha(x)$.
2. Selektivni / Izborni operatori: $(\varepsilon x)\alpha(x)$, odnosno $(\mu x)\alpha(x)$ se čita: poslednji takav da $\alpha(x)$, odnosno prvi takav da $\alpha(x)$.
3. Skupovna apstrakcija: $\{x|\alpha(x)\}$ se čita: skup / klasa x takvih da $\alpha(x)$.

B. Semantika za *vbtos*

Interpretacija za jezik prvog reda sa *vbtos* mora takođe jednu dodatnu komponentu:
5. Za svaki ***vbto****,* dodijeljena je neka funkcija koja preslikava svaki podskup domena D u neki član od D.

(Na primjer, jedan model za korištenje operatora „ι“ dodijeljuje mu neku funkciju koja svaki singleton-podskup od D preslikava u neki solo član od D i koja prazan podskup i nesingleton podskupove preslikava u isti izabrani entitet u D, na primjer, u broj 0.)

U determinaciji pojam zadovoljavanja / istinotosti wff koju sadrži vbtos, kažemo da će niz σ pridružuje termu oblika $\nu\xi\alpha(\xi)$ vrijednost funkcije asocirane vbto ν posredstvom modela za podskup domena koji obuhvata sve takve entitete *o* za koje niz σ* liči baš na σ osim na *o* što označava varijablu ξ koja zadovoljava $\alpha(\xi)$. Definicija istine, odnosno yadovoljavanja pravi se na uobičajeni način.

C. Dedukcija za *vbtos*

Da bi sačuvali kompletnost dodajemo sljedeću shema-aksiomu Predikatskom računu prvog reda sa *vbtos*:

V.1 $(\forall x)(\alpha(x) \Leftrightarrow \beta(x)) \Rightarrow (\delta((\nu x)\alpha(x)) \Leftrightarrow \delta((\nu x)\beta(x)))$, pretpostavljajući da ni jedna slobodna varijabla iz $(\nu x)\alpha(x)$ ili $(\nu x)\beta(x)$ nije ograničena u kontekstu $\delta((\nu x)\alpha(x))$ ili $\delta((\nu x)\beta(x))$.

V.2 $\delta((\nu\xi)\alpha(\xi)) \Leftrightarrow \delta((\nu\zeta)\alpha(\zeta))$, pretpostavljajući da ni jedan slobodna varijabla iz $(\nu\xi)\alpha(\xi)$ ili $(\nu\zeta)\alpha(\zeta)$ nema ograničeno pojavljivanje u kontekstu $\delta((\nu\xi)\alpha(\xi))$ ili $\delta((\nu\zeta)\alpha(\zeta))$.

Predikatskom računu prvog reda sa jednakošću dodajemo sljedeće sheme:

V.1' $(\forall x)(\alpha(x) \Leftrightarrow \beta(x)) \Rightarrow (\nu x)\alpha(x) = (\nu x)\beta(x)$,

V.2' $(\nu\xi)\alpha(\xi) = (\nu\zeta)\alpha(\zeta)$

Zadatak: Dokazati da su sheme V.1 i V.2 dokazive iz V.1' i V.2' u nekoj teoriji sa jednakošću.

1.8. Aritmetika prvog reda

Kao jedan primjer sistema prvog reda je *Sistem S*, ili, *Peanova aritmetika prvog reda*.

Jezik prvog reda sistema S je determinisan na sljedeći način:

1. Postoji samo jedan konstanta, '*a*', ali ćemo umjesto '*a*' pisati '0'.
2. Postoje tri funkcionalna slova, f^1, f^2_1, f^2_2, ali umjesto da pišemo $f^1(\tau)$ pisaćemo τ', umjesto da pišemo $f^2_1(\tau,\mu)$ pisaćemo $(\tau + \mu)$, i umjesto da pišemo $f^2_2(\tau, \mu)$ pisaćemo $(\tau\cdot\mu)$.
3. Postoji samo jedan predikatski simbol A^2_1, ali umjesto da pišemo $A^2_1(\tau, \mu)$ pisaćemo $\tau = \mu$.

Pravi ili nelogički aksiomi sistema S su:

S1. $(\forall x)\, x = x$

S2. $(\forall x)(\forall y)(x = y \Rightarrow y = x)$

S3. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z)$

S4. $(\forall x)(\forall y)(x = y \Rightarrow x' = y')$

S5. $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall y_1)(\forall y_2)((x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2) \Rightarrow (x_1 + y_1) = (x_2 + y_2) \wedge (x_1\cdot y_1) = (x_2\cdot y_2))$

S6. $(\forall x)(x' \neq 0)$

S7. $(\forall x)(\forall y)(x' = y' \Rightarrow x = y)$

S8. $(\forall x)((x + 0) = x)$

S9. $(\forall x)(\forall y)((x + y') = (x + y)')$
S10. $(\forall x)((x \cdot 0) = 0)$
S11. $(\forall x)(\forall y)((x \cdot y') = ((x \cdot y) + x))$
S12. $(\alpha(0) \wedge (\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \alpha(x'))) \Rightarrow (\forall x)\alpha(x)$.

Napomenimo da budući da S12 je shema-aksiom (nije jedan aksiom), to Sistem S ima beskonačno mnogo pravih aksioma.

Semantika za S:

Interpretacija za S kojoj težimo, nazvana *standardnom interpretacijom*, je sljedeća:
1. Domen kvantifikacija D je skup prirodnih brojeva $\{0, 1, 2, \ldots.\}$.
2. Konstantu '0' uzimamo za nulu.
3. Ekstenzija za '=' je relacija identiteta među prirodnim brojevima, tj. $\{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \ldots\}$.
4. Funkcije označena sa '‘', '+', and '·', su respektivno pridružene funkciji sukcesor, adiciji i multiplikaciji.

Kako je standardna interpretacija model za S, sistem S je konzistentan.

Mnoge druge aritmetičke oznake mogu biti uvedene u S sljedećim definicijama: na primjer:
(a) '1' za ' 0' ', '2' za '1' ', etc.
(b) $\tau < \mu$, za $(\exists\xi)(\xi \neq 0 \wedge (\tau + \xi) = \mu)$

Neki rezultati:

1. Svaka rekurzivna funkcija je reprezentatibilna u S, i svaka odlučiva rekurzivna osobina je ekspresivna u S.

2. **Gödel'ov prvi teorem nekompletnosti:** *Postoji zatvorena wff* α *jezika u S takva da niti je* α *niti je* $\neg\alpha$ *teorem u S.*
• Odavde zaključujemo da postoje wff-e tačne u standardnoj interpretaciji koje nisu teoreme u S.
• Te formule su istinite za bilo koju konzistentnu teoriju izgrađenu od S dodavanjem konačnog broja aksioma, ili čak dodavanjem rekurzivno odlučivog beskonačnog broja aksioma.
• Te formule su tačne za bilo koju konzistentnu teoriju prvog reda sa rekurzivno odlučivom listom wff-a za koju je tačno (1), uključujući bilo koju takvu teoriju prvog reda u kojima se aksiome teorije S deriviraju kao teoreme.

3. **Gödel'ov drugi teorem o nekompletnosti:** *Konzistentnost S-a ne može biti dokazana u S unutrašnjim sredstvima.*

4. Postoji nestandardni model za S, tj. model koji nije izomorfan standardnoj interpretaciji.

Zadatak: Dokazati da je $\vdash_S (\forall x)(\forall y)((y' + x) = (y + x)')$.
Uputstvo: Koristiti (S12) sa prethodnim kao posljedicom.

