Matematički Kolokvijum (Banja Luka)
XIII(2)(2007), 67 - 70

O NEKIM NEJEDNAKOSTIMA ZA KONVEKSNE FUNKCIJE

ZORAN D. MITROVIĆ

Sažetak. U radu, koristeći elementarne metode analize, dokazujemo neke nejednakosti Hadamardovog tipa za konveksne funkcije.

Sljedeća nejednakost (vidjeti, na primjer, [1]-[7]),

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

koja vrijedi za konveksnu funkciju $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ i $a < x_1 < x_2 < b$ je poznata kao Hadamardova nejednakost. Nakon Hadamardovog otkrića ove nejednakosti 1893. godine, dobijen je veliki broj korisnih nejednakosti sličnog tipa. Jedan broj radova u kojima se izučava Hadamardova nejednakost se bavi dokazivanjem ove nejednakosti koristeći različite tehnike, dok se drugi bave generalizacijama i različitim primjenama (na primjer, ovo se može vidjeti u [1]-[3] i [6]). Cilj ovog rada je da se dobije integralna nejednakost koja generalizuje Hadamardovu nejednakost, a koja pri tome predstavlja i varijantu poznate Jensenove nejednakosti za konveksne funkcije.

Prije nego navedemo sljedeću lemu, (vidjeti, na primjer, [1], [5] i [7]), koja daje jednu karakterizaciju konveksnih funkcija, uvedimo neke oznake.

Definišimo

$$x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,$$

$$D(f, x_1, x_2, \lambda) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - f(x_\lambda),$$

$$D^\star(f, x_1, x_2) = \sup_{\lambda \in [0,1]} D(f, x_1, x_2, \lambda),$$

$$H(f, x_1, x_2) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} - \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

Lema 1. *Neka je data funkcija* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$*. Sljedeća tvrdjenja su ekvivalentna*

$$D(f, x_1, x_2, \lambda) \geq 0 \text{ za sve } a < x_1 < x_2 < b, \lambda \in [0, 1], \tag{1}$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \text{ za sve } a < x_1 < x < x_2 < b, \tag{2}$$

$$f \text{ je neprekidna i } H(f, x_1, x_2) \geq 0 \text{ za sve } a < x_1 < x_2 < b. \tag{3}$$

Naš rezultat je sljedeća teorema:

Teorema 1. *Ako je* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *konveksna i diferencijabilna funkcija, tada vrijedi*

$$\frac{D^\star(f, x_1, x_2)}{2} \leq H(f, x_1, x_2) \leq D^\star(f, x_1, x_2), \tag{4}$$

za sve $a < x_1 < x_2 < b$*.*

Dokaz. Neka je $a < x_1 < x_2 < b$ i $\lambda \in [0, 1]$. Kako je funkcija f konveksna, vrijedi

$$D(f, x_1, x_\lambda, \mu) \geq 0 \text{ za sve } \mu \in [0, 1].$$

Koristeći Lemu 1. dobijamo da vrijedi

$$f(x) \leq \frac{x_\lambda - x}{x_\lambda - x_1} \cdot f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_\lambda - x_1} \cdot f(x_\lambda) \text{ za sve } x_1 < x < x_\lambda. \tag{5}$$

Na sličan način, kako je

$$D(f, x_\lambda, x_2, \mu) \geq 0 \text{ za sve } \mu \in [0, 1],$$

opet na osnovu Leme 1. zaključujemo da je

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_\lambda} \cdot f(x_\lambda) + \frac{x - x_\lambda}{x_2 - x_\lambda} \cdot f(x_2) \text{ za sve } x_\lambda < x < x_2. \tag{6}$$

Kako je

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_\lambda} f(x)dx + \int_{x_\lambda}^{x_2} f(x)dx,$$

koristeći (5) i (6) imamo

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \leq \frac{x_\lambda - x_1}{2} \cdot f(x_\lambda) + \frac{x_\lambda - x_1}{2} \cdot f(x_1) +$$

$$\frac{x_2 - x_\lambda}{2} \cdot f(x_2) + \frac{x_2 - x_\lambda}{2} \cdot f(x_\lambda).$$

Iz posljednje nejednakosti dobijamo

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \leq \frac{x_2 - x_1}{2}[f(x_\lambda) + (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)],$$

to jest

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \leq \frac{x_2 - x_1}{2}[f(x_1) + f(x_2) - D(f, x_1, x_2, \lambda)],$$

pa vrijedi $D(f, x_1, x_2, \lambda) \leq 2 \cdot H(f, x_1, x_2)$.

