Matematički kolokvijum (Banja Luka)
XIII(2)(2007), 37-66

СТЕВАНОВИЋЕВ КРУГ[1]

Наташа Конотар

Одсјек за математику и инфотматику, Филозофски факултет,
Универзитет у Источном Сарајеву, Пале

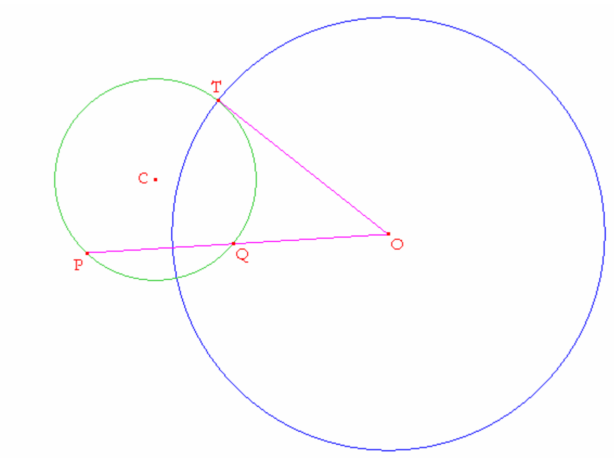
1. Увод

У овом раду обрађене су особине и конструкција Стевановићевог круга. Како је овдје ријеч о ортогоналним круговима на почетку ћемо се присјетити шта су то ортогонални кругови, а затим ћемо обрадити особине и конструкције свих кругова на које је Стевановићев круг ортогоналан. Обрадићемо везу Стевановићевог круга са другим круговима као и особине и конструкције тих кругова.

2. Ортогонални кругови

Ортогонални кругови су кругови који се сијеку под правим углом одн. њихове тангенте у тачкама пресјека су нормалне једна на другу. Према Питагориној теореми имамо да су два круга полупречника r_1 и r_2 чији центри леже на удаљености d ортогонална ако вриједи

$$r_1^2 + r_2^2 = d .$$



[1] Овај текст је мој семинарски рад унутар курса методика наставе геометрије

Еуклидова теорема тврди да за ортогоналне кругове приказане на горњој слици вриједи

$$OP \times OQ = OT^2 .$$

Радикалне осе три дата круга се сијеку у радикалном центру R. Ако круг са центром у R сијече један од кругова и ортогоналан је на њега тада је он ортогоналан на сва три дата круга. Тај круг се зове ортогоналан круг одн. радикалан круг датог система кругова.

3. Кругови ортогонални на Стевановићев круг

3.1. Описани круг

3.1.1. Особине

Описани круг је јединствен круг који пролази кроз сва три врха посматраног троугла ΔABC. Једначина описаног круга је

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0 .$$

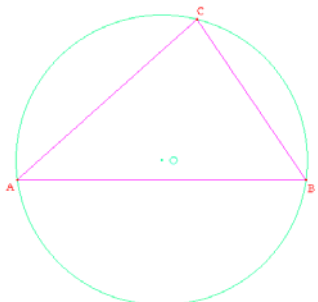
Центар описаног круга је O, одн. X_3 у Кимберлинговој енциклопедији, док је радијус описаног круга означен са R. Координате центра описаног круга одн. тачке $O = X_3$ су

$$X_3 = (a\cos\alpha : b\cos\beta : c\cos\gamma)\text{, гдје су } \alpha, \beta, \gamma \text{ углови у } \Delta ABC.$$

Описани круг пролази кроз Кимберлингове центре X_i за $i = 74, 98$ (Теријева тачка), 99 (Штајнерова тачка), 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110 (фокус Кипертове параболе), 111 (Перијева тачка), 112, 476 (Тиксиерова тачка), 477, 675, итд. Описани круг је ортогоналан на Перијев круг и на Стевановићев круг. Он је и антикомплемент круга девет тачака.

3.1.2. Конструкција

1. Центар описаног круга O троугла ΔABC је тачка пресјека симетрала страница датог троугла.
2. Описани круг троугла ΔABC је круг који пролази кроз врхове A, B, C датог троугла са центром у тачки $O = X_3$.



3.1.3. Перијев круг

3.1.3.1. Особине

Перијев круг је круг који пролази кроз двије изодинамичке тачке $S = X_{15}$ и $S' = X_{16}$ и кроз тежиште G датог троугла ΔABC.
Једначина Перијевог круга је дата са

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy-\frac{1}{3}(x+y+z)\left(\frac{b^2c^2\left(b^2+c^2-2a^2\right)}{\left(a^2-b^2\right)\left(a^2-c^2\right)}x+\frac{c^2a^2\left(c^2+a^2-2b^2\right)}{\left(b^2-c^2\right)\left(b^2-a^2\right)}y\right.$$
$$\left.+\frac{a^2b^2\left(a^2+b^2-2c^2\right)}{\left(c^2-a^2\right)\left(a^2-b^2\right)}z\right)=0$$

Центар Перијевог круга је Кимберлингов центар X_{351}. Координате ове тачке су

$$X_{351}\left(a^2\left(b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2-2a^2\right):b^2\left(c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-2b^2\right):c^2\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-2c^2\right)\right).$$

Тачка X_{351} лежи на правама X_2X_{804}, $X_{110}X_{526}$, $X_{184}X_{686}$, $X_{187}X_{237}$, итд.
Радијус Перијевог круга је дат са

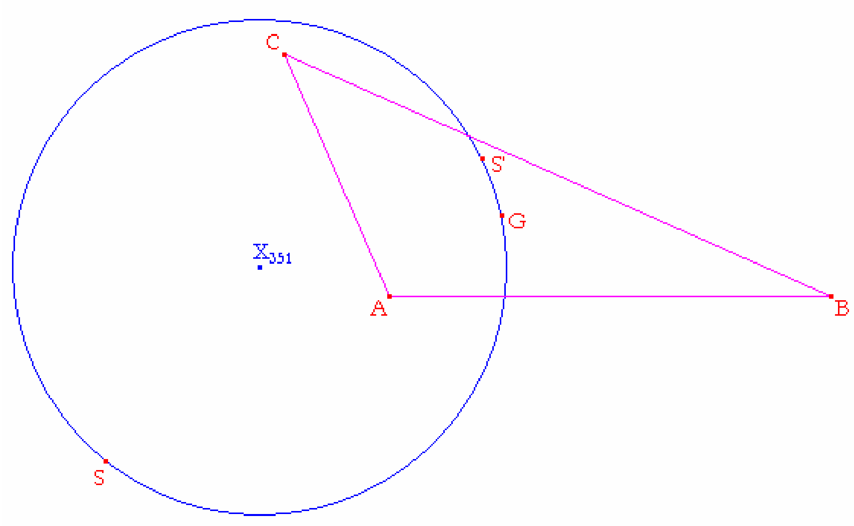
$$R_P=\frac{abc\left[\left(a^4+b^4+c^4\right)-\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\right]}{3\left|\left(a^2-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)\left(c^2-a^2\right)\right|}.$$

Перијев круг и описани круг троугла ΔABC се сијеку у двије тачке: у тачки X_{110} која је фокус Кипертове параболе и у тачки X_{111} одн. Перијевој тачки.
Перијев круг пролази кроз Кимберлингове центре X_i за $i=2$ (тежиште G), $15, 16$ (прва и друга изодинамичка тачка S, S'), $23, 110$ (фокус Кипертове параболе), 111 (Перијева тачка), 352 и 353. Перијев круг је ортогоналан на описани круг, Брокардов круг, Лукасов унутрашњи круг и на радикални круг Лукасових кругова.

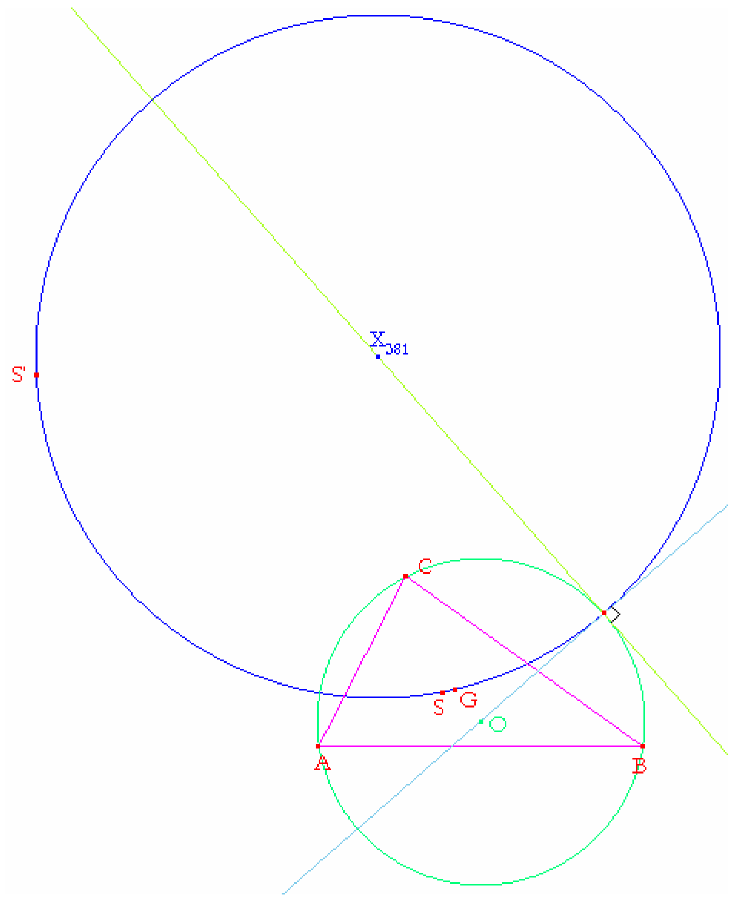
3.1.3.2. Конструкција

1. За дати троугао ΔABC конструишимо тежиште G као тачка пресјека одсјечака који спајају врхове троугла са средиштима насупротних страница датог троугла.
2. Конструишимо симетрале унутрашњих и вањских углова у врховима A, B, C троугла ΔABC и означимо тачке пресјека тих симетрала са насупротним страницама редом са $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$.
3. Описани кругови троуглова ΔAA_1A_2, ΔBB_1B_2, ΔCC_1C_2 се сијеку у изодинамичким тачкама S и S'.

4. Перијев круг је описани круг троугла ΔGSS' са центром у тачки X_{351}.