Glava II: NAIVNA TEORIJA SKUPOVA – FREGEOV PROJEKT

2.1. Fregeov i Hacherov sistem F

Gottlob Frege (1848-1925) prvi je logičar koji je u potpunosti uredio aksiomatski deduktivni račun te ga matematičari uvažavaju kao oca predikatske logike i, uopšte, matematičke logike. Frege je bio ubijeđeni logicista – pristalica teze da se matematika može redukovati na logiku te da su matematičke istine, u stvari, specijalni slučajevi logičkih istina. Frege je, ponekad naivno, pokušavao da dokaže prednost logicizma pronalaženjem formalnog sistema, čije su aksiome bile samo opšti logički principi. To je bilo jezgro predikatske logike koje postavljeno 1879 u Frege'ovom *Begriffsschrift*, i koji je proširio u teoriju skupova / klasa 1893 u njegovoj *Grundgesetze der Arithmetik*.

Nažalost Fregeov sistem *Grundgesetze* pokazao se nekonzistentnim. Hatcher je kreirao sistem, koji je nazvao "System F", poslije Gottloba Fregea, za koji se trudio da ga prezentira "u formi koja je vrlo blizu orginalu". Ovo nije bilo u potpunosti tačno. Međutim, Hatcherov system obavio je dobar posao objasnivši kako je moguće, sa naivnog aspekta, kreirati sistem u kojem se može definisati aritmetička bazna terminologija iz nekih osnovnih principa teorije brojeva pri čemu su ti bazni principi teorije brojeva dokazani iz nekih osnovnih aksioma o prirodi "classa", "skupova" ili, kako ih je Frege nazvao, "extensions of concepts".

2.2. Sistem F

2.2.1 Sintaksa: Jezik sistema F

Hatcher'ov sistem S koristi jezik prvog reda sa jednim predikatom i jednim *vbto*. Specijalno, imamo da:
(i) Ne postoje individualne konstante u Jeziku.

(ii) Ne postoje funkcionalni simboli u Jeziku.
(iii) Postoji jedno predikatsko slovo koje, umjesto da pišemo $A^2{}_1(\tau,\mu)$ pišemo u obliku $\tau\in\mu$. Čita se na jedan od sljedećih načina: "τ je član od μ", ili „τ je element u μ", ili jednostavno „τ je u μ".
(iv) Postoji jedan *vbto* koji formira terme u obliku $\{\xi : \alpha(\xi)\}$. Čita se "skup svih ξ takvih da je $\alpha(\xi)$", ili "klasa svih ξ takvih da $\alpha(\xi)$".

Predpostavlja se (za Hatcher'ov sistem) svaki element u domeni kvantifikacije trebalo bi da je skup ili klasa. Dakle, sistem F je sistem u kojem se identitet može definisati. Specijalno:
$\tau = \mu$ se definiše kao $(\forall\xi)(\xi\in\tau \Leftrightarrow \xi\in\mu)$, gdje je ξ prava varijabla koja nema slobodno pojavljivanje niti u τ niti u μ.

2.2.2 Aksiome sistema F

Dodajući logičkim aksiomama, sistem F sadrži sve instance sljedeće dvije sheme:

F1 $$(\forall x)(\forall y)(x = y \Rightarrow (\alpha(x,x) \Rightarrow \alpha(x,y))),$$
gdje je $\alpha(x,y)$ dobijeno iz $\alpha(x,x)$ zamjenom jednog ili više pojavljivanja 'x' sa 'y'.

F2 $$(\forall\zeta)(\zeta \in \{\xi : \alpha(\xi)\} \Leftrightarrow \alpha(\zeta)),$$
predpostavljajući da ζ nije ograničena u $\alpha(\xi)$. .

2.2.3. **Neki teorijsko-skupovni pojmovi**

Predpostavivši da ξ je prava varijabla koja nema slobodnih pojavljivanja niti u τ niti u μ, etc., uvodimo sljedeće pojmove

$(\tau \notin \mu)$ za $\neg(\tau\in\mu)$;
V za $\{x : x = x\}$;
Λ za $\{x : x \neq x\}$;
$\{\tau\}$ za $\{\xi : \xi = \tau\}$;
τ^C za $\{\xi : \xi \notin \tau\}$
$(\tau \cap \mu)$ zar $\{\xi : \xi \in \tau \wedge \xi \in\mu\}$;
$(\tau \cup \mu)$ za $\{\xi : \xi \in\tau \vee \xi\in\mu\}$;
$(\tau \subseteq \mu)$ za $(\forall\xi)(\xi\in\tau \Rightarrow \xi\in\mu)$; i
$(\tau - \mu)$ za $\{\xi : \xi\in\tau \wedge \xi \notin \mu\}$.

Iz F2 dobijamo sljedeća dva pravila pri čemu predpostavljamo da ni jedna slobodna varijabla u τ nije ograničena u $\alpha(\tau)$:

(F2R) $$\alpha(\tau) \vdash_F \tau \in \{\xi : \alpha(\xi)\}$$
$$\tau \in \{\xi : \alpha(\xi)\} \vdash_F \alpha(\tau)$$

Dobijaju se iz F2 pozivanjem na UI i BMP.

Neke teoreme:

T1 $\vdash_F (\forall x)(x = x)$ (Prema tome, F je teorija sa jednakošću.)

T2. $\vdash_F$ $(\forall x)(x \in \mathbf{V})$.
Dokaz:

1. $x = x$	T1, UI
2. $x \in \{x : x = x\}$	1 F2R
3. $x \in \mathbf{V}$	2, Def. **V**
4. $(\forall x)(x \in \mathbf{V})$	3 UG

T2.1 $\vdash_F$ $\mathbf{V} \in \mathbf{V}$

T3 $\vdash_F$ $(\forall x)(x \notin \Lambda)$

T4 $\vdash_F$ $(\forall x)((\forall y)(y \notin x) \Rightarrow x = \Lambda)$
T5 $\vdash_F$ $(\forall x)(\forall y)(y \in x \Rightarrow ((x - \{y\}) \cup \{y\}) = x)$

Zadaci: Bez pozivanja na Russell'ov paradoks ili neke druge kontradikcije, dokazati sljedeće :
(*a*) $\vdash_F$ $(\forall x)(\forall y)(x \cap y = y \cap x)$;
(*b*) $\vdash_F$ $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z)$; i
(*c*) $\vdash_F$ $(\forall x)(\forall y)(x - y = x \cap y^C)$

Prema Frege'ovom konceptu prirodnih brojeva, jedan prirodan broj je klasa klasa koji ima članove tako da se između njih može ustanoviti 1-1 korespodencija. Nula je klasa svih klasa koji nemaju elemenata; jedan je klasa svih jednočlanih klasa; dva je klasa svih dvočlanih klasa, i tako dalje.

