O NEKIM VIŠESTRUKIM INTEGRALIMA

ZORAN D. MITROVIĆ

1. Uvod

Ovaj rad je motivisan rezultatima izloženim u članku [3], gdje se, koristeći metode teorije vjerovatnoće, računaju neki integrali koje nije, po mišljenju autora, jednostavno izračunati koristeći tehnike koje se izučavaju u standardnom kursu matematičke analize. Autor članka postavlja problem da se dati integrali izračunaju bez teorije vjerovatnoće. Koristeći metode iznesene u tom članku kao i druge postupke koji se koriste u teoriji vjerovatnoće, računamo neke klase višestrukih integrala i pokazujemo neke sumacione formule.

U ovom dijelu uvodimo neke pojmove koji se obrađuju u standardnim kursevima teorije vjerovatnoće i matematičke statistike, a koji su nam neophodni za dalji rad.

1.1. **Slučajne promjenljive.** U klasičnoj teoriji vjerovatnoće osnovni pojam je slučajni dogadjaj. Savremena teorija vjerovatnoće je teorija slučajnih promjenljivih. U opitu se svakom ishodu može pridružiti neki realan broj. To nas dovodi do definicije slučajne promjenljive. Neka je Ω prostor elementarnih dogadjaja i $\mathcal{F}$ $\sigma-$polje dogadjaja na Ω. Za funkciju $X : \Omega \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{F} \text{ za sve } x \in \mathbb{R},$$

kažemo da je **slučajna promjenljiva** (**veličina**). Dogadjaj $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$ kraće označavamo sa $\{X < x\}$. Slučajna promjenljiva X je **diskretnog tipa (diskretna)** ako je skup $X(\Omega)$ prebrojiv. Diskretna slučajna promjenljiva X je opisana ako se zna skup $X(\Omega) = \{x_i : i \in I\}$, gdje je I prebrojiv skup i ako se znaju vjerovatnoće

$$p_i = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}, i \in I.$$

Zakon raspodjele diskretne slučajne promjenljive X dat je tabelom

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}.$$

Ovde je

$$\bigcup_{i\in I}\{X = x_i\} = \Omega \text{ i } \sum_{i\in I} p_i = 1.$$

Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna promjenljiva. Funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$F(x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\},$$

naziva se **funkcija raspodjele** slučajne promjenljive X. Slučajna promjenljiva X je **neprekidnog** tipa ako postoji nenegativna integrabilna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Funkcija f je **gustina raspodjele vjerovatnoća** slučajne promjenljive X. U nekim slučajevima ishodu nekog opita možemo pridružiti više numeričkih karakteristika. Na primjer, tačka pogotka mete može da se opiše sa dvije slučajne promjenljive, apscisom i ordinatom. Ovakvi primjeri nas dovode do pojma **višedimenzionalne slučajne promjenljive**. Funkcija $X = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je $n-$**dimenzionalna slučajna promjenljiva (slučajni vektor)**, ako je za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ funkcija X_i slučajna promjenljiva. Ako su $X_i,\ i \in \{1, \ldots, n\}$ diskretne (neprekidne) slučajne promjenljive onda je X **diskretna** (**neprekidna**) $n-$dimenzionalna slučajna promjenljiva.

1.2. **Matematičko očekivanje i varijansa.** Neka je X diskretna slučajna promjenljiva čiji je zakon raspodjele vjerovatnoća dat sa

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}.$$

Matematičko očekivanje slučajne promjenljive X je broj

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n p_n,$$

ako je dati red apsolutno konvergentan.

Za neprekidnu slučajnu promjenljivu sa gustinom raspodjele f, matematičko očekivanje definiše se sa

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx,$$

ako je integral apsolutno konvergentan.

Neka je X slučajna promjenljiva i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data funkcija. Ako je X diskretnog tipa onda je

$$E(g(X)) = \sum_{n=1}^{+\infty} g(x_n) p_n.$$

U slučaju da je X neprekidnog tipa sa gustinom f onda je

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx.$$

Ako je $(X_1, \ldots, X_n)$ $n-$dimenzionalna slučajna promjenljiva neprekidnog tipa sa funkcijom gustine vjerovatnoća $f(x_1, \ldots, x_n)$ i $Y = g(X_1, \ldots, X_n)$, matematičko očekivanje $E(Y)$ možemo računati na jedan od sljedeća dva načina. Možemo direktno računati

$$Eg(X_1, \ldots, X_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, \ldots, x_n) f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

ili možemo odrediti funkciju gustine vjerovatnoća $f_Y(y)$ slučajne promjenljive Y i

$$Eg(X_1, \ldots, X_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy.$$

Na taj način dobijamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, \ldots, x_n) f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy. \tag{1.1}$$