3.1.4. Ортогоналност описаног и Перијевог круга



3.2. Беванов круг

3.2.1. Особине

Беванов круг, којег понекад зовемо и ексцентрални круг, је описани круг око ексцентралног троугла посматраног троугла ΔABC, одн. то је круг који пролази кроз центре приписаних кругова (ексцентре) I_1, I_2, I_3.

Једначина Бевановог круга је дата са

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy + bcx + cay + abz = 0\,.$$

Беванов круг је централни круг чији је центар Беванова тачка V, која је у Кимберлинговој енциклопедији тачака у троуглу означена као X_{40}.

Координате Беванове тачке су дате са

$$X_{40}\left(a\left(\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c}-\frac{a}{s-a}\right):b\left(\frac{c}{s-c}+\frac{a}{s-a}-\frac{b}{s-b}\right):c\left(\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}-\frac{c}{s-c}\right)\right).$$

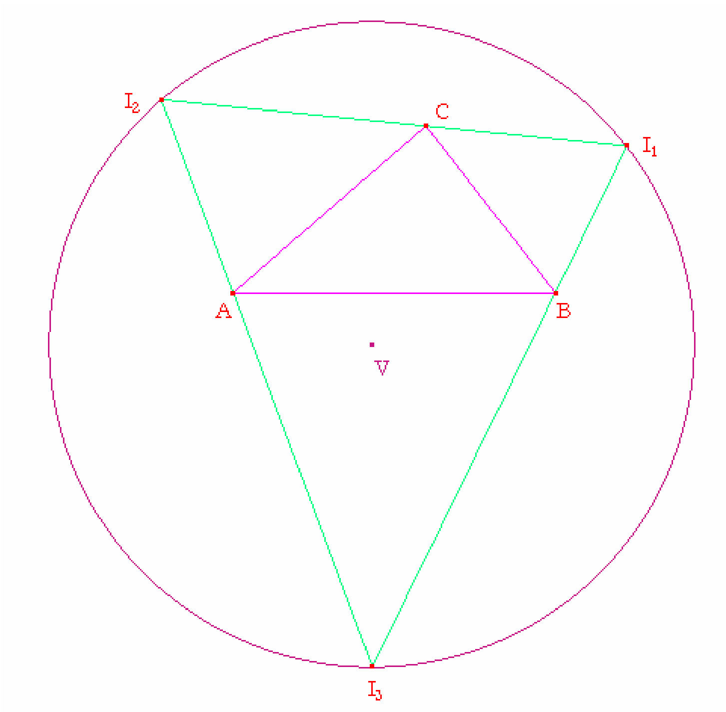
Беванова тачка лежи на правама X_1X_3, X_4X_9, X_8X_{20}, итд. Тачка X_{40} је средиште одсјечка X_8X_{20}, гдје је X_8 Нагелова тачка, а X_{20} де Лонгшампова тачка.

Радијус Бевановог круга је $R_B = 2R$, гдје је R радијус описаног круга посматраног троугла.

Беванов круг је ортогоналан на Стевановићев круг.

3.2.2. Конструкција

1. Конструишимо центар уписаног круга I (пресјек симетрала углова) за дати троугао ΔABC.
2. Конструишимо праву a_1 која пролази кроз врх A и нормална је на симетралу угла код врха A. Аналогно конструишимо праве a_2 и a_3 за врхове B и C, респективно.
3. Центре приписаних кругова I_1, I_2, I_3 добијамо као $I_1 = a_2 \cap a_3$, $I_2 = a_1 \cap a_3$, $I_3 = a_1 \cap a_2$.
4. Конструишимо тачку V као центар описаног круга троугла $\Delta I_1I_2I_3$.
5. Беванов круг је описани круг за $\Delta I_1I_2I_3$ чији је центар тачка $V = X_{40}$.



3.3. Радикални круг приписаних кругова

3.3.1. Особине

Радикални круг приписаних кругова има центар у Спикеровој тачки Sp одн. Кимберлинговом центру X_{10}, а његов радијус дат са

$$R_E = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2b+ab^2+a^2c+abc+b^2c+ac^2+bc^2}{a+b+c}}$$

Једначина овог круга је дата са

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy+(x+y+z)\big((s-b)(s-c)x+(s-c)(s-a)y+(s-a)(s-b)z\big)=0.$$

Координате Спикерове тачке су

$$X_{10}(b+c:c+a:a+b).$$

Тачка Sp лежи на правама $X_1X_2, X_3X_{197}, X_4X_9, X_{11}X_{121}, X_{12}X_{65}, X_{20}X_{165}, X_{21}X_{35}$, итд.

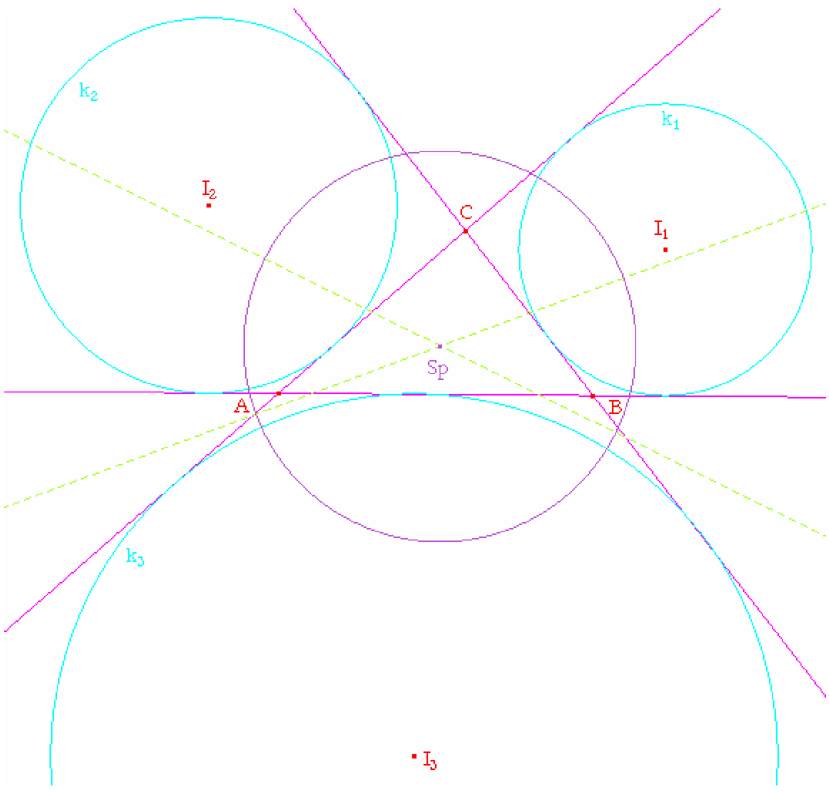
Она је такође и средиште одсјечака $X_1X_8, X_3X_{355}, X_4X_{40}, X_{65}X_{72}, X_{80}X_{100}$ и комплемент је тачке X_1.

Ниједан Кимберлингов центар не лежи на овом кругу.

Радикални круг приписаних кругова је ортогоналан на Стевановићев круг.

3.3.2. Конструкција

1. За дати троугао ΔABC конструишемо центар уписаног круга I , затим центре приписаних кругова I_1, I_2, I_3 као пресјеке правих које су нормалне на симетрале углова и пролазе кроз одговарајуће врхове троугла.
2. Конструишемо приписане кругове k_1, k_2, k_3 који додирују по једну страницу троугла и продужетке преостале двије странице.
3. Конструишемо произвољан круг k_0 која сијече кругове k_1 и k_2, а потом повучемо праве кроз пресјечне тачке. Кроз ту тачку пресјека спустимо нормалу на одсјечак I_1I_2 чиме добијамо радикалну осу за кругове k_1 и k_2. Аналогно конструишемо радикалне осе за кругове k_1 и k_3, одн. k_2 и k_3.
4. Тачка пресјека радикалних оса је Спикерова тачка Sp.
5. Конструишемо круг пречника SpI_1, а тачку пресјека овог круг и круга k_1 означимо са D.
6. Радикални круг приписаних кругова је круг полупречника SpD са центром у тачки $Sp = X_{10}$.



3.4. Ортоцентроидалан круг

3.4.1. Особине

Ортоцентроидалан круг троугла ΔABC је централни круг који за пречник има одсјечак који спаја тежиште G и ортоцентар H троугла ΔABC. Како Ојлерова права пролази кроз тачке G и H, она дијели овај круг на два дијела одн. на два полукруга.

Једначина ортоцентроидалног круга је

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy-\frac{1}{3}(x+y+z)\left(\left(b^2+c^2-a^2\right)x+\left(c^2+a^2-b^2\right)y+\left(a^2+b^2-c^2\right)z\right)=0$$

Центар ортоцентроидалног круга је Кимберлингов центар X_{381}, чије су координате

$$X_{381}\left(a\left(\cos\alpha+4\cos\beta\cos\gamma\right):b\left(\cos\beta+4\cos\gamma\cos\alpha\right):c\left(\cos\gamma+4\cos\alpha\cos\beta\right)\right)$$

.

Тачка X_{381} лежи на правама X_2X_3, X_6X_{13}, итд.

Ортоцентроидалан круг има радијус $R_O=\dfrac{\sqrt{f(a,b,c)}}{12\Delta}$,

гдје је Δ површина посматраног троугла ΔABC, а

$$f(a,b,c)=a^6-a^4b^2-a^2b^4+b^6-a^4c^2+3a^2b^2c^2-b^4c^2-a^2c^4-b^2c^4+c^6.$$

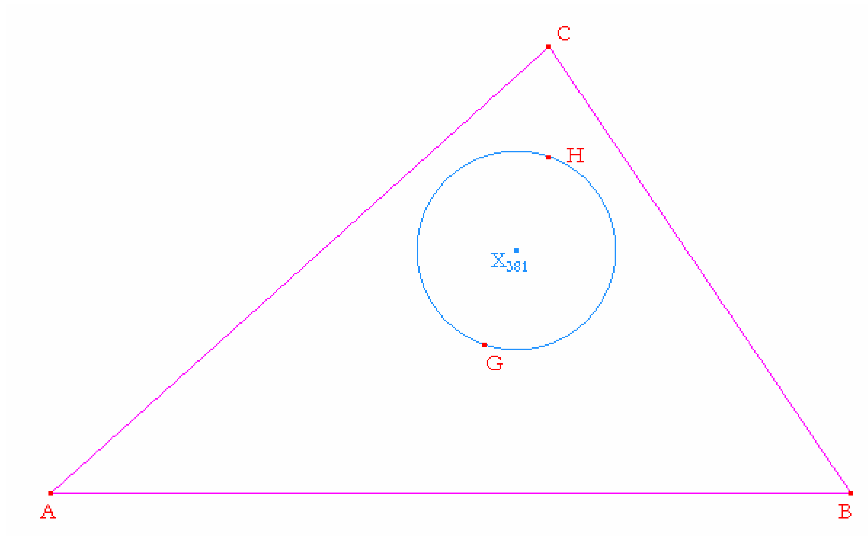
Овај круг, осим што пролази кроз G и H који су, као Кимберлингови центри, означени са X_2 и X_4 респективно, не пролази више ни кроз један значајан центар у троуглу.