2.2.4 Neki matematički pojmovi

0 za $\{\Lambda\}$;
τ' za $\{\xi : (\exists\zeta)(\zeta \in \xi \wedge \xi - \{\zeta\} \in \tau)\}$;
$\boldsymbol{N}$ za $\{x : (\forall y)(0 \in y \wedge (\forall z)(z \in y \Rightarrow z' \in y) \Rightarrow x \in y)\}$
1 za 0', 2 za 1', 3 za 2', etc.
$\mathrm{Fin}(\tau)$ za $(\exists\xi)(\xi \in \boldsymbol{N} \wedge \tau \in \xi)$; i
$\mathrm{Inf}(\tau)$ za $\neg\mathrm{Fin}(\tau)$

Neke teoreme:

T6 $\vdash_F$ $0 \in \boldsymbol{N}$ (Peano'ov Postulat 1)
Dokaz:

1. $0 \in y \wedge (\forall z)(z \in y \to z' \in y) \to 0 \in y$	Taut
2. $(\forall y)(0 \in y \wedge (\forall z)(z \in y \Rightarrow z' \in y) \Rightarrow 0 \in y)$	1 UG
3. $0 \in \{x : (\forall y)(x \in y \wedge (\forall z)(z \in y \to z' \in y) \Rightarrow x \in y)\}$	2 F2R
4. $0 \in \boldsymbol{N}$	3 Def. $\boldsymbol{N}$

T7 $\vdash_F$ $(\forall x)(0 \neq x')$ (Peano'ov Postulat 3)
Dokaz:

(1) 1. $0 = x'$	Hyp
2. $\Lambda = \Lambda$	T1, UI

	3. $\Lambda \in \{x : x = \Lambda\}$	2 F2R
	4. $\Lambda \in 0$	3 Dfs. 0, $\{\tau\}$
(1)	5. $\Lambda \in x'$	1, 4 LL
(1)	6. $\Lambda \in \{y : (\exists z)(z \in y \wedge y - \{z\} \in x)\}$	5, Def. ‘
(1)	7. $(\exists z)(z \in \Lambda \wedge \Lambda - \{z\} \in x)$	6 F2R
(1)	8. $a \in \Lambda \wedge \Lambda - \{a\} \in x$	7 EI
	9. $a \notin \Lambda$	T3, UI
(1)	10. $a \in \Lambda \wedge a \notin \Lambda$	8, 9 Simp, Conj
	11. $0 \neq x'$	1-10 RAA
	12. $(\forall x)(0 \neq x')$	11 UG

T8 $\vdash_F (\forall x)(x \in \boldsymbol{N} \Rightarrow x' \in \boldsymbol{N})$ (Peano’ov Postulat 2)

Dokaz:

(1)	1. $x \in \boldsymbol{N}$	Hyp
(1)	2. $x \in \{x : (\forall y)(0 \in y \wedge (\forall z)(z \in y \to z' \in y) \Rightarrow x \in y)\}$	1 Def. $\boldsymbol{N}$
(1)	3. $(\forall y)(0 \in y \wedge (\forall z)(z \in y \Rightarrow z' \in y) \Rightarrow x \in y)$	2 F2R
(4)	4. $0 \in y \wedge (\forall z)(z \in y \Rightarrow z' \in y)$	Hyp
(1)	5. $0 \in y \wedge (\forall z)(z \in y \Rightarrow z' \in y) \Rightarrow x \in y$	3 UI
(1,4)	6. $x \in y$	4,5 MP
(4)	7. $(\forall z)(z \in y \Rightarrow z' \in y)$	4 Simp
(4)	8. $x \in y \Rightarrow x' \in y$	7 UI
(1,4)	9. $x' \in y$	6, 8 MP
(1)	10. $0 \in y \wedge (\forall z)(z \in y \Rightarrow z' \in y) \Rightarrow x' \in y$	4-9 CP
(1)	11. $(\forall y)(0 \in y \wedge (\forall z)(z \in y \Rightarrow z' \in y) \Rightarrow x' \in y)$	10 UG
(1)	12. $x' \in \{x : (\forall y)(0 \in y \wedge (\forall z)(z \in y \Rightarrow z' \in y) \Rightarrow x \in y)\}$	11 F2R
(1)	13. $x' \in \boldsymbol{N}$	12 Def. $\boldsymbol{N}$
	14. $x \in \boldsymbol{N} \to x' \in \boldsymbol{N}$	1-13 CP
	15. $(\forall x)(x \in \boldsymbol{N} \Rightarrow x' \in \boldsymbol{N})$	14 UG

T9 $\vdash_F (\forall y)(0 \in y \wedge (\forall z)(z \in y \Rightarrow z' \in y) \to \boldsymbol{N} \subseteq y)$

Dokaz:

(1)	1. $0 \in y \wedge (\forall z)(z \in y \to z' \in y)$	Hyp
(2)	2. $x \in \boldsymbol{N}$	Hyp
(2)	3. $x \in \{x : (\forall y)(0 \in y \wedge (\forall z)(z \in y \Rightarrow z' \in y) \Rightarrow x \in y)\}$	2, Def. $\boldsymbol{N}$
(2)	4. $(\forall y)(0 \in y \wedge (\forall z)(z \in y \Rightarrow z' \in y) \Rightarrow x \in y)$	3 F2R
(2)	5. $0 \in y \wedge (\forall z)(z \in y \Rightarrow z' \in y) \Rightarrow x \in y$	4 UI
(1,2)	6. $x \in y$	1, 5 MP
(1)	7. $x \in \boldsymbol{N} \Rightarrow x \in y$	2-6 CP
(1)	8. $(\forall x)(x \in \boldsymbol{N} \Rightarrow x \in y)$	7 UG
(1)	9. $\boldsymbol{N} \subseteq y$	8 Def. $\subseteq$
	10. $0 \in y \wedge (\forall z)(z \in y \Rightarrow z' \in y) \Rightarrow \boldsymbol{N} \subseteq y$	1-9 CP
	11. $(\forall y)[10]$	10 UG

T10 $\vdash_F \alpha(0) \wedge (\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \alpha(x')) \Rightarrow (\forall x)(x \in \boldsymbol{N} \Rightarrow \alpha(x))$ (Peano’ov Postulat 5)

Dokaz:

(1)	1. $\alpha(0) \wedge (\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \alpha(x'))$	Hyp
(2)	2. $x \in \boldsymbol{N}$	Hyp
	3. $0 \in \{y : \alpha(y)\} \wedge (\forall z)(z \in \{y : \alpha(y)\} \Rightarrow z' \in \{y : \alpha(y)\}) \Rightarrow \boldsymbol{N} \subseteq \{y : \alpha(y)\}$	T9, UI
(1)	4. $\alpha(0)$	1 Simp
(1)	5. $0 \in \{y : \alpha(y)\}$	4 F2R
(6)	6. $z \in \{y : \alpha(y)\}$	Hyp
(6)	7. $\alpha(z)$ 6 F2R	
(1)	8. $\alpha(z) \Rightarrow \alpha(z')$	1, Simp, UI
(1,6)	9. $\alpha(z')$	7, 8 MP
(1,6)	10. $z' \in \{y : \alpha(y)\}$	9 F2R
(1)	12. $z \in \{y : \alpha(y)\} \Rightarrow z' \in \{y : \alpha(y)\}$	6-10 CP
(1)	13. $(\forall z)(z \in \{y : \alpha(y)\} \Rightarrow z' \in \{y : \alpha(y)\})$	12 UG
(1)	14. $\boldsymbol{N} \subseteq \{y : \alpha(y)\}$	3, 5, 13, Conj, MP
(1)	15. $(\forall x)(x \in \boldsymbol{N} \Rightarrow x \in \{y : \alpha(y)\})$	14 Def. $\subseteq$
(1,2)	16. $x \in \{y : \alpha(y)\}$	2, 15, UI, MP
(1,2)	17. $\alpha(x)$	16 F2R
(1)	18. $x \in \boldsymbol{N} \Rightarrow \alpha(x)$	2-17 CP
(1)	19. $(\forall x)(x \in \boldsymbol{N} \Rightarrow \alpha(x))$	18 UG
	20. $\alpha(0) \wedge (\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \alpha(x')) \Rightarrow (\forall x)(x \in \boldsymbol{N} \Rightarrow \alpha(x))$	1-19 CP

Posljedice:

T11 $\vdash_F (\forall x)(0 \in x \wedge (\forall y)(y \in x \wedge y \in \boldsymbol{N} \Rightarrow y' \in x) \Rightarrow \boldsymbol{N} \subseteq x)$

T12 $\vdash_F \alpha(0) \wedge (\forall x)(x \in \boldsymbol{N} \wedge \alpha(x) \Rightarrow \alpha(x')) \Rightarrow (\forall x)(x \in \boldsymbol{N} \Rightarrow \alpha(x))$

2.2.5. Prema beskonačnosti i iza toga

Do sada smo dobili četri od pet Peano'ovih postulata. Poslednji, da ne postoje dva prirodna broja koja imaju iste sljedbenike je mnogo teži za dokazivanje. Zašto je to tako najbolje se razumije uzimajući u obzir Frege'ovu definiciju prirodnih brojeva. Oni su klase kao, na primjer, sljedeće:

0 = {{}}
1 = {{Ernie},{Bert},{Elmo},{Gonzo},…}
2 = {{Ernie, Bert}, {Big Bird, Snuffy}, {Kermit, Piggy}, …}
3 = {{Animal, Fozzie, Rolf}, {Jennifer, Angelina, Brad}, …}
etc.

