

Један примјер понављања и систематизације градива из Стереометрије

Даниел А. Романо

Одсјек за математику и информатику Универзитета у Бањој Луци
E-mail: bato49@hotmail.com

1. Час уопштавања и систематизације знања из геометрија у средњој школи

Особеност људском мишљења је таква да чак и за разумјевање и меморисање простијих појмова, дефиниција и тврдњи потребно је више пута направити увид у материју. Зато уводне теме из стереометрије треба обрадити пажљиво и полагано (уз примјену технологије „узлазне спирале“), јер је процес заборављања неизбежан. Према томе, требало би у Оператини план реализације обавезно предвидјети часове рекапитулације али тако да се појмови и појаве стављају у сложеније ситуације уз инсистирање „корак по корак“ примјене претходног знања у новим ситуацијама.

Главни циљ таквих часова је у понављању дефиниција појмова и исказа теорема, те њихова примјена у нешто измјењеним условима, уз, евентуално укрупњавање дидактичких дијелова у оквирима одговарајуће теме. Повремено понављање материјала са почетка Стереометрије има посебно значење: то је добра основа за разумјевање стереометријских појмова у посебним условима, тј. то је добра подлога која би требало да омогући да ученици без већих потешкоћа рјешавају геометријске ситуације у којима се појављују пресјечи, површине, запремине и слично. Да би се избјегло једноставно понављање а у циљу подстицања самосталног рада ученика, требало би ученике третирати не само као објекте у наставном процесу већ као некога ко је способан да дјелимично учествује у том процесу. На примјер, требало би да један ученик задаје задатак другом уз активну асистенцију трећег чије би давање објашњења требало да омогући другом да самостално ријеша постављени проблем. Други начин ми могао, на примјер, да буде припрема реферата два ученика (референт и кореферент излагања) дијела градива које треба обновити.

У сваком случају, намјера је да се досегну слједећи циљеви:

2. Методички циљеви часа

2.1 Дидактички

(а) Нериједко се прихвата да је један од најбољих начина подучавања ученика процес при којем се остварује могућност развоја мишљења ученика. Да је тај развој реализован стиче се увид / дојам на основу способности ученика да по окончању предавачких активности наставника могу, евентуално, уз незнатну помоћ наставника, да примјене стечено теоријско знање у некој практичној ситуацији те да самостално могу да из те конкретне ситуације конструишу обрнута или аналогна питања у вези са елементима који се појављују у том практичном задатку.

(б) Анализирање једног мањег броја добро изабраних примјера требало би да подстакне ученике да се самостално упусте у постављање питања и тражењу одговора на њих. Овдје треба нагласити да, при томе, не морају бити дати одговори на тако постављена питања.

(в) Користећи се низом повезаних задатака може се омогућити ученицима да нешто дубље зађу у математичку теорију.

(г) Усвајање теме посредством узастопних рјешавања међусобно увезаних задатака, тако, прераста у јединствен процес прихватања новог знања те уз несметану примјену тог знања, превасходно охрабрује ученике, и омогућава стицање дојма о њиховој самосталности као и креативним активностима ученика.

2.2 Општекултурни

То се односи на развој језичко-логичког и практично-реалног интелекта учесника у наставном процесу, омогућава снажење осјећања доживљавања простора те ствара услове за додатни развој мишљења. Омогућава снажење:

(а) геометријске интуиције уз посматрање и анализирање односа у равнима и простору;

(б) просторног мишљења уз анализу и синтезу геометријских ликова те омогућава снажење имагинације (тродимензионог) простора;

(в) логичког мишљења уз овладавањем правилима логичког закључивања;

(г) способности разумјевања и примјене конструктивно-геометријских поступака; и

(д) осјећања сигурности при употреби симболичког језика геометрије.