Центар уписаног круга било ког троугла се увијек налази унутар ортоцентроидалног круга.

Ортоцентроидалан круг је ортогоналан на Лестеров и на Стевановићев круг.

3.4.2. Конструкција

1. За дати троугао ΔABC конструишемо ортоцентар H (тачка пресјека висина спуштених из врхова датог троугла на његове насупротне странице) и тежиште G (тачка пресјека одсјечака који спајају врхове троугла са средиштима насупротних страница).
2. Центар ортоцентроидалног круга X_{381} је средиште одсјечка HG.
3. Ортоцентроидалан круг је круг пречника HG са центром у тачки X_{381}.



3.4.3. Лестеров круг

3.4.3.1. Особине

Лестеров круг је круг на којем леже центар описаног круга O датог троугла ΔABC, центар круга девет тачака N, прва и друга Фермаова тачка F_1 и F_2. Осим ових Кимберлинговых центара, X_3, X_5, X_{13} и X_{14} распективно, ниједан више Кимберлингов центар не лежи на овом кругу.
Једначина Лестеровог круга је дата са

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy-(x+y+z)\left(\frac{f(a,b,c)R^2\left[1+2\cos(2\alpha)\right]}{6a^2\left(a^2-b^2\right)\left(a^2-c^2\right)}x+\frac{f(b,c,a)\left[1+2\cos(2\beta)\right]}{6b^2\left(b^2-c^2\right)\left(b^2-a^2\right)}y\right.$$
$$\left.+\frac{f(c,a,b)\left[1+2\cos(2\gamma)\right]}{6c^2\left(c^2-a^2\right)\left(c^2-b^2\right)}z\right)=0$$

Центар Лестеровог круга је Кимберлингов центар X_{1116} чије координате су

$$X_{1116}\left(af(a,b,c):bf(b,c,a):cf(c,a,b)\right),\text{ гдје је}$$

$$f(a,b,c)=bc\left(b^2-c^2\right)\left[2\left(a^2-b^2\right)\left(c^2-a^2\right)+3R^2\left(2a^2-b^2-c^2\right)-a^2\left(a^2+b^2+c^2\right)+a^4+b^4+c^4\right]$$

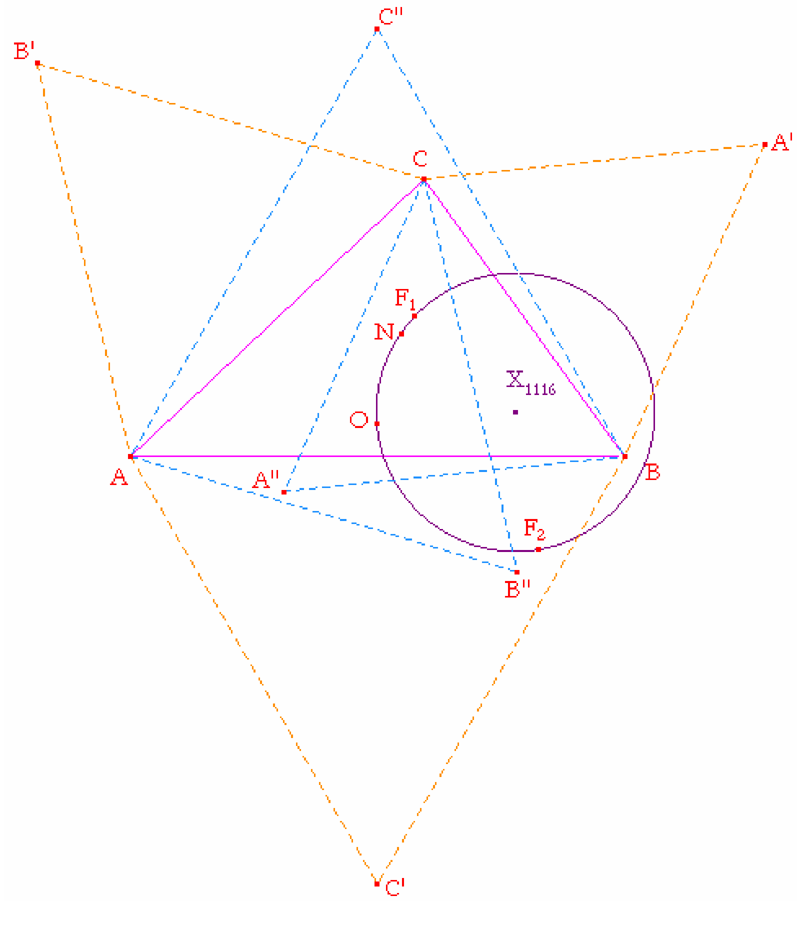
а R је радијус описаног круга.
Тачка X_{1116} лежи на правама $X_{115}X_{125}$ и $X_{140}X_{523}$.
Радијус Лестеровог круга је дат са

$$R_L=\frac{R^2\sqrt{1-8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{6abc(a+b)(b+c)(c+a)\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|}\sqrt{g(a,b,c)},$$

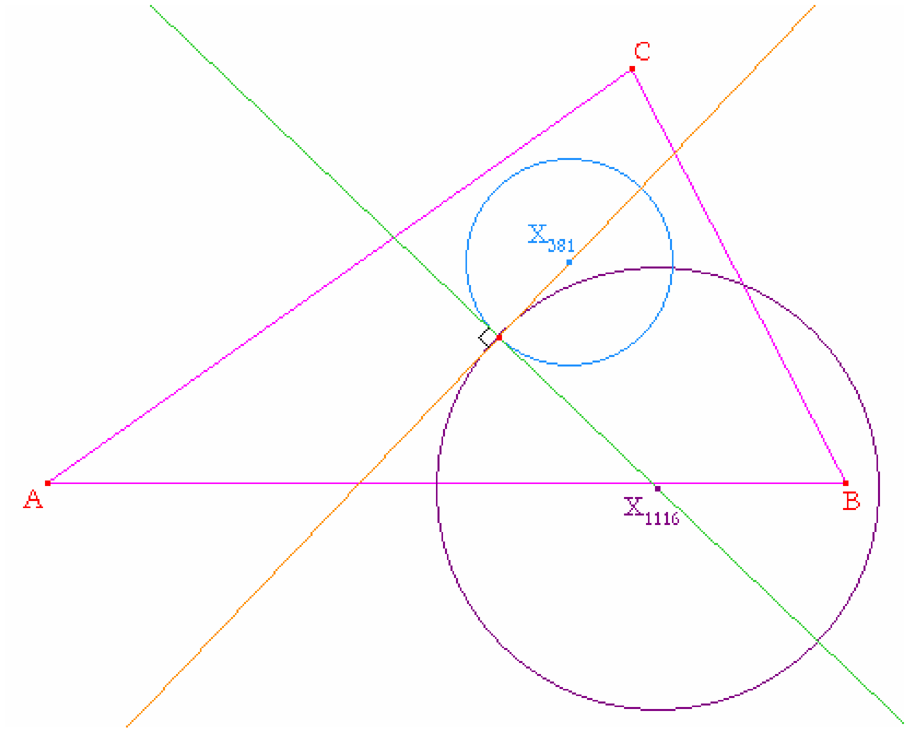
гдје је $g(a,b,c)$ симетрични полином 16-ог степена који нема једноставну форму.
Лестеров круг је ортогоналан на ортоцентроидалан круг.

3.4.3.2. Конструкција

1. Конструишимо центар описаног круга O и центар круга девет тачака N.
2. Изван ΔABC, над страницама BC, CA, AB конструишимо истостране троуглове са врховима A', B', C'. Праве AA', BB', CC' се сијеку у првој Фермаовој тачки F_1.
3. У унутрашњости ΔABC, над његовим страницама конструишимо истостране троуглове са врховима A'', B'', C''. Праве AA'', BB'', CC'' се сијеку у другој Фермаовој тачки F_2.
4. Лестеров круг је круг који пролази кроз тачке O, N, F_1, F_2 са центром у тачки X_{1116}.



3.4.4. Ортогоналност ортоцентроидалног и Лестеровог круга



3.5. Круг девет тачака

3.5.1. Особине

Круг девет тачака, који још називамо и Ојлеровим или Фојербаховим кругом, пролази кроз подножја висина H_A, H_B, H_C спуштених из врхова посматраног троугла ΔABC на његове насупротне странице. Ојлер је 1765. доказао да овај круг пролази и кроз средишта M_A, M_B, M_C страница ΔABC. Према Фојербаховој теореми круг девет тачака пролази и кроз средишта E_A, E_B, E_C одсјечака који спајају врхове троугла ΔABC са ортоцентром H. Ове тачке се обично називају Ојлеровим тачкама и њих укупно има девет, по чему је овај круг и добио име.

Једначина круга девет тачака је

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy-\frac{1}{4}(x+y+z)\left(\left(b^2+c^2-a^2\right)x+\left(c^2+a^2-b^2\right)y+\left(a^2+b^2-c^2\right)z\right)=0$$

Центар овог круга је тачка N која је у ЕТС-у означена као тачка X_5, а зовемо је центром круга девет тачака.
Координате тачке N су

$$X_5\left(a\left(\cos\alpha+2\cos\beta\cos\gamma\right):b\left(\cos\beta+2\cos\gamma\cos\alpha\right):c\left(\cos\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\right)\right)$$

.

