O diferencijabilnosti kompozicije i inverza funkcija jedne promjenljive

Doc. Dr. Vladimir Jovanović
Prirodno – matematički fakultet Univerziteta u Banjaluci

Teoreme o diferencijabilnosti kompozicije i inverza za funkcije jedne promjenljive predstavljaju tzv. lokalne teoreme diferencijalnog računa i obrađuju se na početku izlaganja tog poglavlja matematičke analize. Iako se tu radi u suštini o jednostavnim tvrdnjama, dokazi koji se sreću u domaćoj udžbeničkoj literaturi često su nejasni, a ponekad i pogrešni. U ovom članku ćemo navesti precizne formulacije tih teorema i njihove korektne dokaze zasnovane na tri ekvivalentne formulacije pojma diferencijabilnosti.

Neka $D \subset \mathbb{R}$ proizvoljan neprazan skup, a $x_0 \in D$ njegova tačka nagomilavanja. Navedimo neke uobičajene ekvivalentne formulacije diferencijabilnosti funkcije $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ u tački x_0:

(1) Postoji $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

(2) Postoji funkcija $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna u x_0, takva da za sve $x \in D$ vrijedi $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\varphi(x)$. Pri tome je $\varphi(x_0) = f'(x_0)$.

(3) Postoji funkcija $r : D \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna u x_0, takva da $r(x_0) = 0$ i broj $l \in \mathbb{R}$ tako da za sve $x \in D$ vrijedi $f(x) = f(x_0) + l(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$. Pri tome je $l = f'(x_0)$.

Primijetimo da su formulacije (2) i (3) veoma bliske zbog relacije $\varphi = l + r$. Iz njih se odmah može zaključiti da diferencijabilnost povlači neprekidnost.

Teorema 1 *Neka je $f : D \longrightarrow E$ diferencijabilna u $x_0 \in D$, $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna u $y_0 = f(x_0)$, pri čemi je y_0 tačka nagomilavanja skupa $E \subset \mathbb{R}$. Tada je i $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna u x_0, te vrijedi*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0). \tag{4}$$

Dokaz 1.1 Pogledajmo jedan prirodan "dokaz" ove teoreme:

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \tfrac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \tfrac{g(f(x))-(g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ &= g'(f(x_0))f'(x_0).\end{aligned}$$

Ovim postupkom se zaista dobro objašnjava dobijanje identiteta (4), ali se on ne može prihvatiti kao dokaz, jer izraz $f(x) - f(x_0)$ može biti jednak nuli, ma kako x bilo blizu x_0, što je recimo slučaj kad je f konstantna funkcija. Međutim, ovaj "dokaz" može se lako popraviti na sljedeći način: definišimo pomoćnu funkciju $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ sa

$$h(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}, & y \neq y_0 \\ g'(y_0), & y = y_0. \end{cases}$$

h je neprekidna u y_0, pa je i $h \circ f$ neprekidna u y_0, odakle $\lim_{x\to x_0} h(f(x)) = g'(f(x_0))$. Kako je

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = h(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

za sve $x \in D \setminus \{x_0\}$, to uzimajući u posljednjoj jednakosti $\lim_{x\to x_0}$ dobijamo tvrdnju.

Dokaz 1.2 Sada ćemo teoremu dokazati koristeći formulaciju (2). Iz diferencijabilnosti funkcija f i g slijedi da postoje funkcija $\varphi : D \longrightarrow E$ neprekidna u x_0 i funkcija $\gamma : E \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna u y_0, tako da $\varphi(x_0) = f'(x_0)$, $\gamma(y_0) = g'(y_0)$ i $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\varphi(x)$ za sve $x \in D$, $g(y) = g(y_0) + (y - y_0)\gamma(y)$ za sve $y \in E$. Otuda, za sve $x \in D$ imamo

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x_0)) + (f(x) - f(x_0)) \cdot \gamma(f(x)) \\ &= (g \circ f)(x_0) + (x - x_0)\varphi(x) \cdot (\gamma \circ f)(x). \end{aligned}$$

Zbog neprekidnosti funkcije $(\gamma \circ f) \cdot \varphi$ u x_0 i relacije

$$(\gamma \circ f)(x_0)\varphi(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

slijedi tvrdnja teoreme.

Dokaz 1.3 Neka je $r_1 : D \to \mathbb{R}$ neprekidna u x_0, $r_1(x_0) = 0$ i $r_2 : E \to \mathbb{R}$ neprekidna u y_0, $r_2(y_0) = 0$, tako da

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_1(x)(x - x_0), \\ g(y) &= g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + r_2(y)(y - y_0), \end{aligned}$$

za sve $x \in D$ i $y \in E$. Otuda za sve $x \in D$ imamo

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(x_0)) + g'(y_0)[f(x) - f(x_0)] + r_2(f(x))[f(x) - f(x_0)] \\ &= g(f(x_0)) + g'(y_0)f'(x_0)(x - x_0) + g'(y_0)r_1(x)(x - x_0) \\ &+ r_2(f(x))f'(x_0)(x - x_0) + r_2(f(x))r_1(x)(x - x_0) \\ &= (g \circ f)(x_0) + g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) \\ &+ \big[\underbrace{g'(y_0)r_1(x) + f'(x_0)(r_2 \circ f)(x) + r_1(x)(r_2 \circ f)(x)}_{=h(x)}\big](x - x_0). \end{aligned}$$