2.3. Методске јединке које се понављају за вријеме часа

Геометрија има претходне дисциплине: математичку логику и теорију скупова. Основни појмови у Геометрији су: тачке, праве, равни и релација

инцидентно. Дакле, домени су: $T = \{A, B, C, \dots\}$ - фамилија тачака, $P = \{p, q, r, \dots\}$ - фамилија правих, $R = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ - фамилија равни. Релацију између варијабли тих класа означавамо са „ \in “ у смислу: $A \in p$ (тачка лежи на правој), $A \in \alpha$ (тачка лежи у равни) и терми у геометрији, а

$$(\forall a \in P)(\forall \alpha \in R)((\forall A \in T)(A \in a \Rightarrow A \in \alpha) \Leftrightarrow (a \subset \alpha)).$$


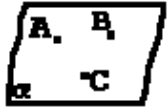

је формула у геометрији којом се прецизније објашњава (дефинише) појам „права лежи у равни“ као специјалан случај инциденције праве и равни.

1. Аксиоме стереометрије:

Аксиом 1: Двије тачке простора инцидентне су са једном правом.

Аксиом 2: Три неколинеарне тачке инцидентне су са једном равни.



Аксиом 3: Ако постоји тачка инцидентна са двије равни, тада постоји права инцидентна са датом тачком и са те двије равни.


Аксиома	Модел	Формално записивање
A ₁		$(\forall A, B \in T)(\exists a \in P)(A \in a \wedge B \in a)$
A ₂		$(\forall A, B, C \in T)((\forall p \in P)(\neg(A, B, C \in p) \Rightarrow (\exists \alpha \in R)(A, B, C \in \alpha))$
A ₃		$(\forall C \in T)(\forall \alpha, \beta \in R)(C \in \alpha \cap \beta \Rightarrow (\exists c \in P)(C \in c \wedge c = \alpha \cap \beta))$

У уводном дијелу часа издвојити битне моменте:

- (а) Објаснити садржај аксиома и направити модел за њих;
- (б) Записати ријечима аксиоме.

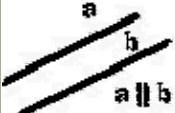
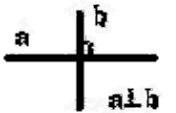
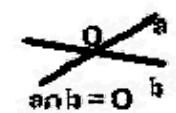
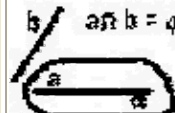






2. Једноставне, а потребне послједице горњих аксиома:

	Модел	Исказ послједице
Сл.1		Тврдња 1. Ако су двије тачке праве инцидентне са равни, тада су све тачке те праве инцидентне са том равни. (Увођење појма „права лежи у равни“ и ознаке „ $a \subset \alpha$ “.)
Сл.2		Тврдња 2. За дату праву и дату тачку, неинцидентну са том правом, постоји једна и само једна равна инцидентна са датом тачком и датом равни.

Сл.3.		Са сваке двије праве које се сијеку постоји једна и само једна раван инцидентна са тим правама.
-------	---	---

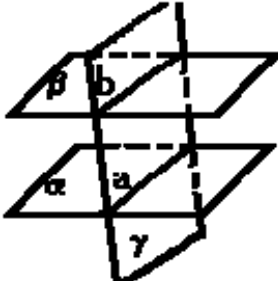
3. Међусобни односи основних појмова:

- (а) Међусобни однос двају и више тачака;
- (б) Међусобни однос двају правих;
- (в) Међусобни однос праве и равни; и
- (г) Међусобни однос двају равни.

 $a \parallel b$	 $a \perp b$	 $a \cap b = O$	 $b \cap \alpha = \emptyset$
 $a \in \alpha$	 $b \cap \alpha = a$	 $a \cap \alpha = b$	 $\alpha \cap \beta = a$
 $\alpha \cap \beta = a$		 $\alpha \parallel \beta$	