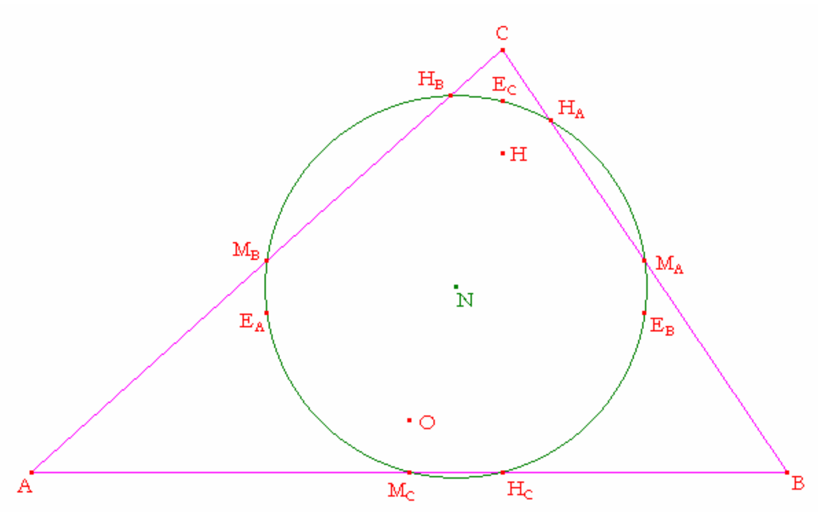
Она лежи на правама X_1X_{11}, X_2X_3, $X_{13}X_{18}$, $X_{14}X_{17}$, $X_{49}X_{54}$, $X_{51}X_{52}$, итд.
Тачка N је средиште одсјечка GO одн. X_3X_4.

Радијус Ојлеровог круга је $R_N=\dfrac{1}{2}R$, гдје је R радијус описаног круга ΔABC.

Средиште одсјечка који спаја двије Фермаове тачке $F_1=X_{13}$ и $F_2=X_{14}$ лежи на кругу девет тачака. Овај круг пролази и кроз Кимберлингове центре X_i за $i=11$ (Фојербахова тачка), $113,114,115$ (центар Кипертове хиперболе), 116, 117, $118,119,120$, $121,122,123,124,125$ (центар Јерабекове хиперболе), 126, итд.
Ако је I центар уписаног круга ΔABC; I_1,I_2,I_3 центри приписаних кругова ΔABC; тада се кругови девет тачака троуглова □$I_1I_2I_3$, □II_1I_2, □II_1I_3, □II_2I_3 поклапају са описаним кругом посматраног троугла ΔABC.
Уписани круг и сва три приписана круга троугла ΔABC додирују Ојлеров круг ΔABC. Штавише, тачке додира Ојлеровог круга и три приписана круга су врхови Фојербаховог троугла.
Ојлеров круг полови сваки одсјечак који спаја ортоцентар са било којом тачком на описаном кругу ΔABC.
Он је, такође, и комплемент описаног круга.
Круг девет тачака је ортогоналан на Стевановићев круг.

3.5.2. Конструкција

1. За дати троугао ΔABC конструишимо центар описаног круга O и ортоцентар H.
2. Подножја висина спуштених из врхова A,B,C означимо редом са H_A,H_B,H_C, док средишта страница AB,BC,CA датог троугла означимо са M_A,M_B,M_C. Са E_A,E_B,E_C радом означимо средишта одсјечака HA,HB,HC.
3. Центар круга девет тачака N је средиште одсјечка HO.
4. Круг девет тачака је круг полупречника NH_A са центром у тачки $N=X_5$. Осим тачке H_A, на овом кругу леже и тачке $H_B,H_C,M_A,M_B,M_C,E_A,E_B$ и E_C.



3.6. Аполонијев круг

3.6.1. Особине

Аполонијев круг је изнутра тангентан на сва три приписана круга. Yiu је пронашао конструкцију Аполонијевог круга као инверзну слику круга девет тачака у односу на радикални круг приписаних кругова, као и координате за његов центар Q. Ehrmann је показао да се тачка Q може конструисати као тачка пресјека Brokard-ове осе и праве која пролази кроз тачке N и Sp (N је центар круга девет тачака, а Sp је Спикерова тачка). Овдје ће бити дата једноставнија конструкција Аполонијевог круга без директног коришћења приписаних кругова. Једначина Аполонијевог круга је

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy+(x+y+z)s\left(\left(s+\frac{bc}{a}\right)x+\left(s+\frac{ca}{b}\right)y+\left(s+\frac{ab}{c}\right)z\right)=0.$$

Центар Аполонијевог круга је Кимберлингов центар X_{970}, чије координате су дате са

$$X_{970}\left(f(a,b,c):f(b,c,a):f(c,a,b)\right),$$

гдје је

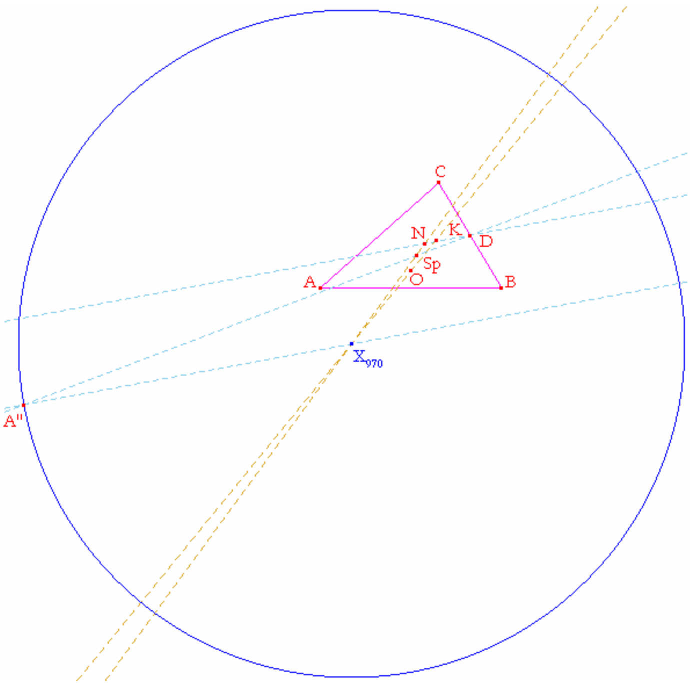
$$f(a,b,c)=a^2\left(-b^5-c^5+a^3(b+c)^2+a(ab+ac-2bc)\left(b^2+c^2\right)-bc\left(b^3+c^3\right)-a\left(b^4+c^4\right)\right)$$

Радијус Аполонијевог круга је $R_A=\dfrac{r^2+s^2}{4r}$, гдје је r радијус уписаног круга, а s полуобим посматраног троугла ΔABC. Тачка X_{970} лежи на правама X_1X_{181}, X_3X_6, X_5X_{10}, $X_{21}X_{51}$, $X_{40}X_{43}$, $X_{411}X_{185}$. Кимберлингови центри X_i

за $i = 2037, 2038, 3029, 3030, 3031, 3032, \ 3030, 3034$. Аполонијев круг је ортогоналан на Стевановићев круг.

3.6.2. Конструкција

1. За дати троугао ΔABC констуишимо
   - центар описаног круга O,
   - Лемоанову одн. симедијанску тачку K која је изогонални конјугат (симетрична у односу на симетрале углова) тежишта G,
   - центар круга девет тачака N,
   - Спикерову тачку Sp која је центар радикалног круга приписаних кругова, али је можемо конструисати и као средиште одсјечка NaI, гдје је I центар уписаног круга датог троугла, а тачка Na Нагелова тачка која се добија као тачка пресјека одсјечака који спајају врхове датог троугла и тачке додира приписаног круга са насупротном страницом троугла.
2. Центар Аполонијевог круга Q је тачка пресјека правих OK и NSp.
3. Нека је D средиште странице BC. Конструишимо праве ND и DSp.
4. Конструишимо тачку A'' као тачку пресјека праве DSp и праве која је паралелна правој ND а пролази кроз тачку Q.
5. Аполонијев круг је $K(Q, QA'')$ круг полупречника QA'' са центром у тачки $Q = X_{970}$.



3.7. Поларни круг

3.7.1. Особине

Поларни круг је дефинисан само sa тупоугле троуглове. Његов центар се налази у ортоцентру H почетног троугла ΔABC.
Координате центра поларног круга, ортоцентра H одн. Кимберлинговог центра X_4 су дате са

$$X_4\left(a\cos\beta\cos\gamma : b\cos\gamma\cos\alpha : c\cos\alpha\cos\beta\right).$$

Нека су H_A, H_B, H_C подножја висина спуштених из врхова A, B, C респективно. Тада је квадрат радијуса поларног круга дат са

$$R_P{}^2 = \overline{HA}\cdot\overline{HH_A} = \overline{HB}\cdot\overline{HH_B} = \overline{HC}\cdot\overline{HH_C} = -4R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 4R^2 - \frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

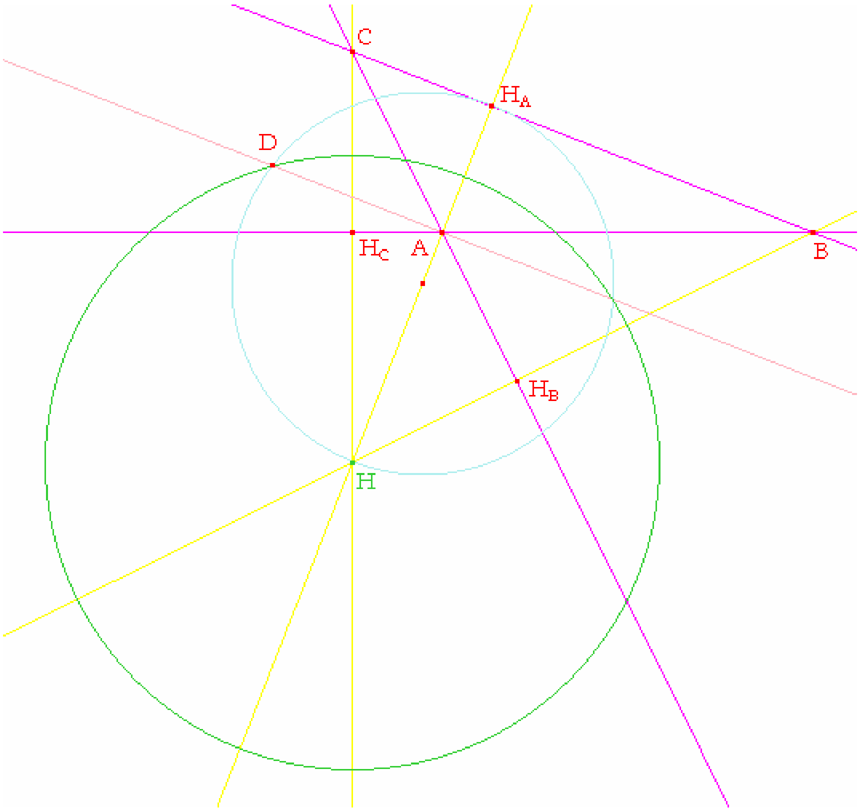
гдје је R радијус описаног круга ΔABC; α, β, γ углови у ΔABC; a, b, c одговарајуће сранице троугла ΔABC.
Једначина поларног круга,када је он дефинисан, је дата са

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy-\frac{1}{2}(x+y+z)\left(\left(b^2+c^2-a^2\right)x+\left(c^2+a^2-b^2\right)y+\left(a^2+b^2-c^2\right)z\right)=0$$

Овај круг је антикомплемент де Лонгшамповог круга.
Поларни круг је ортогоналан на ортоптик круг Штајнерове инелипсе, други Дроз-Фарнијев круг и на Стевановићев круг.