Dokažimo sada desnu stranu nejednakosti u (4). Dovoljno je dokazati da postoji $\lambda_c \in [0, 1]$, takav da je

$$H(f, x_1, x_2) \leq D(f, x_1, x_2, \lambda_c).$$

Kako je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ po pretpostavci diferencijabilna, na osnovu Lagrangeove teoreme o srednjoj vrijednosti zaključujemo da postoji $c \in (x_1, x_2)$, takav da je

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

Kako $c \in (x_1, x_2)$ to postoji $\lambda_c \in [0, 1]$ takav da je

$$c = \lambda_c x_1 + (1 - \lambda_c)x_2. \tag{7}$$

Pokazaćemo da je

$$H(f, x_1, x_2) \leq D(f, x_1, x_2, \lambda_c).$$

Kako je f konveksna vrijedi

$$f(x) \geq f(c) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - c) \text{ za sve } a < x_1 < x < x_2 < b. \tag{8}$$

Koristeći (8) dobijamo

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \geq f(c)(x_2 - x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot \frac{(x_2 - c)^2}{2} - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot \frac{(x_1 - c)^2}{2}.$$

Ako sada iskoristimo (7) dobijamo

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \geq \frac{x_2 - x_1}{2}[f(x_1) + f(x_2) + 2(f(c) - \lambda_c f(x_1) - (1 - \lambda_c)f(x_2))],$$

to jest

$$H(f, x_1, x_2) \leq D(f, x_1, x_2, \lambda_c).$$

□

Primjedba 1. (*i*) Za dokaz lijeve strane nejednakosti u (4) dovoljno je pretpostaviti da je f konveksna funkcija. U tom slučaju kao posljedicu dobijamo Hadamardovu nejednakost. Neposredna posljedica je i sljedeća nejednakost

$$|D(f, x_1, x_2, \lambda) - H(f, x_1, x_2)| \leq H(f, x_1, x_2).$$

(*ii*) Možda bi bilo interesantno provjeriti da li je broj 1/2 u nejednakosti (4) najbolja konstanta za koju vrijedi ta nejednakost, kao i da li postoji konstanta c takva da vrijedi

$$H(f, x_1, x_2) \leq c \cdot D(f, x_1, x_2, \lambda),$$

za sve $a < x_1 < x_2 < b$ i sve $\lambda \in [0, 1]$.

Literatura

[1] Mihály Bessenyei and Zsolt Páles, Characterizations of convexity via Hadamard's inequality, Mathematical Inequalities & Applications Volume 9, Number 1 (2006), 5362.

[2] S. S. Dragomir, Two mappings in connection to Hadamard's inequalities, J. Math. Anal. Appl. 167 (1992), 49-56.

[3] A. M. Fink, Zsolt Páles, What is Hadamard's inequality? Applicable Analysis and Discrete Mathematics, 1 (2007), 29-35.

[4] M. Merkle, Conditions for convexity of a derivate and applications to the gamma and digamma function, Facta Universitatis (Niš) Ser. Math. Inform. 16 (2001).

[5] D. S. Mitrinovic, Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin, New York 1970.

[6] J. E. Pečarić and S. S. Dragomir, A generalization of Hadamard's inequality for Isotonic linear functionals, Radovi Matematički, 7 (1991), 103-107.

[7] A. W. Roberts and D. E. Varberg, Convex functions, Academic Press, New York London, 1973.

Zoran D. Mitrović

Faculty of Electrical Engineering

University of Banja Luka

78000 Banja Luka, Patre 5

Bosnia and Herzegovina

E-mail address: zmitrovic@etfbl.net