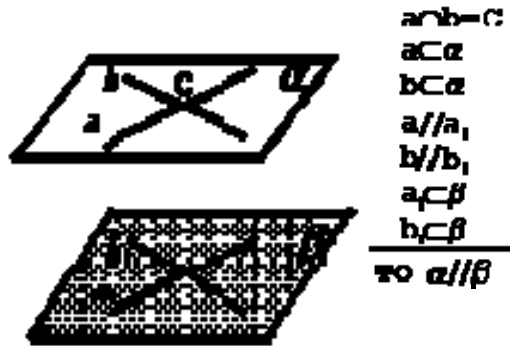
4. Веза између паралелних правих и паралелних равни:

Теорем 1: Ако се двије паралелене равни пресјеку трећом, линије пресека су паралелне праве.



$$\begin{array}{l}
 \alpha \cap \gamma = a \\
 \beta \cap \gamma = b \\
 \hline
 \alpha \parallel \beta \\
 \hline
 a \parallel b
 \end{array}$$

Теорем 2: *Ако су двије пресецајуће праве (у једној равни) паралелне другим двијема правима у другој равни, тада су те равни паралелне.*

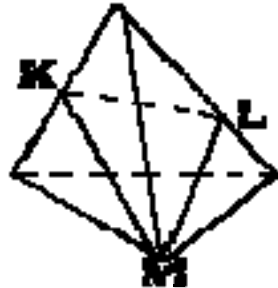


5. Теореме о једнозначној одређености равни.

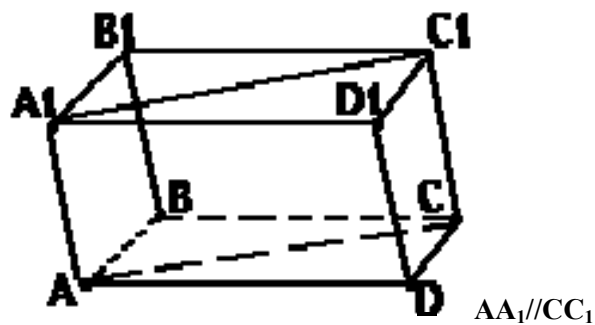
Могућност једнозначног одређивања равни	Модел	напомена
I. трима неколинеарним тачкама		A ₂
2. правом и једном тачком изван ње.		Сл 2
3. Двијема пресецајућим правима		Сл 3
4. Двијема паралелним правима		Дефиниција паралелних правих

6. Кориштењем раније формираног знања посматрати пресеке правих и/или равнинама полиедара: (Доље дате примјере оставити да ученици само рјеше (уз незнантну помоћ наставника))

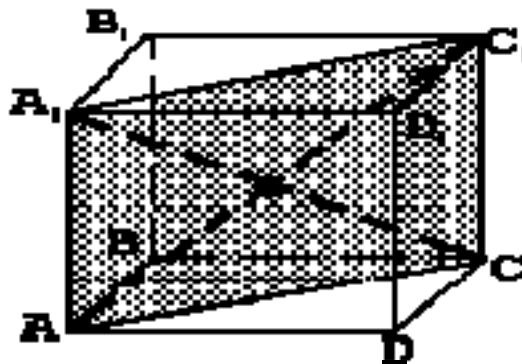
N₁. Конструкција пресека тетраедра, изнуђена тачкама К, L, M.



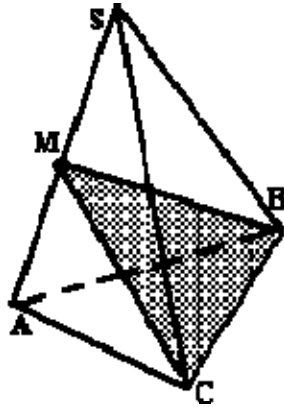
N₂. Описати пресјек детерминисан правама AA_1 и CC_1 .



N₃. Описати пресјек детерминисан правама AC_1 и A_1C уз услов $AC_1 \cap A_1C \neq \emptyset$.