3.7.2. Конструкција

1. За дати тупоугли троугао претпоставимо да је туп угао код врха A. Конструишимо ортоцентар H и означимо подножја висина са H_A, H_B, H_C.
2. Конструишимо круг пречника HH_A и нормалу на одсјечак HH_A у тачки A. Тачке пресјека нормале и конструисаног круга означимо са D и D'.
3. Поларни круг је круг полупречника HD са центром у тачки $H = X_4$.



3.7.3. Други Дроз-Фарнијев круг

3.7.3.1. Особине

Посматрамо ли кругове k_1, k_2, k_3, чији центри су средишта M_A, M_B, M_C страница датог троугла ΔABC а који пролазе кроз ортоцентар H датог троугла, добијамо редом тачке P_1, Q_1; P_2, Q_2; P_3, Q_3 у пресјеку ових кругова са страницама троугла.

Други Дроз-Фарнијев круг је круг који пролази кроз тачке P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3.

Центар овог круга је центар описаног круга $O = X_3$ датог троугла ΔABC.

Једначина Дроз-Фарнијевог круга је дата са

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy+(x+y+z)\left(\frac{4a^2b^2c^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}x\right.$$

$$\left.+\frac{4a^2b^2c^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{(b-c-a)(b+c-a)(b-c+a)(b+c+a)}y+\frac{4a^2b^2c^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{(c-a-b)(c+a-b)(c-a+b)(c+a+b)}z\right)=0$$

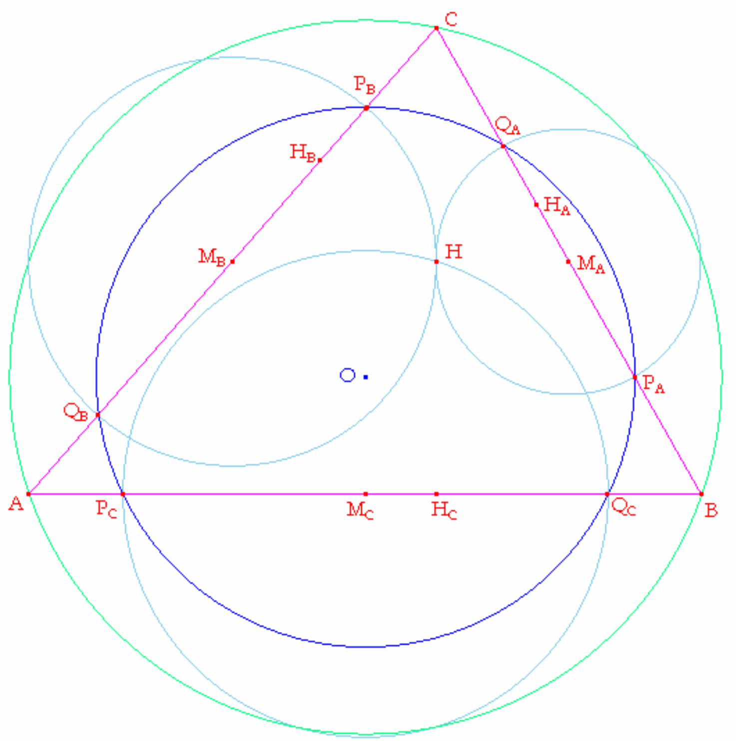
а његов радијус са

$$R_{DF2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(OH^2 + R^2\right)}\,.$$

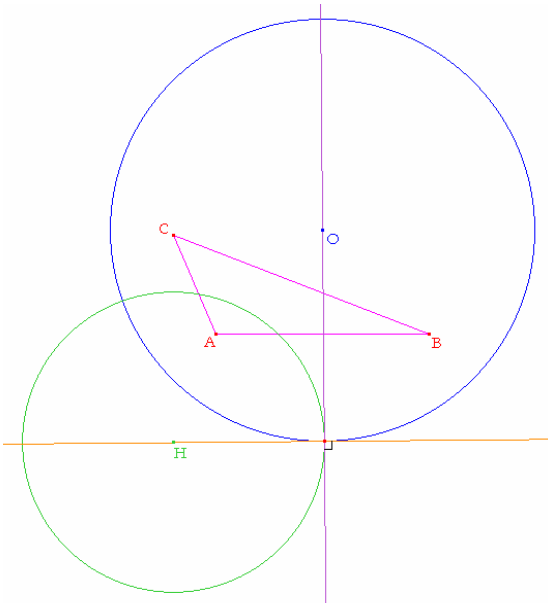
Ниједан Кимберлингов центар не лежи на овом кругу.
Други Дроз-Фарнијев круг је ортогоналан на поларни круг.

3.7.3.2. Конструкција

1. За дати троугао ΔABC нађимо центар описаног круга O, ортоцентар H и средишта M_A, M_B, M_C страница датог троугла.
2. Конструишимо кругове k_1, k_2, k_3 чији центри су редом у тачкама M_A, M_B, M_C, а који пролазе кроз тачку H.
3. Кругови k_1, k_2, k_3 сијеку редом странице BC, CA, AB у тачкама $P_1, Q_1; P_2, Q_2; P_3, Q_3$.
4. Други Дроз-Фарнијев круг пролази кроз тачке P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3 и има центар у тачки O.



3.7.4. Ортогоналност другог Дроз-Фарнијевог и поларног круга



3.8. Ортоптик круг Штајнерове инелипсе

3.8.1. Особине

Ортоптик круг Штајнерове инелипсе је круг код којег је квадрат дужине радијуса једнак збиру квадрата дужина полуоса Штајнерове инелипсе. Штајнерова инелипса је описана елипса око медијалног троугла са центром у тежишту G почетног троугла ΔABC. Медијални троугао је троугао чији су врхови средишта страница датог троугла. Ортоптик круг Штајнерове инелипсе има центар у тежишту G почетног троугла ΔABC.
Једначина овог круга је

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy-\frac{1}{6}(x+y+z)\left(\left(b^2+c^2-a^2\right)x+\left(c^2+a^2-b^2\right)y+\left(a^2+b^2-c^2\right)z\right)=0$$

.

Координате његовог центра одн. тачке G, која је као Кимберлингов центар означена са X_2, су
$X_2(1:1:1)$.

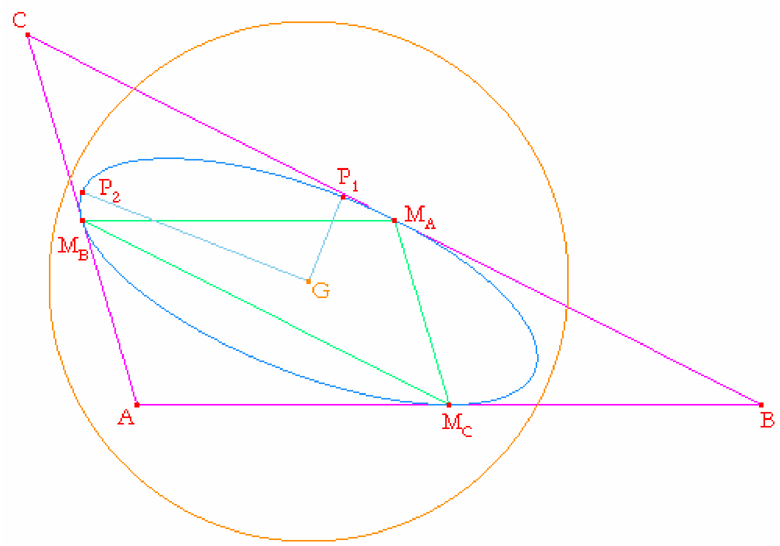
Радијус овог круга је $R_{OS}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{3\sqrt{2}}$.

Ортоптик круг Штајнерове инелипсе не пролази ни кроз један Кимберлингов центар и ортогоналан је на поларни круг и на Стевановићев круг.

3.8.2. Конструкција

Ортоптик круг Штајнерове инелипсе се може конструисати на два начина. Једна конструкција се изводи преко Штајнерове инелипсе, док се друга ослања на особину овог ортоптик круга да је поларни круг ортогоналан на њега.
Прва конструкција:

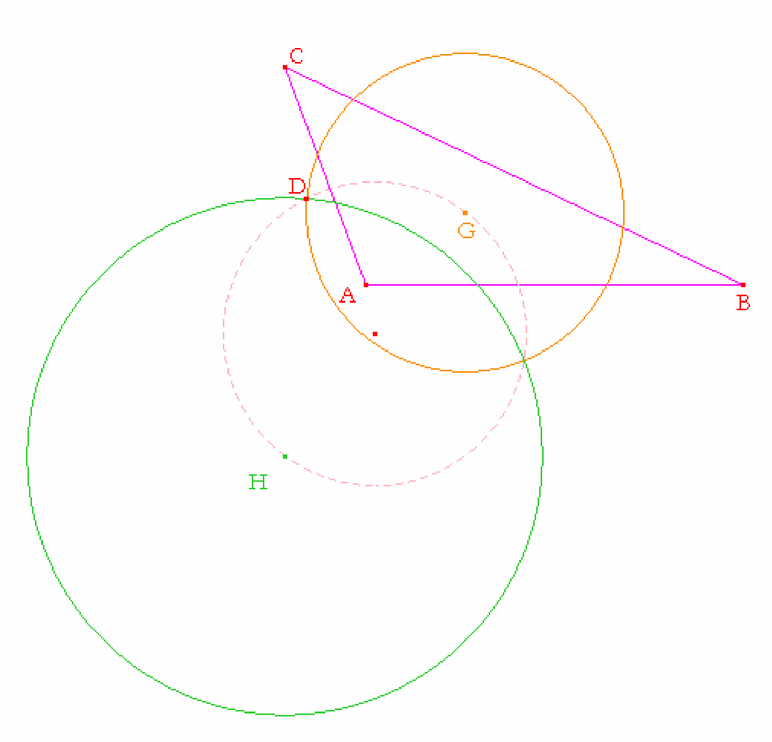
1. За дати троугао ΔABC конструишемо тежиште G и медијални троугао чији су врхови средишта M_A, M_B, M_C страница BC, CA, AB троугла ΔABC.
2. Конструишимо Штајнерову инелипсу као елипсу која пролази кроз тачке M_A, M_B, M_C и кроз тачке симетричне тачкама M_A, M_B, M_C у односу на тачку G (јер је тежиште G центар Штајнерове инелипсе).
3. Конструишимо круг са центром у G који сијече инелипсу редом у четири тачке E_1, E_2, E_3, E_4, а затим и симетрале одсјечака E_1E_2 и E_2E_3. Полуосе Штајнерове инелипсе се добијају као одјечци GP_1 и GP_2 који спајају тачку G са тачкама пресјека симетрала са инелипсом P_1 и P_2. Ова конструкција вриједи због симетрије одговарајућих тачака у односу на полуосе инелипсе.
4. Ортоптик круг Штајнерове инелипсе се добија као круг са центром у G чији је радијус једнак дужини хипотенузе у правоуглом троуглу ΔGP_1P_2 (јер је квадрат дужине радијуса ортоптик круга једнак збиру квадрата дужина полуоса Штајнерове инелипсе).