Napomenimo da ako bi bilo samo konačno mnogo objekata, tj. ako bi postojao neki prirodan broj n takav da je :

$$n = \{\mathbf{V}\}$$

tada bi sukcesor od n trebalo da bude prazna klasa, budući da ne postoji skup koji ima članove koje bi trebalo da formiraju **V**. Pream tome, imali bi:

$n+1 = \{\}$
$n+2 = \{\}$ i, prema tome $n+1 = n+2$.

Dakle, oba elementa n i n+1 imaju isti sukcesor, ali je $n \neq n+1$. Odavde zaključujemo da bi, u slučaju da ima samo konačno mnogo objekata, tada bi četvrti Peano'ov postulat bio pogrešan.

Da bi dokazali četvrti Peano'ov postulat, moramo dokazati teorem o beskonačnosti: da univerzalna klasa nije član niti jednog prirodnog broja. U Frege'ovoj logici, ovo je moguće uraditi na nekoliko načina. Mi ćemo to uraditi pokazujući da sljedeći niz, niz ω, nema kraja:

Λ
$\{\Lambda\}$
$\{\Lambda, \{\Lambda\}\}$
$\{\Lambda, \{\Lambda\}, \{\Lambda, \{\Lambda\}\}\}$
$\{\Lambda, \{\Lambda\}, \{\Lambda, \{\Lambda\}\}, \{\Lambda, \{\Lambda\}, \{\Lambda, \{\Lambda\}\}\}\}$
…

Definicija: ω za $\{x : (\forall y)(\Lambda \in y \wedge (\forall z)(z \in y \Rightarrow z \cup \{z\} \in y) \Rightarrow x \in y)\}$.

Uočimo sličnost između definicija za ω i $\boldsymbol{N}$.

T13 $\vdash_F (\forall x)(x \in \boldsymbol{N} \Rightarrow (\forall y_1)(\forall y_2)(\forall z)(y_1 \in z \wedge y_2 \in z \wedge z - \{y_1\} \in x \Rightarrow z - \{y_2\} \in x))$

T14 $\vdash_F (\forall x)(x \in \boldsymbol{N} \Rightarrow (\forall y)(\forall z)(y \in x \wedge \mathrm{z} \in x \wedge y \subseteq z \Rightarrow y = z)$

Zadaci: Dokazati T14. (Koristiti T12 i T13).

T15 $\vdash_F \Lambda \in \omega$

T16 $\vdash_F (\forall x)(\Lambda \neq x \cup \{x\})$

T17 $\vdash_F (\forall x)(x \in \omega \Rightarrow x \cup \{x\} \in \omega)$

T18 $\vdash_F (\forall x)(\Lambda \in x \wedge (\forall z)(z \in x \Rightarrow z \cup \{z\} \in x) \Rightarrow \omega \subseteq x)$

T19 $\vdash_F \alpha(\Lambda) \wedge (\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \alpha(x \cup \{x\})) \Rightarrow (\forall x)(x \in \omega \Rightarrow \alpha(x))$

T20 $\vdash_F (\forall x)(x \in \omega \Rightarrow (\forall y)(y \in x \Rightarrow y \subseteq x))$
Dokaz:

	1. $y \notin \Lambda$	T3, UI
	2. $y \in \Lambda \Rightarrow y \subseteq \Lambda$	1 FA
	3. $(\forall y)(y \in \Lambda \rightarrow y \subseteq \Lambda)$	2 UG
(4)	4. $(\forall y)(y \in x \Rightarrow y \subseteq x)$	Hyp
(5)	5. $y \in x \cup \{x\}$	Hyp
(5)	6. $y \in \{y : y \in x \vee y \in \{x\})$	5 Def. $\cup$
(5)	7. $y \in x \vee y \in \{x\}$	6 F2R
	8. $y \in \{x\} \Rightarrow y = x$	Def. $\{\tau\}$, F2, UI, BE
	9. $y = x \Rightarrow y \subseteq x$	Def. =, $\subseteq$, Logic

	10. $y \in \{x\} \Rightarrow y \subseteq x$	8,9 HS
(4)	11. $y \in x \Rightarrow y \subseteq x$	4 UI
(4,5)	12. $y \subseteq x$	7, 10, 11 CD
(13)	13. $z \in y$	Hyp
(4,5,13)	14. $z \in x$	12, 13, Def. $\subseteq$, UI, MP
(4,5,13)	15. $z \in x \vee z \in \{x\}$	14 Add
(4,5,13)	16. $z \in \{y : y \in x \vee y \in \{x\}\}$	15 F2R
(4,5,13)	17. $z \in x \cup \{x\}$	16 Def. $\cup$
(4,5)	18. $z \in y \Rightarrow z \in x \cup \{x\}$	13-17 CP
(4,5)	19. $(\forall z)(z \in y \Rightarrow z \in x \cup \{x\})$	18 UG
(4,5)	20. $y \subseteq x \cup \{x\}$	19. Df. □
(4)	21. $y \in x \cup \{x\} \Rightarrow y \subseteq x \cup \{x\}$	5-20 CP
(4)	22. $(\forall y)(y \in x \cup \{x\} \Rightarrow y \subseteq x \cup \{x\})$	21 UG
	23. $(\forall y)(y \in x \Rightarrow y \subseteq x) \Rightarrow (\forall y)(y \in x \cup \{x\} \Rightarrow y \subseteq x \cup \{x\})$	4-22 CP
	24. $(\forall x)((\forall y)(y \in x \Rightarrow y \subseteq x) \Rightarrow (\forall y)(y \in x \cup \{x\} \Rightarrow y \subseteq x \cup \{x\}))$	23 UG
	25. $(\forall x)(x \in \omega \Rightarrow (\forall y)(y \in x \rightarrow y \subseteq x))$	3, 24, T19, Conj, MP

T21 $\vdash_F (\forall x)(\Lambda \in x \wedge (\forall z)(z \in x \wedge z \in \omega \Rightarrow z \cup \{z\} \in x) \Rightarrow \omega \subseteq x)$

T22 $\vdash_F \alpha(\Lambda) \wedge (\forall x)(\alpha(x) \wedge x \in \omega \Rightarrow \alpha(x \cup \{x\})) \Rightarrow (\forall x)(x \in \omega \Rightarrow \alpha(x))$
Dokaz je analogan dokazima teorema T11 i T12.