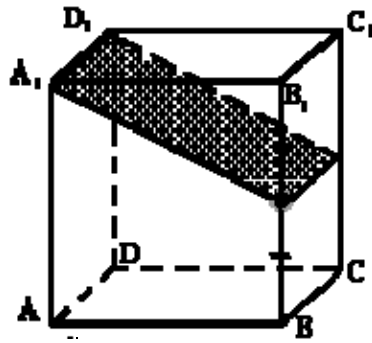


N₄. Конструисати пресјек по правој BC и тачки M .



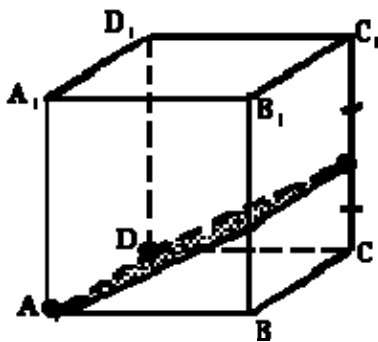
7. Конструисати пресјек уз искориштавање својстава паралелних равни.

N₅. Детерминисати облик и површину пресјека и наћи дијагоналу пресјека коцке ABCDA₁B₁C₁D₁ равнином која пролази страницом A₁D₁ и средином странице BB₁, ако је дужиба странице коцке 8 цм.



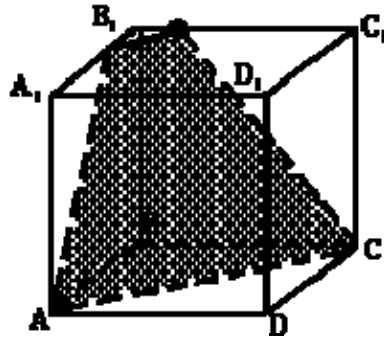
$$P = 16 + 8\sqrt{5} = 8(2 + \sqrt{5}) \text{ cm}$$

N₆. Детерминисати облик и површину пресјека и наћи дијагоналу пресјека коцке ABCDA₁B₁C₁D₁ равнином која пролази тачкама A и D, и средином странице CC₁, ако је дужина странице коцке 4 цм.

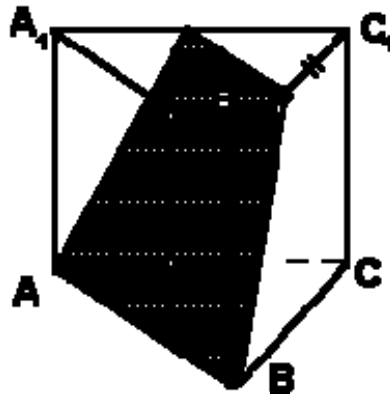


$$P = 8 + 4\sqrt{5} = 4(2 + \sqrt{5}) \text{ cm}$$

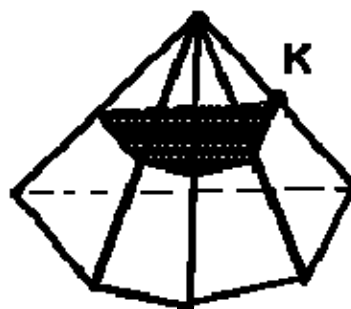
N₇ Описати облик пресека коцке $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равнином која пролази тачком $M \in B_1 C_1$ и дијагоналном доње базе коцке.



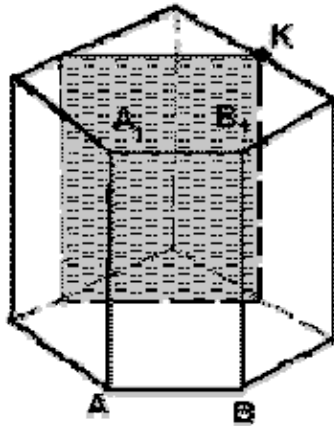
N₈ Конструисати пресјек правилне призме равнином која пролази страницом AB и средином странице $B_1 C_1$.



N₉ Конструисати пресјек пирамиде равнином која пролази датом тачком а паралелна је бази пирамиде.



N₁ Конструисати пресјек призме равнином која пролази тачком K а паралелна је страни $ABB_1 A_1$.