Друга конструкција:

1. За тупоугли троугао ΔABC конструишемо тежиште G и поларни круг чији је центар ортоцентар H датог троугла.

2. Конструишимо круг са пречником HG и означимо тачку пресјека, овог круга са поларним кругом, са D.
3. Ортоптик круг Штајнерове инелипсе је круг полупречника GD са центром у $G = X_2$ конструисан као круг ортогоналан на поларни круг.



3.9. Тангентни круг

3.9.1. Особине

Тангентни круг троугла ΔABC је описани круг око тангентног троугла. Његов центар је Кимберлингов центар X_{26} чије координате су дате са

$X_{26}\left(f\left(a,b,c\right): f\left(b,c,a\right): f\left(c,a,b\right)\right)$, гдје је

$f\left(a,b,c\right)=a^2\left(b^2\cos 2\beta+c^2\cos 2\gamma-a^2\cos 2\alpha\right)$.

Радијус тангентног круга је $R_T=\dfrac{R}{4\left|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right|}$, гдје је R центар описаног круга, а α, β, γ углови троугла ΔABC.

Једначина тангентног круга је дата са

$a^2yz+b^2zx+c^2xy+\left(x+y+z\right)\left(g\left(a,b,c\right)x+g\left(b,c,a\right)y+g\left(c,a,b\right)z\right)=0$,

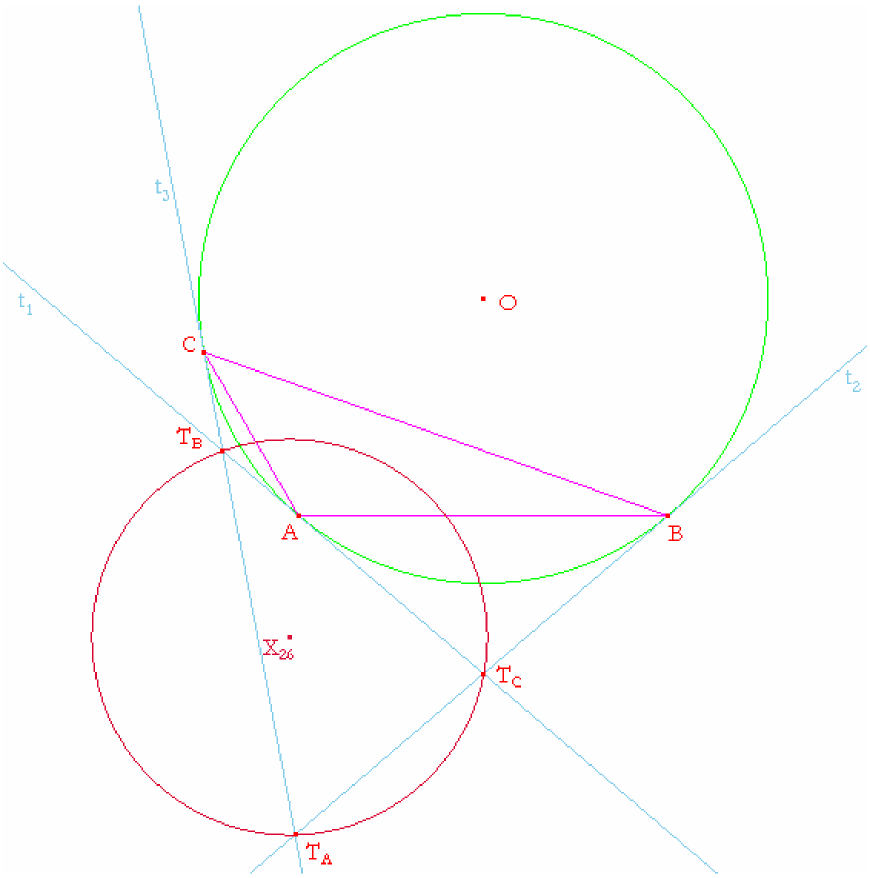
гдје је

$$g(a,b,c)=\frac{a^2b^2c^2}{\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)}.$$

Тангентни круг пролази кроз Кимберлингов центар X_{2079} и ортогоналан је на Стевановићев круг.

3.9.2. Конструкција

1. За дати троугао ΔABC конструишимо описани круг.
2. У врховима A, B, C датог троугла конструишимо редом тангенте t_1, t_2, t_3 на описани круг.
3. Тачке пресјека тангената означимо са $T_A = t_2 \cap t_3$, $T_B = t_1 \cap t_3$, $T_C = t_1 \cap t_2$.
4. Конструишемо ли центар описаног круга за троугао $\Delta T_A T_B T_C$ добијамо тачку X_{26}.
5. Тангентни круг је описани круг троугла $\Delta T_A T_B T_C$ са центром у тачки X_{26}.



4. Стевановићев круг

4.1. Особине

Стевановићев круг је круг чији центар је Кимберлингов центар $X\left(650\right)$. Координате центра Стевановићевог круга су

$$X_{650}\left(a\left(b-c\right)\left(b+c-a\right):b\left(c-a\right)\left(c+a-b\right):c\left(a-b\right)\left(a+b-c\right)\right).$$

Радијус Стевановићевог круга је дат са

$$R_S=\frac{\sqrt{abc\left(a^5-a^4b-ab^4+b^5-a^4c+a^3bc+ab^3c-b^4c+abc^3-ac^4-bc^4+c^5\right)}}{2\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)}.$$

Једначина Стевановићевог круга је дата са

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy+\left(x+y+z\right)\left(\frac{bc\left(b^2+c^2-a^2\right)}{2\left(c-a\right)\left(a-b\right)}x+\frac{ca\left(c^2+a^2-b^2\right)}{2\left(a-b\right)\left(b-c\right)}y+\frac{ab\left(a^2+b^2-c^2\right)}{2\left(b-c\right)\left(c-a\right)}z\right)=0$$

Ниједан Кимберлингов центар не лежи на Стевановићевом кругу. Али оно што је задивљујуће јесте да је Стевановићев круг ортогоналан на сљедећих девет кругова:

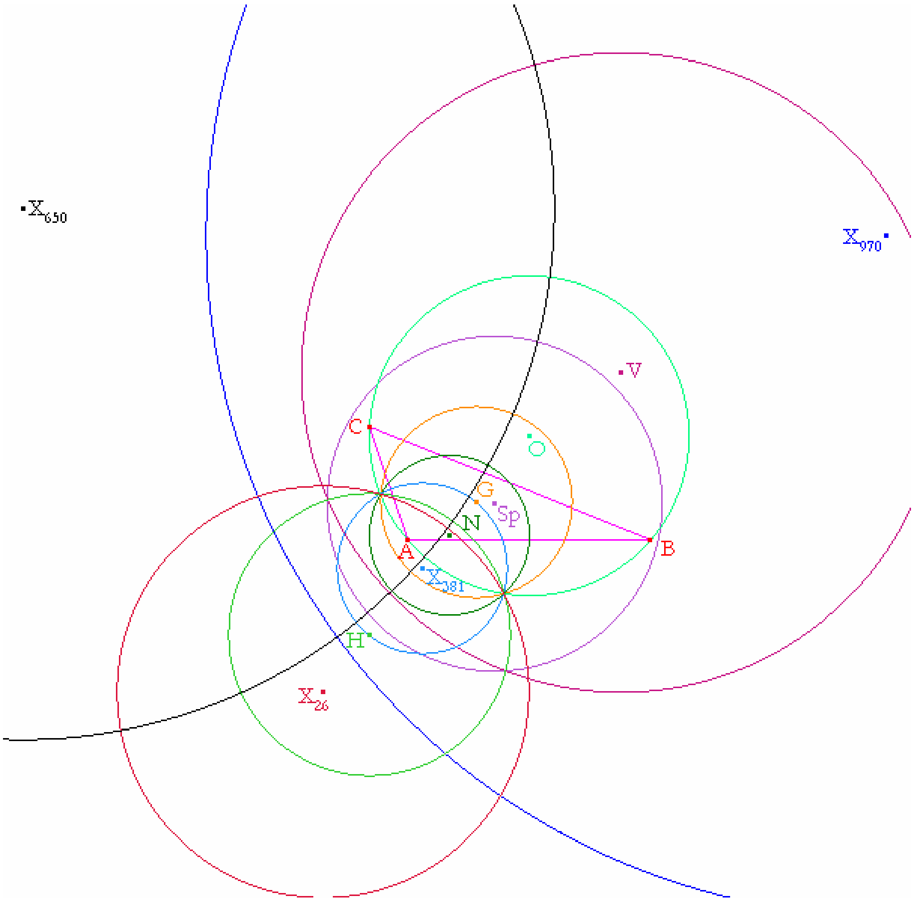
1. Аполонијев круг (са центром у X_{970}),
2. Беванов круг (са центром у $V=X_{40}$),
3. Описани круг (са центром у $O=X_3$),
4. Радикални круг приписаних кругова (са центром у $Sp=X_{10}$),
5. Круг девет тачака (са центром у $N=X_5$),
6. Ортоцентроидалан круг (са центром у X_{381}),
7. Ортоптик круг Штајнерове инелипсе(са центром у $G=X_2$),
8. Поларни круг (са центром у $H=X_4$),
9. Тангентни круг (са центром у X_{26}).