T23 $\vdash_F (\forall x)(x \in \omega \rightarrow x \notin x)$
Dokaz:

	1. $\Lambda \notin \Lambda$	T3, UI
(2)	2. $x \notin x \wedge x \in \omega$	Hyp
(3)	3. $x \cup \{x\} \in x \cup \{x\}$	Hyp
(3)	4. $x \cup \{x\} \in \{y : y \in x \vee y \in \{x\})$	3. Def
(3)	5. $x \cup \{x\} \in x \vee x \cup \{x\} \in \{x\}$	4 F2R
(6)	6. $x \cup \{x\} \in \{x\}$	Hyp
(6)	7. $x \cup \{x\} \in \{y : y = x\}$	6 Def. $\{\tau\}$
(6)	8. $x \cup \{x\} = x$	7 F2R
	9. $x \cup \{x\} \in \{x\} \Rightarrow x \cup \{x\} = x$	6-8 CP
(10)	10. $x \cup \{x\} \in x$	Hyp
(2)	11. $(\forall y)(y \in x \Rightarrow y \subseteq x)$	2, T20, UI, MP
(2,10)	12. $x \cup \{x\} \subseteq x$	10, 11, UI, MP
	13. $x \subseteq x \cup \{x\}$	Def. $\subseteq$, $\cup$, F2R
(2,10)	14. $x \cup \{x\} = x$	12, 13, Def. $\subseteq$,=
(2)	15. $x \cup \{x\} \in x \Rightarrow x \cup \{x\} = x$	10-14 CP
(2,3)	16. $x \cup \{x\} = x$	5, 9, 15 CD
(2,3)	17. $x \in x$	3, 16 LL
(2,3)	18. $x \in x \wedge x \notin x$	2, 17, Simp, Conj
(2)	19. $x \cup \{x\} \notin x \cup \{x\}$	3-18 RAA
	20. $x \notin x \wedge x \in \omega \Rightarrow x \cup \{x\} \notin x \cup \{x\}$	2-19 CP

21. $(\forall x)[20]$ 20 UG
22. $(\forall x)(x \in \omega \to x \notin x)$ 1, 21, T22, Conj, MP

T24 $\vdash_F (\forall x)(\forall y)(x \in \omega \wedge y \in \boldsymbol{N} \wedge x \in y \Rightarrow x \cup \{x\} \in y')$
Proof: Laka se dobija kao posljedica od T23.

T25 $\vdash_F (\forall x)(x \in \boldsymbol{N} \Rightarrow (\forall y)(y \in \omega \wedge y \in x))$
Dokaz:

	1. $\Lambda \in 0$	Df. 0, Ref=, F2R
	2. $\Lambda \in \omega \wedge \Lambda \in 0$	1, T15, Conj
	3. $(\exists y)(y \in \omega \wedge y \in 0)$	2 EG
(4)	4. $x \in \boldsymbol{N} \wedge (\exists y)(y \in \omega \wedge y \in x)$	Hyp
(4)	5. $(\exists y)(y \in \omega \wedge y \in x)$	4 Simp
(4)	6. $a \in \omega \wedge a \in x$	5 EI
(4)	7. $a \in \omega \wedge x \in \boldsymbol{N} \wedge a \in x \Rightarrow a \cup \{a\} \in x'$	T24 UI×2
(4)	8. $a \cup \{a\} \in x'$	4, 6, 7 Simp, Conj, MP
(4)	9. $a \cup \{a\} \in \omega$	6, T17, UI, MP
(4)	10. $a \cup \{a\} \in \omega \wedge a \cup \{a\} \in x'$	8, 9 Conj
(4)	11. $(\exists y)(y \in \omega \wedge y \in x')$	10 EG
	12. $x \in \boldsymbol{N} \wedge (\exists y)(y \in \omega \wedge y \in x) \Rightarrow (\exists y)(y \in \omega \wedge y \in x')$	4-12 CP
	13. $(\forall x)(x \in \boldsymbol{N} \wedge (\exists y)(y \in \omega \wedge y \in x) \Rightarrow (\exists y)(y \in \omega \wedge y \in x'))$	12 UG
	14. $(\exists x)(x \in \boldsymbol{N} \Rightarrow (\exists y)(y \in \omega \wedge y \in x))$	3, 13, T12, Conj, MP

T26 $\vdash_F \Lambda \notin \boldsymbol{N}$
Dokaz: Očigledna posljedica iz T25.

T27 $\vdash_F (\forall x)(x \in \mathbf{V})$
*Dokaz:*Očigledno.

T28 $\vdash_F (\forall x)\neg(\mathbf{V} \in x \wedge x \in \boldsymbol{N})$.
Dokaz:

(1)	1. $\mathbf{V} \in x \wedge x \in \boldsymbol{N}$	Hyp
(2)	2. $y \in x'$	Hyp
(2)	3. $y \in \{y : (\exists z)(z \in y \vee y - \{z\} \in x)\}$	2, Def. ‘
(2)	4. $(\exists z)(z \in y \vee y - \{z\} \in x)$	3 F2R
(2)	5. $a \in y \vee y - \{a\} \in x$	4 EI
	6. $y - \{a\} \subseteq \mathbf{V}$	T27 UI
	7. $x \in \boldsymbol{N} \Rightarrow (\forall y)(\forall z)(y \in x \wedge z \in x \wedge y \subseteq z \Rightarrow y = z)$	T14 UI
(1)	8. $(\forall y)(\forall z)(y \in x \wedge z \in x \wedge y \subseteq z \Rightarrow y = z)$	1, 7, Simp, MP
(1, 2)	9. $y - \{a\} \in x \wedge \mathbf{V} \in x \wedge y - \{a\} \subseteq \mathbf{V} \Rightarrow y - \{a\} = \mathbf{V}$	8 UI×2
(1, 2)	10. $y - \{a\} = \mathbf{V}$	1, 5, 6, Simp, Conj, MP
(11)	11. $a \in y - \{a\}$	Hyp
(11)	12. $a \in \{x : x \in y \wedge x \notin \{a\}\}$	11 Def. –
(11)	13. $a \in y \wedge a \in \{a\}$	12 F2R
	14. $a \in \{a\}$	Ref.=, F2R, Def. $\{\tau\}$

(11)	15. $a \in \{a\} \wedge a \notin \{a\}$	13, 14, Simp, Conj
	16. $a \notin y - \{a\}$	11-15 RAA
(1, 2)	17. $a \notin \mathbf{V}$	10, 16 LL
	18. $a \in \mathbf{V}$	T2 UI
(1, 2)	19. $a \in \mathbf{V} \wedge a \notin \mathbf{V}$	17, 18 Conj
(1)	20. $y \notin x'$	2-19 RAA
(1)	21. $(\forall y)(y \notin x')$	20 UG
(1)	22. $x' = \Lambda$	T4, UI, MP
(1)	23. $x' \in \boldsymbol{N}$	1, Simp, T8, UI, MP
(1)	24. $\Lambda \in \boldsymbol{N}$	22, 23 LL
	25. $\Lambda \notin \boldsymbol{N}$	T26
(1)	26. $\Lambda \in \boldsymbol{N} \wedge \Lambda \notin \boldsymbol{N}$	24, 25 Conj
	27. $\neg(\mathbf{V} \in x \wedge x \in \boldsymbol{N})$	1-26 RAA
	28. $(\forall x)\neg(\mathbf{V} \in x \wedge x \in \boldsymbol{N})$	27 UG

T28.1 $\vdash_F$ Inf(**V**).
Dokaz: Negacija rezultata teorema T28.

T28.2 $\vdash_F (\forall x)(\forall y)(x \in \boldsymbol{N} \wedge y \in x \Rightarrow (\exists x_1)(x_1 \notin y))$
Dokaz:

(1)	1. $x \in \boldsymbol{N} \wedge y \in x$	Hyp
(1)	2. $y \neq \mathbf{V}$	1, T28, F1, logic
	3. $(\forall x_1)(x_1 \in y) \Rightarrow y = \mathbf{V}$	Def. =, T2, logic
(1)	4. $\neg(\forall x_1)(x_1 \in y)$	2, 3 MT
(1)	5. $(\exists x_1)(x_1 \notin y)$	4 CQ, Def. $\notin$
	6. $x \in \boldsymbol{N} \wedge y \in x \Rightarrow (\exists x_1)(x_1 \notin y)$	1-5 CP
	7. $(\forall x)(\forall y)(x \in \boldsymbol{N} \wedge y \in x \Rightarrow (\exists x_1)(x_1 \notin y))$	6 UG

Konačno smo u poziciji da dokažemo preostali Peano'ov postulat:

$\vdash_F (\forall x)(\forall y)(x \in \boldsymbol{N} \wedge y \in \boldsymbol{N} \wedge x' = y' \Rightarrow x = y)$. (Peano'ov Postulat 4)
Dokaz.