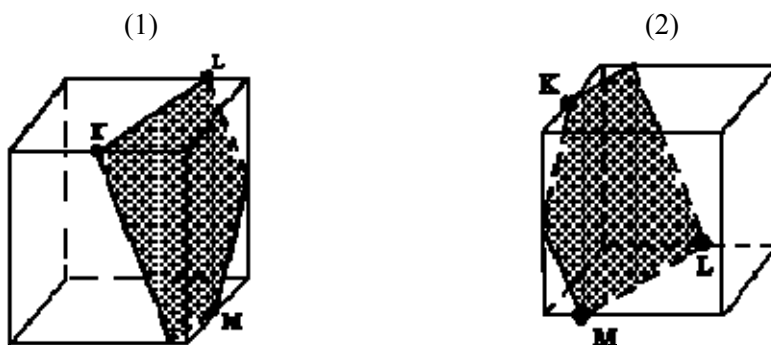


3. Задаци за вјежбе

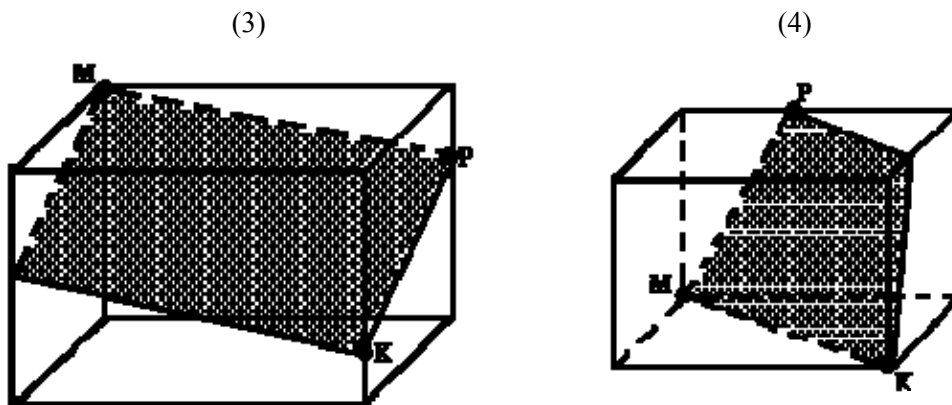
У свакој дјелатности, а посебно у подучавању, лако је уочити да постоје двије стране те дјелатности: вањску – предметну страну и унутрашњу - психолошку страну. Успјешно усвајање наставних садржаја у било којој области знања је оствариво ако се првим јавља вањска дјелатност, која потом прелази у унутрашњу дјелатност као резултат трансформације вањских активности ученика у сагледавању вањских карактеристика предметног наставног материјала према унутрашњим субјективним карактеристикама ученика, формирању његових когнитивних равни. Такав процес психолози називају интериозацијом. То је врло важно при учењу стереометрије у основној а посебно у средњој школи. У циљу снажења тог процеса користе се методе посебних задатака за вјежбање.

Реализација ових вјежби привлачи пажњу ученика те помаже снажења интереса за математику. Поступак провођења таквих вјежби требало би да је у сагласности са индивидуалним карактеристикама сваког појединог ученика.

Задатак 1. (а) Конструисати пресјек коцке изнуђен трима тачкама, како је то показано на слједећим моделима (цртежима):

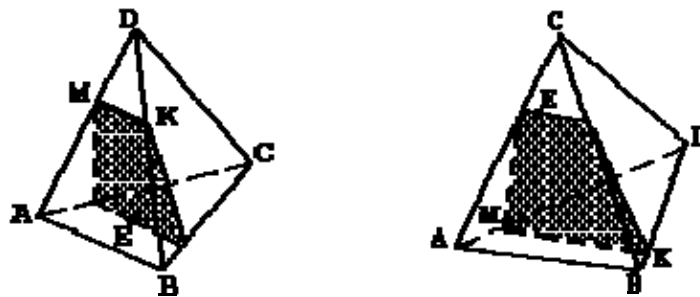


(6) *Конструисати пресјек паралелоипеда равнинама које пролазе тачкама M, P, K . Како је то показано на слједећим цртежима:*