4.2. Конструкција

1. Центар Стевановићевог круга можемо конструисати на два начина:
   - За дати троугао ΔABC конструишемо орто-осу (трилинеарна полара ортоцентра H) и антиорто-осу (трилинеарна полара ортоцентра ексцентралног троугла $\triangle I_1I_2I_3$). Тачка пресјека орто-осе и антиорто-осе је центар Стевановићевог круга X_{650}.
   - За дати троугао ΔABC конструишемо Жергонову Ge и Нагелову тачку Na, а потом и трилинеарне поларе тачке Ge и

тачке Na. Центар Стевановићевог круга X_{650} је тачка пресјека те двије трилинеарне поларе.

2. Стевановићев круг сада лако може бити конструисан као круг чији је центар у тачки X_{650} и који је ортогоналан на било који од наведених девет кругова.



5. Веза Стевановићевог круга са другим круговима

5.1. Радикални круг Стевановићевог, Перијевог и М2 круга је описани круг

5.1.1. Тејлоров круг

5.1.1.1. Особине

Посматрајмо подножја H_A, H_B, H_C висина у троуглу ΔABC. Нормале из ових тачака на преостале двије странице троугла ΔABC у пресјеку са тим страницама дају редом тачке P_A, Q_A; P_B, Q_B; P_C, Q_C. Тејлоров круг је круг који пролази кроз тачке P_A, Q_A, P_B, Q_B, P_C и Q_C.
Фигуре $AH_C HH_B$ и $AP_A H_A Q_A$ су сличне, гдје је H ортоцентар троугла $\triangle ABC$, $P_A Q_A$ паралелна са $H_B H_C$ и $P_A Q_A$ сијече $H_A H_B$ и $H_A H_C$.
Ако је R полупречник описаног круга тада вриједи

$$P_A Q_A = P_B Q_B = P_C Q_C = 2R \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma .$$

Ако је $\triangle ABC$ оштроугли троугао тада још вриједи и

$$P_A Q_A = P_B Q_B = P_C Q_C = \frac{1}{2}\left(H_B H_C + H_C H_A + H_A H_B\right).$$

Једначина Тејлоровог круга је дата са

$$a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy - (x+y+z)\left(\left(\frac{bc\cos\alpha}{2R}\right)x + \left(\frac{ca\cos\beta}{2R}\right)y + \left(\frac{ab\cos\gamma}{2R}\right)z\right) = 0 .$$

Центар Тејлоровог круга је Кимберлингов центар X_{389} који је и центар Спикеровог круга ортичког троугла $\Delta H_A H_B H_C$ датог троугла ΔABC, у случају кад је ΔABC оштроугли троугао. Ову тачку називамо Тејлоровом тачком чије координате су дате са

$$X_{389}\left(a\left(\cos\alpha - \cos 2\alpha \cos(\beta-\gamma)\right) : b\left(\cos\beta - \cos 2\beta \cos(\gamma-\alpha)\right) : c\left(\cos\gamma - \cos\gamma \cos(\alpha-\beta)\right)\right)$$

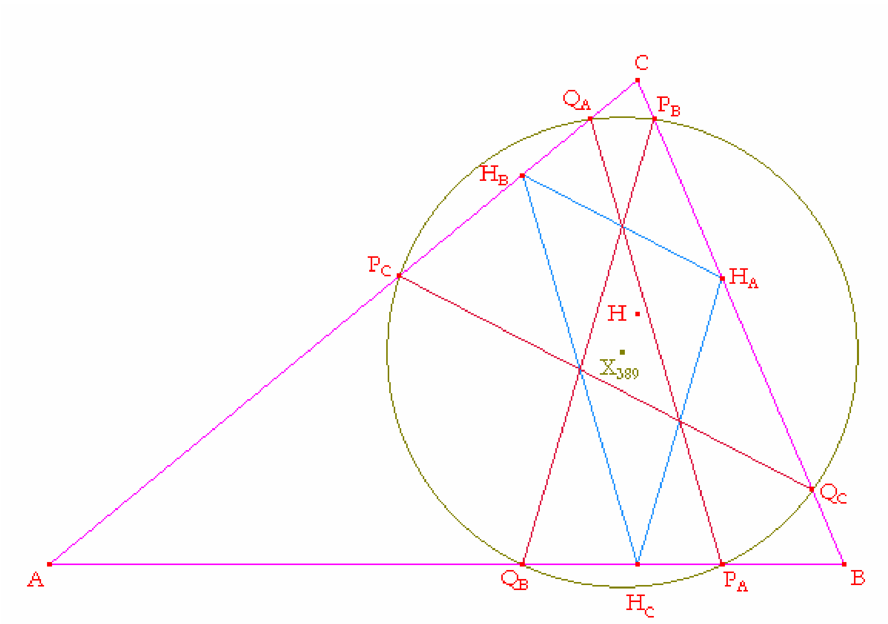
Тејлорова тачка лежи на Брокардовој оси $X_3 X_6$.
Радијус Тејлоровог круга је дат са

$$R_T = R\sqrt{\sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma + \cos^2\alpha \cos^2\beta \cos^2\gamma} .$$

Ниједна значајна тачка троугла не лежи на Тејлоровом кругу.

5.1.1.2. Конструкција

1. У датом троуглу ΔABC конструишимо ортоцентар H и подножја висина H_A, H_B, H_C.
2. Подножја нормала из тачака H_A, H_B и H_C на преостале двије странице троугла ΔABC означимо редом са P_A, Q_A; P_B, Q_B; P_C, Q_C.
3. Тејлоров круг је круг који пролази кроз тачке P_A, Q_A, P_B, Q_B, P_C и Q_C, а можемо га конструисати као описани круг троугла $\Delta P_A P_B P_C$ са центром у тачки X_{389}.



5.1.2. Дуов круг

5.1.2.1. Особине

Дуов круг је круг који сијече странице BC, CA, AB троугла ΔABC редом у тачкама A', A''; B', B''; C', C'' тако да вриједи

$$\angle A'AA'' = \angle B'BB'' = \angle C'CC'' = \frac{\pi}{2}.$$

Радијус Дуовог круга је дат са

$$R_D = \frac{R\sqrt{f(a,b,c)}}{8a^3b^3c^3\left|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right|},$$

гдје је R радијус описаног круга ΔABC, а $f(a,b,c)$ полином 18-ог степена.

Центар Дуовог круга је Кимберлингов центар X_{155} чије координате су дате са

$$X_{155}\left(\sin\alpha\cos\alpha\left(\cos^2\beta+\cos^2\gamma-\cos^2\alpha\right):\sin\beta\cos\beta\left(\cos^2\gamma+\cos^2\alpha-\cos^2\beta\right)\right.$$
$$\left.:\sin\gamma\cos\gamma\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos^2\gamma\right)\right)$$

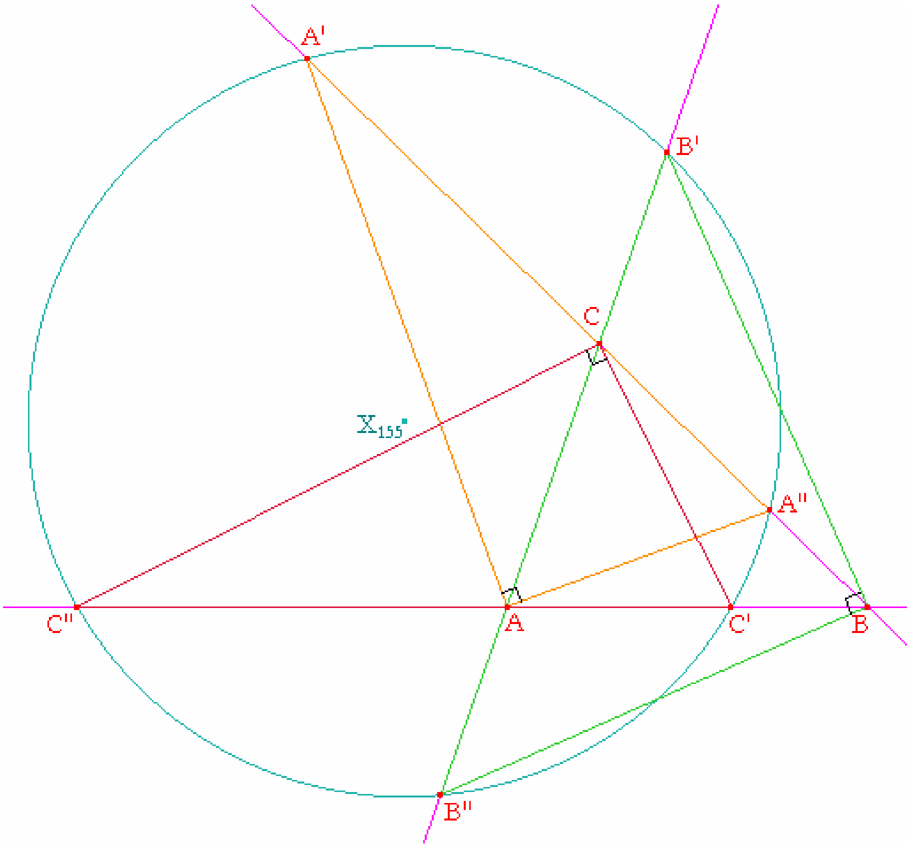
Тачка X_{155} лежи на правама X_5X_6, X_3X_{49}, X_1X_{90}, итд.

Ниједан Кимберлингов центар не лежи на Дуовом кругу.

5.1.2.2. Конструкција

1. За дати троугао ΔABC конструишимо тангентни троугао $\Delta T_AT_BT_C$.