(1)	1. $x \in \boldsymbol{N} \wedge y \in \boldsymbol{N} \wedge x' = y'$	Hyp
(2)	2. $z \in x$	Hyp
(1,2)	3. $(\exists x_1)(x_1 \notin z)$	1, 2, T28.2, Conj, Simp, UI, MP
(1,2)	4. $a \notin z$	3 EI
(5)	5. $x_1 \in z$	Hyp
(1,2,5)	6. $x_1 \neq a$	4, 5 F1, UI, TAFC, MT
(1,2,5)	7. $x_1 \notin \{a\}$	F2, Def. $\{\tau\}$, UI, BMT
(5)	8. $x_1 \in z \vee x_1 \in \{a\}$	5 Add
(5)	9. $x_1 \in \{x : x \in z \vee x \in \{a\}\}$	8 F2R
(5)	10. $x_1 \in z \cup \{a\}$	9 Def. $\cup$
(1,2,5)	11. $x_1 \in z \cup \{a\} \wedge x_1 \notin \{a\}$	7, 10 Conj
(1,2,5)	12. $x_1 \in \{x : x \in z \cup \{a\} \wedge x \notin \{a\}\}$	11 F2R
(1,2,5)	13. $x_1 \in ((z \cup \{a\}) - \{a\})$	12, Def.–

(1,2)	14. $x_1 \in z \Rightarrow x_1 \in ((z \cup \{a\}) - \{a\})$	5-13 CP
(15)	15. $x_1 \in ((z \cup \{a\}) - \{a\})$	Hyp
(15)	16. $x_1 \in \{x : x \in z \cup \{a\} \wedge x \notin \{a\}\}$	15 Def.–
(15)	17. $x_1 \in z \cup \{a\} \wedge x_1 \notin \{a\}$	16 F2R
(15)	18. $x_1 \in z \cup \{a\}$	17 Simp
(15)	19. $x_1 \in \{x : x \in z \vee x \in \{a\}\}$	18 Def. $\cup$
(15)	20. $x_1 \in z \vee x_1 \in \{a\}$	19 F2R
(15)	21. $x_1 \in z$	17, 20, Simp, DS
	22. $x_1 \in ((z \cup \{a\}) - \{a\}) \Rightarrow x_1 \in z$	15-21 CP
(1,2)	23. $x_1 \in z \Leftrightarrow x_1 \in ((z \cup \{a\}) - \{a\})$	14, 22 BI
(1,2)	24. $(\forall x_1)[23]$	23 UG
(1,2)	25. $z = ((z \cup \{a\}) - \{a\})$	24 Def. =
(1,2)	26. $((z \cup \{a\}) - \{a\}) \in x$	2, 25 LL
	27. $a \in \{a\}$	Ref.=, F2R
	28. $a \in z \vee a \in \{a\}$	27 Add, Com
	29. $a \in z \cup \{a\}$	28, F2R, Def. $\cup$
(1,2)	30. $a \in z \cup \{a\} \wedge ((z \cup \{a\}) - \{a\}) \in x$	26, 29 Conj
(1,2)	31. $(\exists y)(y \in z \cup \{a\} \wedge ((z \cup \{a\}) - \{y\}) \in x)$	30 EG
(1,2)	32. $z \cup \{a\} \in \{z : (\exists y)(y \in z \wedge z - \{y\} \in x)\}$	31 F2R
(1,2)	33. $z \cup \{a\} \in x'$	32 Def. ‘
(1,2)	34. $z \cup \{a\} \in y'$	1, 33, Simp, LL
(1,2)	35. $z \cup \{a\} \in \{x : (\exists x_1)(x_1 \in x \wedge x - \{x_1\} \in y)\}$	34 Def. ‘
(1,2)	36. $(\exists x_1)(x_1 \in z \cup \{a\} \wedge ((z \cup \{a\}) - \{x_1\}) \in y)$	35 F2R
(1,2)	37. $b \in z \cup \{a\} \wedge ((z \cup \{a\}) - \{b\}) \in y$	36 EI
	38. $y \in \boldsymbol{N} \Rightarrow (\forall y_1)(\forall y_2)(\forall z)(y_1 \in z \wedge y_2 \in z \wedge z - \{y_1\} \in y) \Rightarrow (z - \{y_2\} \in y)$	T13 UI
(1)	39. $(\forall y_1)(\forall y_2)(\forall z)(y_1 \in z \wedge y_2 \in z \wedge z - \{y_1\} \in y) \Rightarrow (z - \{y_2\} \in y)$	1,38 Logic
(1)	40. $b \in z \cup \{a\} \wedge a \in z \cup \{a\} \wedge (z \cup \{a\}) - \{b\} \in y \Rightarrow (z \cup \{a\}) - \{a\} \in y$	39 UI×3
(1,2)	41. $((z \cup \{a\}) - \{a\}) \in y$	29, 37, 40 Logic
(1,2)	42. $z \in y$	25, 41 LL
(1)	43. $z \in x \Rightarrow z \in y$	2-42 CP
(1)	44. $z \in y \Rightarrow z \in x$	(CP just like 2-42)
(1)	45. $z \in x \Leftrightarrow z \in y$	43, 44, BMP
(1)	46. $(\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)$	45 UG
(1)	47. $x = y$	46 Def. =
	48. $x \in \boldsymbol{N} \wedge y \in \boldsymbol{N} \wedge x' = y' \Rightarrow x = y$	1-47 CP
	49. $(\forall x)(\forall y)(x \in \boldsymbol{N} \wedge y \in \boldsymbol{N} \wedge x' = y' \Rightarrow x = y)$	48 UG×2

Kompletiranjem argumenta da se sva Peano’ova aritmetika može derivirati u Frege’ovom sistemu trebalo bi da nastavimo da dajemo definicije adicije i multiplikacije i izvedemo njihove rekurzivne osobine. Međutim, to ovdje nećemo raditi, već ćemo našu pažnju obratiti na probleme koji se pojavljuju u sistemu F.

2.2.6. Russell’ov Paradoks

Sistem F je nekonzistentan zbog *Russell’ovog Paradosa*:

Neki skupovi su sami sebi element. Univerzalni skup, **V**, je član u **V.** Neki skupovi nisu članovi sami sebi, kao na primjer, skupovi Λ ili 0. Neka je *W* skup koji se sastoji od svih skupova koji nisu sami sebi element. Sljedeće pitanje je prirodno: Je li on sam sebi skup? To je onda i samo onda ako nije.