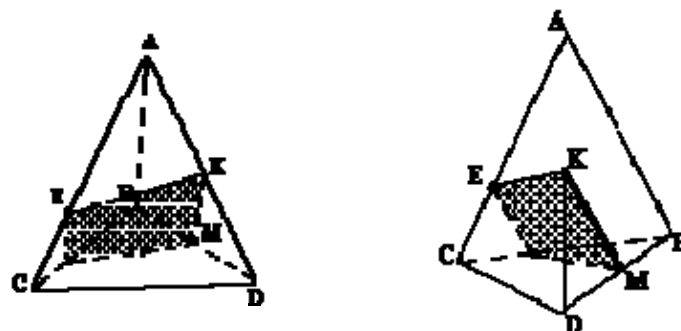


Задатак 2. (Задатак у којем се користе својства паралелности праве и равни.) На цртежима су приказани модели пирамида. *Конструисати пресјеке тих пирамида равнинама које пролазе тачкама M, K и тачком E , знајући да је $MK \parallel AB$, а да тачка E припада равни (ABC) .*

(a)

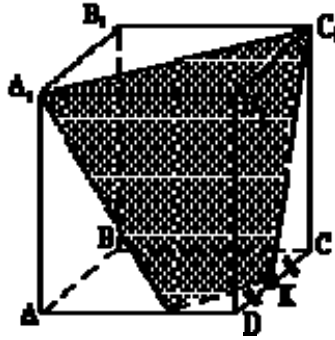


(б)



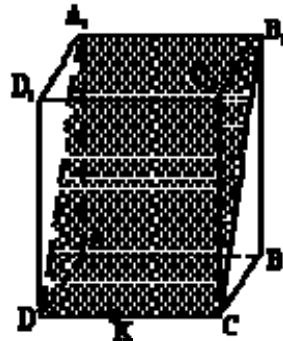
Задатак 3. (Задатак у чијем рјешавању треба користити својства паралелности равни).

3.1 Дата је коцка $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Доказати да је пресјек коцке равнином $(A_1 C_1 K)$, гдје је K средина ивице DC - трапез.



Упутство: $MK \parallel A_1 C_1$, будући да је $(A_1 D_1 C_1)$ паралелно са (ADC) , а MK и $A_1 C_1$ су линије пресјека тих равнина. Како је $MK \parallel A_1 C_1$, $\neg(A_1 M \parallel C_1 K)$, $MK \neq A_1 C_1$, имамо да је $MA_1 C_1 K$ - трапез.

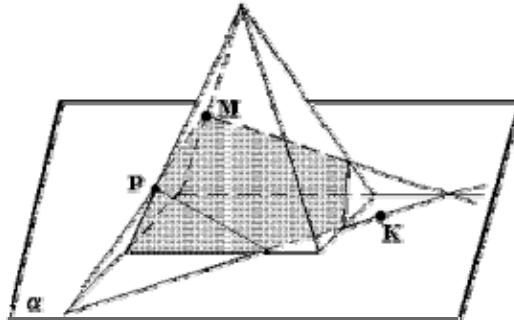
3.2. Дата је коцка $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Доказати да је пресјек ове коцке равнином $(A_1 B_1 K)$ - паралелограм.



Упутство: Како је $(AA_1 B_1) \parallel (DD_1 C)$, то је $A_1 B_1 \parallel DC$ и $A_1 B_1 = DC$, па је $(AA_1 D_1) \parallel (BB_1 C_1)$. Како је $A_1 D \parallel B_1 C$ имамо да је $A_1 B_1 CD$ - паралелограм.

Задатак 4. Конструисати пресјек тијела равнином α која пролази унапријед изабраним тачкама M, P, K , при чему је $K \in \alpha$.

(4.1.)



(4.2)