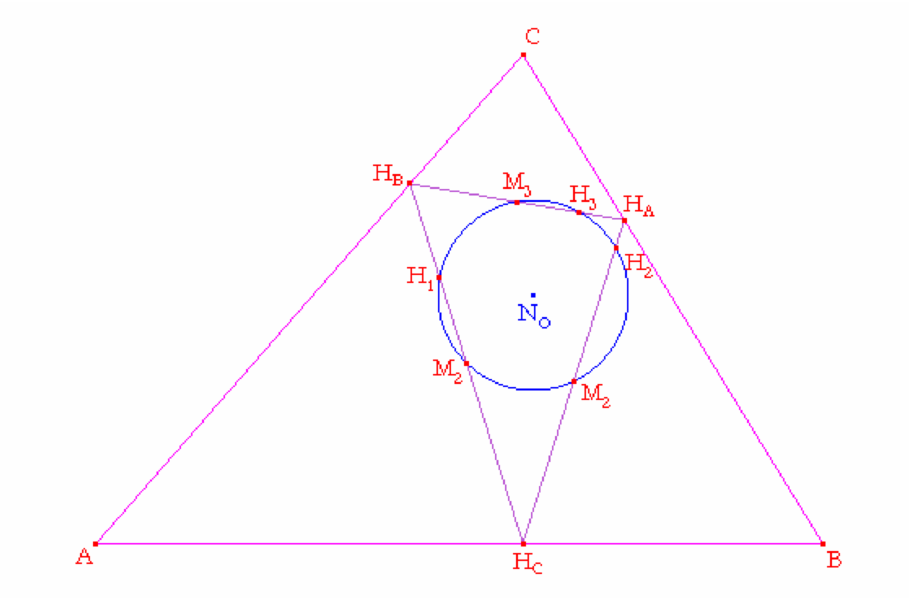
2. Тачка X_{155} је ортоцентар X_4 тангентног троугла $\Delta T_A T_B T_C$.
3. Означимо подножје нормале из тачке X_{155} на страницу BC троугла ΔABC са D. Тачке A' и A'' добијамо као пресјечне тачке странице BC и круга радијуса DA са центром у D.
4. Дуов круг је круг радијуса $X_{155}A'$ са центром у X_{155}. Тачке B', B''; C', C'' добијамо као пресјечне тачке Дуовог круга са страницама CA и AB.



5.1.3. Ојлеров круг ортичког троугла

Конструкција:

1. За дати троугао ΔABC конструишимо ортички троугао $\Delta H_A H_B H_C$, гдје су H_A, H_B и H_C подножја висина у ΔABC.
2. За ортички троугао $\Delta H_A H_B H_C$ конструишимо круг девет тачака или Ојлеров круг са центром у тачки N_O.



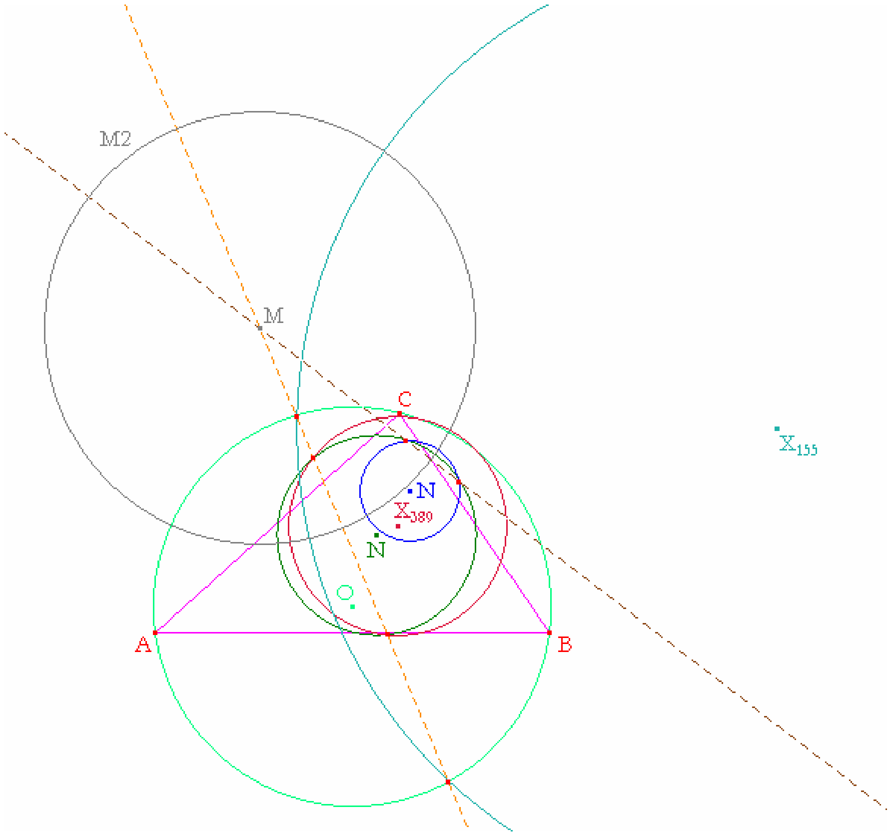
5.1.4. М2 круг

5.1.4.1. Особине

М2 круг је радикални круг описаног, Ојлеровог, Тејлоровог, Дуовог и Ојлеровог круга ортичког троугла.

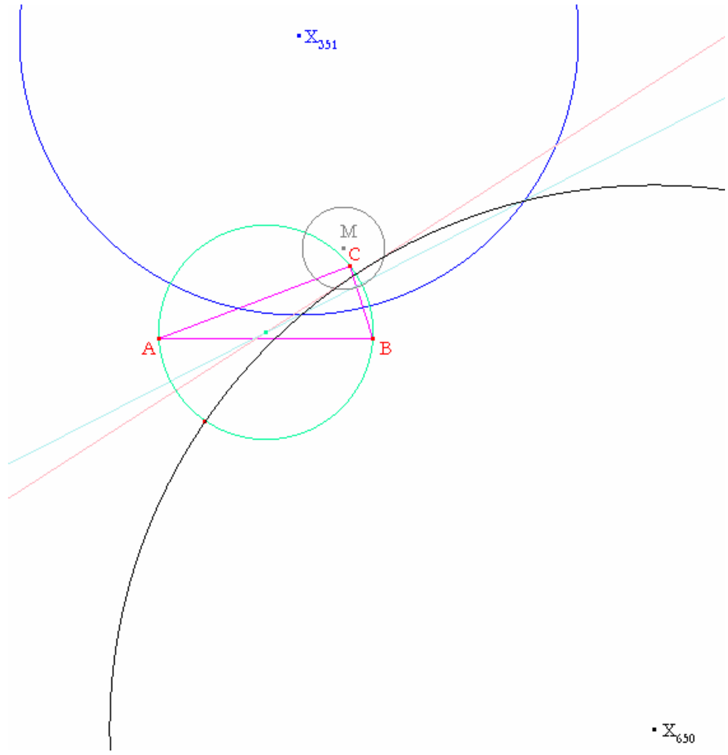
5.1.4.2. Конструкција

1. За дати троугао ΔABC конструишимо описани, Ојлеров, Тејлоров, Дуов и Ојлеров круг ортичког троугла.
2. Конструишимо радикалну осу описаног и Дуовог круга која је једнака радикалној оси Ојлеровог и Тејлоровог круга.
3. Конструишимо радикалну осу Ојлеровог круга троугла ΔABC и Ојлеровог круга троугла $\Delta H_A H_B H_C$.
4. Центар круга $M2$ је пресјечна тачка M ове двије радикалне осе.
5. Круг $M2$ можемо конструисати као круг ортогоналан на један од ових пет кругова са центром у тачки M .



5.1.5. Конструкција радикалног круга за Стевановићев, Перијев и М2 круг

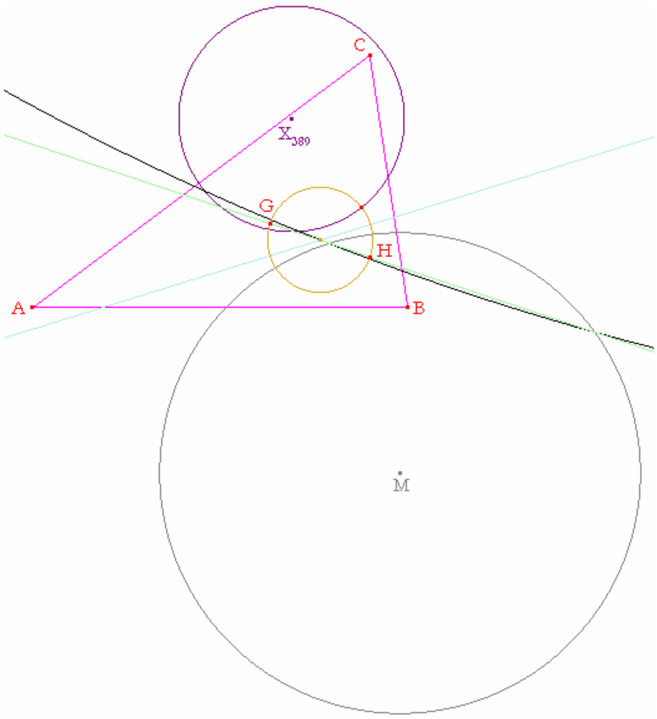
1. За дати троугао ΔABC конструишимо Стевановићев, Перијев и $M2$ круг
2. Конструишимо радикални круг Ова три круга.
3. Из конструкције видимо да врхови A, B, C троугла ΔABC припадају конструисаном радикалном кругу. Круг који пролази кроз врхове троугла ΔABC је јединствен и то је описани круг датог троугла.



5.2. Радикални круг Стевановићевог, Лестеровог и *M2* круг је ортоцентроидалан круг

Конструкција:

1. За дати троугао ΔABC конструишемо Стевановићев круг са центром у X_{650}, Лестеров круг са центром у X_{389} и круг $M2$ са центром у тачки M.
2. Конструишимо радикални круг ових кругова.
3. У ΔABC конструишимо ортоцентар H и тежиште G.
4. Из конструкције видимо да тачке H и G припадају конструисаном радикалном кругу и да су колинеарне са центром радикалног круга (леже на радикалној оси Стевановићевог и $M2$ круга). Круг чији пречник је дуж HG је јединствен и то је ортоцентроидалан круг.



6. Закључак

У овом раду обрађени су ортогонални кругови са посебним освртом на Стевановићев круг и кругове који су на њега ортогонални. Разлог због којег је у оквиру предмета Методика наставе геометрије рађен овај семинарски јесте овладавање командама Cabri-ja, програма за обраду геометријских конструкција. Са овим програмом могуће је извести све конструкције које се могу урадити и мануално помоћу оловке, лењира, шестара и угломјера. Све конструкције, у овом раду, су детаљно описане и одрађене у Cabri-jу.

7. Литература

[1] Милорад Стевановић, Предавања из Методике наставе геометрије, Бања Лука, 2006.

[2] http://mathworld.wolfram.com/topics/TriangleCircles.html

[3] http://faculty.evansville.com/ck6/encyclopedia/ETC.html

[4] http://groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/5811

[5] http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200320.pdf