$\vert\!-_{F}\ \{x : x \notin x\} \notin \{x : x \notin x\} \wedge \{x : x \notin x\} \in \{x : x \notin x\}$

1. $(\forall y)(y \in \{x : x \notin x\} \Leftrightarrow y \notin y\})$	F2
2. $\{x : x \notin x\} \in \{x : x \notin x\} \Leftrightarrow \{x : x \notin x\} \notin \{x : x \notin x\}$	1 UI
3. $\{x : x \notin x\} \in \{x : x \notin x\} \Rightarrow \{x : x \notin x\} \notin \{x : x \notin x\}$	2 BE
4. $\{x : x \notin x\} \notin \{x : x \notin x\} \Rightarrow \{x : x \notin x\} \in \{x : x \notin x\}$	2 BE
5. $\{x : x \notin x\} \notin \{x : x \notin x\} \vee \{x : x \notin x\} \notin \{x : x \notin x\}$	3 Def.$\Rightarrow$
6. $\{x : x \notin x\} \notin \{x : x \notin x\}$	5 Red
7. $\{x : x \notin x\} \in \{x : x \notin x\}$	4,6 MP
8. $\{x : x \notin x\} \notin \{x : x \notin x\} \vee \{x : x \notin x\} \in \{x : x \notin x\}$	6,7 Conj

Odavde slijedi da svaka wwf α u F je teorem u F: $\vert\!-_{F}\ \alpha$

1. $\{x : x \notin x\} \notin \{x : x \notin x\}$	linija 6
2. $\{x : x \notin x\} \in \{x : x \notin x\}$	linija 7
3. $\{x \mid x \notin x\} \in \{x \mid x \notin x\} \vee \alpha$	2 Add
4. α	1,3 DS

Ipak, ovo nije jedina kontradikcija u sistemu F. On je takođe podložan Cantor'ovom Paradosu, Burali-Forti'jevom Paradoksu, Russellian'ovom Paradoksu Relacija u proširenjima, kao i nekim drugim. Očigledno, ovo predstavlja glavnu obstrukciju u korištenju sistema F kao nekog fundamentalnog za aritmetiku.

Sasvim opravdano pitanje je: šta je pogrešno kod sistema F? Da li postoji neki način da se ovaj sistem modifikuje ili izmjeni u cilju sačuvavanja njegovih metoda konstruisanja aritmetike ali bez mogućnosti da nam se negdje pokaže kontradikcija?

Zadaci: Dokazati nekonzistentnost sistema sličnog sistemu F ali bez ijednog *vbto*, čije su aksiome (F1) i (F2'): $(\exists y)(\forall x)(x \in y \Leftrightarrow \alpha(x))$, gdje $\alpha(x)$ ne sadrži slobodno '*y*' .

2.3. Istorijski pregled izgradnje Fregeovog sistema

Frege'ov sistem iz 1893 *Grundgesetze der Arithmetik* bio je znatno različit od gornjeg. Te dramatične razlike su bile u sljedećem:
(1) Frege'ov sistem bio je *drugog reda*, što znači da su postojale i funkcionalne i predikatske varijable kao individualne varijable.
(2) Frege'ov sistem bio je *funkcionalni račun* prije nego li *predikatski račun*, pri čemu mislimo da nisu postojale razlike između funkcija i predikata.

Za Frege'a, jedna formula mogla je biti ili tačna ili pogrešna. A rečenice koje su se sastojale od *imena terma za istinosne vrijednsoti* dobijene tokom neprirodnog forsiranja oznaka nazivamo "odlučujuća valucija" ("judgment stroke"). Ta odlučujuća valucija bila je zapisana sa „$|-$" a ovo nije trebalo zamjenjivati sa meta-teorijskom oznakom koja je korištena da se kaže da je nešta teorem.

2.3.1. Sintaksa Frege'ovog sistema GG (u nekoj modernizovanoj varijanti)

Objekt varijabla je bilo koje od slova x, y, z, pisanih sa ili bez donjih indeksa. (Na primjer, "x_2", "y_{32}", etc.)

Funkcionalna varijabla prvog nivoa je bilo koje od slova F, G, H, I, J, K, L, R, S, T, f, g, h, i, j ili k napisanih sa gornjim indeksima ≥ 1, i sa ili bez donjih indeksa. (Na primjer, "$f^1{}_2$", "$R^3{}_1$", etc.)

Funkcionalna varijabla drugog nivoa je bilo koje od slova M, N, O, P, Q, napisanih sa ili bez donjih indeksa. (Na primjer, "M_3", etc.).

(*Napomena*: Sve funkcionalne varijable drugog nivoa imaju samo jedan argument. Gornji indeks kod funkcionalnih varijabli prvog nivoa govore nam koliko mnogo argumenata ova funkcija ima.)

Ovaj sistem koristi sljedeće logičke konstante / operatore:

$$—, \neg, \Rightarrow, =, \iota, \forall, \{\ \_ : \ldots\}.$$

Dobro formirana ekspresija (well-formed expression - *wfe*) je definisana rekurzivno na sljedeći način:

1. Objekt varijabla je *wfe*.
2. Ako je φ funkcionalna varijabla prvog nivoa sa gornjim indeksom n, a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ su neke wfe, tada je i $\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ takođe *wfe*.
3. Ako je α *wfe*, tada je $—\alpha$ takođe *wfe*.
4. Ako je α *wfe*, tada je i $\neg\alpha$ *wfe*.
5. Ako je α *wfe*, tada je $\iota\alpha$ takođe *wfe*.
6. Ako su α i β *wfes*, tada je i $(\alpha \Rightarrow \beta)$ *wfe*.
7. Ako su α i β *wfes*, tada je i $(\alpha = \beta)$ *wfe*.
8. Ako je Π funkcionalna varijabla drugog nivoa, a $\alpha(\xi)$ je wfe koja ima slobodno pojavljivanje objekt varijable ξ,, tada je i $((\Pi\xi)\ \alpha(\xi))$ takođe *wfe*. (Svako pojavljivanje varijable ξ se smatra ograničenim u $((\Pi\xi)\ \alpha(\xi))$.)
9. Ako je $\alpha(\xi)$ wfe koja ima slobodno pojavljivanje object varijable ξ,, tada $((\forall\xi)\ \alpha(\xi))$ je takođe *wfe*.
10. Ako je $\alpha(\varphi(\beta))$ wfe koje ima slobodno pojavljivanje funkcionalne varijable prvog nivoa φ, tada je $((\forall\varphi)\alpha(\varphi(\beta)))$ *wfe*.
11. Ako je $\alpha(\xi)$ wfe koje sadrži slobodno pojavljivanje objekt varijable ξ, tada je $\{\xi : \alpha(\xi)\}$ takođe *wfe*. (Sva pojavljivanja varijable ξ se smatraju ograničenim u $\{\xi : \alpha(\xi)\}$.)

Ako je α wfe, tada hen $|- \alpha$ je *propozicija* ili *formula*, koja označava da je α tačno.

2.3.2. Namjenjena semantika

Budući da je GG nekonzistentan sistem, on nemože imati „model“ u savremenom smislu. Međutim, uzimajući u obzir Frege'ovi intenciju objekt varijable bi trebalo da budu rangirane nad bilo kojim objektima, uključujući i skupove istinitosnih rviednosti. Funkcijske varijable prvog nivoa bi trebalo da su gangirane nad bilo kakvim funkcijama prvog nivoa kao objektima.

Konstante su se upotrebljavale na sljedeći način:

(a) $\ulcorner —\alpha \urcorner$ označava tačno ako α označava tačno, i označava pogrešno u ostalim slučajevima.

(b) $\ulcorner \neg\ \alpha \urcorner$ označava pogrešno ako α označava tačno, a u ostalim slučajevima označava tačno.

(c) $\ulcorner (\alpha \Rightarrow \beta) \urcorner$ označava pogrešno ako α označava tačno a β označava pogrešno, i u ostalim slučajevima označava tačno.

(d) $\ulcorner (\alpha = \beta) \urcorner$ ooznačava tačno ako α označava isto što označava i β, i u ostalim slučajevima označava pogrešno.

(e) $\ulcorner \{\xi : \alpha(\xi)\} \urcorner$ označava rang istinitosnih vrijednosti funkcije predstavljene sa $\alpha()$; u stvari, ako $\alpha(\xi)$ predstavlja istinitosnu vrijednost za svaku vrijednost koju može uzeti, tada $\ulcorner \{\xi : \alpha(\xi)\} \urcorner$ označava klasu svih vrijednosti za ξ koje zadovoljavaju $\alpha(\xi)$.