U slučaju da je $(X_1, \ldots, X_n)$ $n-$dimenzionalna slučajna promjenljiva diskretnog tipa na sličan način dobijamo

$$\sum_{x_1} \cdots \sum_{x_n} g(x_1, \ldots, x_n) P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \sum_{y} y P(Y = y), \tag{1.2}$$

gdje je sa $P(Y = y), y \in g(X_1(\Omega), \ldots, X_n(\Omega))$, dat zakon raspodjele slučajne promjenljive $Y = g(X_1, \ldots, X_n)$. Formule (1.1) i (1.2) su ključne za rezultate koje izlažemo ovdje. Neka je X slučajna promjenljiva sa matematičkim očekivanjem $E(X)$. **Varijansa** ili **disperzija** slučajne promjenljive X definiše se kao matematičko očekivanje slučajne promjenljive $(X - E(X))^2$, to jest

$$Var(X) = E(X - E(X))^2.$$

1.3. **Karakteristične funkcije. Karakteristična funkcija** h slučajne promjenljive X je funkcija $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$h(t) = E(e^{itX}).$$

Ako je f gustina slučajne promjenljive X, tada je

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx,$$

a ako je sa $p_k = P(X = x_k)$ dat zakon raspodjele diskretne slučajne promjenljive X, onda je

$$h(t) = \sum_{k} e^{itx_k} p_k.$$

2. Višestruki integrali

Koristeći prethodno uvedene pojmove izračunaćemo neke višestruke integrale.

2.1.

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{x_1}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{2}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Dati integral predstavlja matematičko očekivanje slučajne promjenljive

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2 + \cdots + X_n},$$

gdje su slučajne promjenljive $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne i sa istom normalnom raspodjelom $\mathcal{N}(0,1)$. Kako je

$$E(Y_1 + \cdots + Y_n) = E(1) = 1,$$

$$E(Y_1) = \cdots = E(Y_n),$$

gdje je

$$Y_k = \frac{X_k}{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}, k = 1, \ldots, n,$$

imamo

$$E(Y_1) = \frac{1}{n},$$

pa vrijedi,

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{x_1}{x_1+x_2+\cdots+x_n}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{2}}dx_1dx_2\cdots dx_n=\frac{1}{n}.$$

2.2.

$$\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{\lambda^n(x_1\cdots x_n)^{\lambda-1}}{\ln(x_1\cdots x_n)}dx_1\cdots dx_n,\lambda>0,n\geq 2.$$

Neka su $X_1,\ldots,X_n$ nezavisne slučajne promjenljive sa istom funkcijom gustine raspodjela

$$f(x)=\begin{cases}\lambda x^{\lambda-1}, & x\in(0,1),\\ 0, & x\notin(0,1).\end{cases}$$

Definišimo slučajnu promjenljivu

$$Y=\left(\sum_{i=1}^n\ln X_i\right)^{-1}.$$

Kako su $X_1,\ldots,X_n$ nezavisne slučajne promjenljive, za funkciju gustine slučajnog vektora $(X_1,\ldots,X_n)$ imamo

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^n f(x_i)=\lambda^n(x_1\cdots x_n)^{\lambda-1},x_i\in(0,1)$$

i

$$E\left(\sum_{i=1}^n\ln X_i\right)^{-1}=\int_0^1\cdots\int_0^1\left(\sum_{i=1}^n\ln x_i\right)^{-1}\lambda^n(x_1\cdots x_n)^{\lambda-1}dx_1\cdots dx_n$$

$$=\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{\lambda^n(x_1\cdots x_n)^{\lambda-1}}{\ln(x_1\cdots x_n)}dx_1\cdots dx_n.$$

Ako slučajna promjenljiva X ima funkciju gustine raspodjela vjerovatnoća

$$f(x)=\begin{cases}\lambda x^{\lambda-1}, & x\in(0,1),\\ 0, & x\notin(0,1),\end{cases}$$

onda slučajna promjenljiva $W=-\ln X$ ima eksponencijalnu raspodjelu, pri čemu je funkcija gustine $f_W(w)$ data sa

$$f_W(w)=f(e^{-w})\left|\frac{d}{dw}e^{-w}\right|=\lambda(e^{-w})^{\lambda-1}|-e^{-w}|=\lambda e^{-\lambda w},w>0.$$

Kako su $X_1,\ldots,X_n$ nezavisne slučajne promjenljive i $W_i=-\ln X_i, i=1,\ldots,n$ su nezavisne. Dalje, kako su $W_1,\ldots,W_n$ nezavisne slučajne promjenljive sa istom eksponencijalnom raspodjelom sa parametrom $1/\lambda$, slučajna promjenljiva $\sum_{i=1}^n W_i$ ima gama raspodjelu sa parametrima $1/\lambda$ i n. Prema tome, slučajna promjenljiva

$$U=-\sum_{i=1}^n\ln X_i,$$

ima funkciju gustine datu sa

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{\lambda^n u^{n-1} e^{-\lambda u}}{\Gamma(n)}, & u \geq 0, \\ 0, & u < 0, \end{cases}$$

i

$$E(Y) = E(-1/U) = \int_0^{+\infty} -\frac{1}{u} \frac{\lambda^n u^{n-1} e^{-\lambda u}}{\Gamma(n)} du$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} \lambda^n u^{n-2} e^{-\lambda u} du = -\frac{\lambda \Gamma(n-1)}{\Gamma(n)} = -\frac{\lambda}{n-1}.$$

2.3.

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{\lambda^n [(1+x_1)\cdots(1+x_n)]^{1-\lambda}}{\ln[(1+x_1)\cdots(1+x_n)]} dx_1 \cdots dx_n, \lambda > 0, n \geq 2.$$

Neka su $X_1, \ldots, X_n$ slučajne promjenljive sa istom funkcijom gustine raspodjela vjerovatnoća

$$f(x) = \begin{cases} \lambda(1+x)^{-(\lambda+1)}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Definišimo slučajnu promjenljivu

$$Y = \left(\sum_{i=1}^n \ln(1+X_i) \right)^{-1}.$$

Kako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne promjenljive, za funkciju gustine vjerovatnoća slučajnog vektora $(X_1, \ldots, X_n)$ imamo

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \lambda^n [(1+x_1)\cdots(1+x_n)]^{-(\lambda+1)}, x_i > 0$$

i

$$E\left(\sum_{i=1}^n \ln(1+X_i) \right)^{-1}$$

$$= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^n \ln(1+x_i) \right)^{-1} \lambda^n [(1+x_1)\cdots(1+x_n)]^{-(\lambda+1)} dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{\lambda^n [(1+x_1)\cdots(1+x_n)]^{-(\lambda+1)}}{\ln[(1+x_1)\cdots(1+x_n)]} dx_1 \cdots dx_n.$$

Ako slučajna promjenljiva X ima funkciju gustine

$$f(x) = \begin{cases} \lambda(1+x)^{-(\lambda+1)}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

onda slučajna promjenljiva $W = \ln(1+X)$ ima eksponencijalnu raspodjelu sa parametrom λ, to jest, za gustinu raspodjele vjerovatnoća $f_W(w)$ slučajne promjenljive W vrijedi

$$f_W(w) = f(e^w - 1) \left| \frac{d}{dw}(e^w - 1) \right| = \lambda e^{-(\lambda+1)w} |e^w| = \lambda e^{-\lambda w}, w > 0.$$

Kao i ranije u **2.2.** slučajna promjenljiva

$$U = \sum_{i=1}^n \ln(1+X_i)$$

ima gama raspodjelu sa parametrima $1/\lambda$ i n i

$$E(Y) = E(1/U) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u} \frac{\lambda^n u^{n-1} e^{-\lambda u}}{\Gamma(n)} du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} \lambda^n u^{n-2} e^{-\lambda u} du = \frac{\lambda \Gamma(n-1)}{\Gamma(n)} = \frac{\lambda}{n-1}.$$

Dakle,

$$\int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \frac{\lambda^n [(1+x_1)\cdots(1+x_n)]^{1-\lambda}}{\ln[(1+x_1)\cdots(1+x_n)]} dx_1 \cdots dx_n = \frac{\lambda}{n-1}.$$

2.4.

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \min\{x_1, \ldots, x_n\} dx_1 \cdots dx_n.$$

Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne promjenljive sa istom uniformnom raspodjelom na $[0,1]$. U tom slučaju za gustinu raspodjele vjerovatnoća slučajnog vektora $(X_1, \ldots, X_n)$ imamo

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 1, x_i \in [0,1], i = 1, \ldots, n,$$

pa za slučajnu promjenljivu

$$Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\},$$

$$E(Y) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \min\{x_1, \ldots, x_n\} dx_1 \cdots dx_n.$$

Odredimo gustinu raspodjele vjerovatnoća $f_Y(y)$ slučajne promjenljive Y. Za funkciju raspodjele vjerovatnoća $F_Y(y)$ imamo