(f) $\ulcorner \iota\alpha \urcorner$ ili označava samostalan object koji je data funkcijom F preslikava u tačno ako α označava rang istinitosnih vrijednosti, ili označava istu stvar kao α u ostalim slučajevima.

Ostali zajednički logički operatori: $\vee$, $\wedge$, $\Leftrightarrow$, $(\exists\xi)$, $(\exists\varphi)$, etc. Su svi definisani onako kako se očekuje da jesu.

2.3.3. Formulacija: Aksiomi ili "Osnovni zakoni"

(I) $\vdash x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$

(IIa) $\vdash (\forall x)F(x) \Rightarrow F(y)$

(IIb) $\vdash (\forall F)((Mx)F(x)) \Rightarrow (Mx)G(x)$

(III) $\vdash g(x = y) \Rightarrow g((\forall F)(F(x) \Rightarrow F(y)))$

(IV) $\vdash \neg\,(—x = \neg\, y) \Rightarrow (—x = —y)$

(V) $\vdash (\{x : F(x)\} = \{y : G(y)\}) \Leftrightarrow (\forall x)(F(x) = G(x))$

(VI) $\vdash x = \iota\{y : y = x\}$

Ako su varijable višeg nivoa u Frege'ovom sistemu ograničene na funkcije čije su istinitosne vrijednosti uvijek tačne, tada zakon (V) treba napisati ovako:

(V*) $\vdash (\{x : F(x)\} = \{y : G(x)\}) \Leftrightarrow (\forall x)(F(x) \Leftrightarrow G(x))$.

Frege nebi prihvatio zakon (V) u ovoj formi, ali on se u ovoj formi može često naći u ostalim frege'ovim spisama napisanim kasnije kao i kod neo-Frege'ovaca.

Pravila yaključivanja su: (i) modus ponens, (ii) transposition, (iii) hypothetical syllogism, (iv) inevitability, (v) interchange, (vi) antecedent amalgamation, viz., iz $\vdash \alpha \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$, izvodi se $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$; (vii) —amalgamation: brisanje ili umetanje "—" poslije ili ispred drugog "—", ili "¬", ili nekog kvantifikatora, ili u jednom od argumenata u "⇒", ili wfe čiji glavni operator je "⇒", (viii) universal generalization, za object funkcije i funkcionalne varijable, koje mogu da se pojave kao posljedice u kondicionalnim dokazima uz predpostavku da antecedent ne sadrži slobodno pojavljivanje varijabli uopštenih gore, (ix) neškodljive promjene ograničenih varijabli, i (x) privremene varijable (pogledati objašnjenje niže).

Privremene varijable (Variable instantiation (inst)):

(a) Kada $\alpha(\xi)$ je wfe koja sadrži object varijablu ξ slobodnu, iz $\vdash \alpha(\xi)$ izvodimo $\vdash \alpha(\beta)$, predpostavljajući da ni jedan slobodna varijabla u β ne pojavljuje se ogtraničena z kontekstu $\alpha(\beta)$;
(b) Kada je $\alpha(\varphi(\beta_1, \ldots, \beta_n), \ldots, \varphi(\delta_1, \ldots, \delta_n))$ bilo koja wfe koja sadrži jednu ili više pojavljivanja funkcionalne varijable prvog nivoa φ dužine n, a $\gamma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ je bilo koja wfe sa najmanje n slobodnih varijabli, iz $\vdash \alpha(\varphi(\beta_1, \ldots, \beta_n), \ldots, \varphi(\delta_1, \ldots, \delta_n))$, dobijamo $\vdash \alpha(\gamma(\beta_1, \ldots, \beta_n), \ldots, \gamma(\delta_1, \ldots, \delta_n))$, predpostavljajući da nema dodatnih slobodnih varijabli u $\gamma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ koje se pojavljuju ograničene u kontekstu;
(c) Kada $\alpha((\Pi\xi)\beta_1(\xi), \ldots, (\Pi\xi)\beta_n(\xi))$ je bilo koja wfe koja sadrži jednu ili više pojavljivanja funkcionalne varijable Π drugog nivoa, a $\gamma(\varphi(\delta))$ je bilo koja wfe koja ne sadrži funkcionalnu varijablu φ dužine 1 u $\alpha((\Pi\xi)\beta_1(\xi), \ldots, (\Pi\xi)\beta_n(\xi))$, iz $\vdash \alpha((\Pi\xi)\beta_1(\xi), \ldots, (\Pi\xi)\beta_n(\xi))$ slijedi $\vdash \alpha(\gamma(\beta_1(\delta)), \ldots, \gamma(\beta_n(\delta)))$, uz pretpostavku da nema dodatnih slobodnih varijabli u $\gamma(\varphi(\delta))$ koje se pojavljuju u konteksu.

Privremeno pravilo čine se veoma komplikovano, ali ono nam omogućava da zamjenimo bilo koju flobodnu varijablu sa bilo kojom ekspresijom istog tipa. Na primjer:
$\vdash (\forall x)F(x) \Rightarrow Fy$ u $\vdash (\forall x)F(x) \Rightarrow F(\{z : z = z\})$
$\vdash (\forall x)F(x) \Rightarrow Fy$ u $\vdash (\forall x)(x = x) \Rightarrow y = y$
$\vdash (\forall F)((Mx)F(x)) \Rightarrow (Mx)G(x)$ u $\vdash (\forall F)(\neg (\forall x)F(x)) \Rightarrow \neg(\forall x)G(x)$

Evo, radi primejra, jednog dokaza:

1. $\vdash g(x = y) \Rightarrow g((\forall F)(F(x) \Rightarrow F(y)))$	(III)
2. $\vdash (x = y) \Rightarrow ((\forall F)(F(x) \Rightarrow F(y)))$	2 inst.
3. $\vdash (\forall F)((Mx)F(x)) \Rightarrow (Mx)G(x)$	(IIb)
4. $\vdash (\forall F)(F(x) \Rightarrow F(y)) \Rightarrow (G(x) \Rightarrow G(y))$	3 inst.
5. $\vdash (x = y) \Rightarrow (G(x) \Rightarrow G(y))$	2, 4 HS
6. $\vdash (x = y) \Rightarrow (\alpha(z, x) \Rightarrow \alpha(z, y))$	5 inst.
7. $\vdash (x = y) \Rightarrow (\alpha(x, x) \Rightarrow \alpha(x, y))$	6 inst.

Možemo definisati "biti član" (membership) na sljedeći način:
$\tau \in \mu$ zar $(\exists\varphi)(\mu = \{\xi : \varphi(\xi)\} \in \varphi(\tau)\}$.
Iz ovoga možemo derivirati sljedeće:
$\vdash (\forall x)(x \in \{y : \alpha(y)\} \Leftrightarrow \alpha(x))$

Zadatak: Dokazati gornji shema-teorem za GG. (Uputstvo: koristiti (V).)

Evo jo[nekih dodatnih definicija:
$\tau \approx \mu$ za
$(\exists R)((\forall x)(x \in \tau \Rightarrow (\exists y)(y \in \mu \wedge (\forall z)(Rxz \Leftrightarrow z = y))) \wedge$

$$\wedge (\forall x)(x \in \mu \Rightarrow (\exists y)(y \in \tau \wedge (\forall z)(Rzx \Leftrightarrow z = y)))).$$

$\#(\tau) = \{\xi : \tau \approx \xi\}$.

Nekonzistentnost: Russell'ov paradoks dobijamo na isti način kao u sistemu F.