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(\min\{X_1, \ldots, X_n\} < y)$$

$$= 1 - P(\min\{X_1, \ldots, X_n\} \geq y) = 1 - P(X_1 \geq y, \ldots, X_n \geq y),$$

pa zbog nezavisnosti dobijamo

$$F_Y(y) = 1 - P(X_1 \geq y) \cdots P(X_n \geq y) = 1 - (1-y)^n, y \in [0,1],$$

odavde,

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = n(1-y)^{n-1}, y \in [0,1],$$

pa je

$$E(Y) = \int_0^1 y f_Y(y) dy = n \int_0^1 y(1-y)^{n-1} dy = \frac{1}{n+1}.$$

Dakle,

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \min\{x_1, \ldots, x_n\} dx_1 \cdots dx_n = \frac{1}{n+1}.$$

3. Sumacione formule

Na kraju, pokazaćemo neke sumacione formule koristeći metode teorije vjerovatnoće.

3.1.
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{2^n}\binom{n}{k}-\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{2^n}\binom{n}{k}\right)^2=\frac{n}{4}$$

Neka su X i Y nezavisne slučajne promjenljive sa Poissonovom raspodjelom $\mathcal{P}(\lambda)$. Odredimo $E(X|X+Y=m)$ i $Var(X|X+Y=m)$.
Imamo
$$P\{X=k|X+Y=m\}=\frac{P\{X=k,X+Y=m\}}{P\{X+Y=m\}},k=0,1,\ldots,m.$$
Dalje, kako je $P\{X=k,X+Y=m\}=P\{X=k,Y=m-k\}$, zbog nezavisnosti slučajnih promjenljivih X i Y je
$$P\{X=k,X+Y=m\}=\binom{m}{k}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-2\lambda},k=0,1,\ldots,m.$$
Osim toga,
$$P\{X+Y=m\}=\sum_{i=0}^{m}P\{X=i\}P\{Y=m-i\}=\frac{(2\lambda)^m}{m!}e^{-2\lambda}.$$
Sada je
$$P\{X=k|X+Y=m\}=\frac{\binom{m}{k}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-2\lambda}}{\frac{(2\lambda)^m}{m!}e^{-2\lambda}}=\frac{1}{2^m}\binom{m}{k}.$$
Znači $X|X+Y=m$ ima binomnu raspodjelu $\mathcal{B}(m,\frac{1}{2})$, pa je
$$E(X|X+Y=m)=\frac{m}{2},Var(X|X+Y=m)=\frac{m}{4}.$$
S druge strane,
$$E(X|X+Y=m)=\sum_{k=0}^{m}\frac{k}{2^m}\binom{m}{k}$$
i
$$Var(X|X+Y=m)=\sum_{k=0}^{m}\frac{k^2}{2^m}\binom{m}{k}-\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{k}{2^m}\binom{m}{k}\right)^2,$$
pa dobijamo 3.1.

3.2.
$$\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}=\frac{\lambda n(\lambda n+\mu)}{(\lambda+\mu)^2}.$$

Pretpostavimo da su slučajne promjenljive $X_1,\ldots,X_k$ medjusobno nezavisne i važi
$$X_i:\mathcal{P}(\lambda_i),i=1,\ldots,k.$$
Odredimo matematičko očekivanje i varijansu za slučajnu promjenljivu
$$(X_1+\cdots+X_j)|X_1+\cdots+X_k=n,j\leq k.$$
Koristeći matematičku indukciju jednostavno se pokaže da ako nezavisne slučajne promjenljive $X_1,\ldots,X_m$ imaju Poissonove raspodjele $\mathcal{P}(\lambda_1),\ldots,\mathcal{P}(\lambda_m)$ respektivno da tada slučajna promjenljiva $\sum\limits_{i=1}^{m}X_i$ ima Poissonovu raspodjelu $\mathcal{P}(\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i)$. Ako sada stavimo da je
$$X=X_1+\cdots+X_j,$$
$$Y=X_{j+1}+\cdots+X_k$$

imamo da je

$$P\{X=i|X+Y=n\}=\frac{P\{X=i\}P\{Y=n-i\}}{P\{X+Y=n\}},$$

pa je

$$P\{X=i|X+Y=n\}=\frac{\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\cdot\frac{\mu^{n-i}}{(n-i)!}e^{-\mu}}{\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}e^{-(\lambda+\mu)}}=\binom{n}{i}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^i\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-i},$$

gdje je $\lambda=\sum\limits_{i=1}^{j}\lambda_i$ i $\mu=\sum\limits_{i=j+1}^{n}\lambda_i$.

Znači, $(X_1+\cdots+X_j)|X_1+\cdots+X_k=n$ ima binomnu raspodjelu $\mathcal{B}\left(n,\frac{\lambda_1+\cdots+\lambda_j}{\lambda_1+\cdots+\lambda_k}\right)$, pa je

$$E((X_1+\cdots+X_j)|X_1+\cdots+X_k=n)=n\cdot\frac{\lambda_1+\cdots+\lambda_j}{\lambda_1+\cdots+\lambda_k}$$

i

$$Var((X_1+\cdots+X_j)|X_1+\cdots+X_k=n)=n\cdot\frac{\lambda_1+\cdots+\lambda_j}{\lambda_1+\cdots+\lambda_k}\cdot\frac{\lambda_{j+1}+\cdots+\lambda_k}{\lambda_1+\cdots+\lambda_k}.$$

Na osnovu ovoga i formule $Var(X)=E(X^2)-E^2(X)$, dobijamo **3.2.**

3.3.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{k!}\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^{n-k}\cdot\frac{1}{(n-k)!}\right)=1.$$

Definišimo diskretnu slučajnu promjenljivu X na sljedeći način. Pretpostavimo da se n kuglica nalazi u n kutija. Sve kuglice su izvadjene iz kutija i na slučajan način vraćene, neka je X broj kuglica koje se nalaze na prvobitnim mjestima. Izračunajmo $E(X)$.

Neka je

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{ako je } i\text{−ta kuglica na prvobitnom mjestu,}\\ 0, & \text{ako } i\text{−ta kuglica nije na prvobitnom mjestu.}\end{cases}$$

Za svaku fiksiranu kuglicu, vjerovatnoća da se nalazi na prvobitnom mjestu je $\frac{1}{n}$, to jest

$$X_i:\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n}\end{pmatrix},\ \text{pa je}$$

$$E(X_i)=\frac{1}{n},\quad (i=1,\ldots,n).$$

Pošto je $X=X_1+\cdots+X_n$ to je $E(X)=n\cdot\frac{1}{n}=1$.

Koristeći standardan način imamo $E(X)=\sum\limits_{k=0}^{n}kP\{X=k\}$

Vjerovatnoću $P\{X=k\}$ dobijamo koristeći formulu

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le k}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^kP(A_1\ldots A_k).$$

Lako se dobije

$$P\{X=k\}=\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-+\ldots(-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!}\right),$$

pa je

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{k!}\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^{n-k}\cdot\frac{1}{(n-k)!}\right).$$

Na taj način smo pokazali da je

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^{n-k} \cdot \frac{1}{(n-k)!}\right) = 1,$$

to jest vrijedi **3.3.**

3.4.

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np + 3n(n-1)p^2 + n(n-1)(n-2)p^3.$$

Neka X ima binomnu raspodjelu $\mathcal{B}(n,p)$. Karakteristična funkcija slučajne promjenljive X je

$$h(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n.$$

Kako je

$$E(X^3) = \frac{h^{(3)}(0)}{i^3},$$

nakon diferenciranja dobijamo da je

$$E(X^3) = np + 3n(n-1)p^2 + n(n-1)(n-2)p^3.$$

Odavde koristeći definiciju matematičkog očekivanja dobijamo formulu **3.4.**
Na sličan način se može pokazati i sljedeća formula.

3.5.

$$\sum_{k=0}^{n} k^m \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{h^{(m)}(0)}{i^m},$$

gdje je $h(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n$.

Napomena. *Jedna varijanta integrala **2.1** nalazi se u knjizi [2] (zadatak 3. 23). Integrali **2.2** i **2.3** su riješeni u članku [3]. Sumaciona formula **3.2** je posljedica zadatka 3. 18 u [2], a sumaciona formula **3.3** se nalazi u knjizi [1] i pokazana je u zadatku 3.19 u [2].*

Literatura

1. M. Merkle, P. Vasić, *Verovatnoća i statistika,* Beograd, 1998.
2. M. Jovanović, M. Merkle, Z. Mitrović, *Vjerovatnoća i statistika, zbirka riješenih zadataka,* Banja Luka, 2006.
3. K. L. D. Gunawardena, On the evaluation of multiple integrals, *Missouri J. Math. Sci., 6 (1994), 29-33.* http://www.math-cs.cmsu.edu/ mjms/mjms.html

Zoran D. Mitrović

Faculty of Electrical Engineering

University of Banja Luka

78000 Banja Luka, Patre 5

Bosnia and Herzegovina
E-mail address: zmitrovic@etfbl.net