Kako je funkcija h očito neprekidna u x_0 i $h(x_0) = 0$, to imamo tvrdnju. $\square$

Teorema 2 *Neka je funkcija $f : I \longrightarrow f(I)$ strogo monotona na intervalu I i diferencijabilna u $x_0 \in I$. Tada je inverzna funkcija $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ diferencijabilna u $y_0 = f(x_0)$ akko je $f'(x_0) \neq 0$. Pri tome je $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

Podsjetimo se da je inverz svake strogo monotone funkcije definisane na intervalu neprekidna funkcija. Neka je (x_n) proizvoljan niz u I takav da $x_n \to x_0$ i $x_n \neq x_0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Zbog neprekidnosti u x_0 i injektivnosti funkcije f je $y_n := f(x_n) \neq y_0$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $y_n \to y_0$, što znači da je y_0 tačka nagomilavanja skupa $f(I)$. Ako je f^{-1} diferencijabilna u y_0, tada iz $(f \circ f^{-1})(x) = x$ i Teoreme 1 slijedi $f'(x_0)(f^{-1})'(y_0) = 1$, odakle zaključujemo da mora biti $f'(x_0) \neq 0$. Sada pretpostavimo da $f'(x_0) \neq 0$. Dokažimo da je f^{-1} diferencijabilna u y_0.

Dokaz 2.1 Uobičajeni dokaz ove teoreme izgleda ovako: Za sve $y \in f(I)$, $y \neq y_0$ je $x := f^{-1}(y) \neq x_0 := f^{-1}(y_0)$, te kako je f^{-1} neprekidna, to na osnovu teoreme o smjeni kod limesa i

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

slijedi tvrdnja. Teoermu je moguće dokazati i korištenjem nizova , tako što posmatramo proizvoljan niz (y_n) u $f(I)\backslash\{y_0\}$, takav da $y_n \to y_0$, pa se dokaz izvodi uz sličnu argumentaciju izvodi dokaz teoreme.

Dokaz 2.2 Pogledajmo kako bi tekao dokaz uz korištenje formulacije (2). Zbog diferencijabilnosti funkcije f u x_0 postoji funkcija $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna u x_0, tako da $\varphi(x_0) = f'(x_0)$ i $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\varphi(x)$ za sve $x \in I$. Injektivnost funkcije f povlači da je $\varphi(x) \neq 0$ za $x \neq x_0$, te uzimajući još u obzir da $\varphi(x_0) = f'(x_0) \neq 0$, zaključujemo da je $\varphi(x) \neq 0$ za sve $x \in I$. Dakle, za $x \in I$ je

$$x = x_0 + \frac{1}{\varphi(x)}(f(x) - f(x_0)). \tag{5}$$

Kako iz $y = f(x)$ slijedi $x = f^{-1}(y)$, to iz (5), imamo da za svako $y \in f(I)$ vrijedi

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) + (y - y_0)\frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}.$$

Na kraju, zaključak slijedi iz neprekidnosti funkcije $\frac{1}{\varphi \circ f^{-1}}$ u tački y_0 i relacije $\left(\frac{1}{\varphi \circ f^{-1}}\right)(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Dokaz 2.3 Dokaz zasnovan na formulaciji (3) je, kao i u prethodnoj teoremi, zapravo jedna komplikovanija verzija dokaza zasnovanog na formulaciji (2), pa ćemo ga ovog puta izostaviti. $\square$

U nekim udžbenicima može se naići i na sljedeću verziju teoreme o diferencijabilnosti inverzne funkcije:

Teorema 2' *Neka je funkcija $f : D \to f(D)$ injektivna i diferencijabilna u $x_0 \in D$. Ako je $f^{-1} : f(D) \to D$ neprekidna u $y_0 = f(x_0)$, tada je ona u toj tački i diferencijabilna akko je $f'(x_0) \neq 0$. Pri tome je $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

Dokaz je sličan dokazu prethodne teoreme.

Zaključak

Prednost Dokaza 1.1 i 2.1 je u tome, što se oslanjaju na uobičajenu definiciju diferencijabilnosti (1). Ipak, ne treba smetnuti sa uma da taj pristup strogo ostaje u okvirima funkcija jedne promjenjlive. Dokazi 1.2 i 2.2, mada kraći od dokaza koji se oslanjaju na formulaciju (3), koriste ipak formulaciju (2), čija generalizacija na funkcije više promjenljivih, mada moguća, ipak nije uobičajena. Prednost formulacije (3) sastoji se ne samo u tome što predstavlja jednu vrstu pripreme za funkcije više promjenljivih, nego i u njenoj bliskosti sa Tejlorovim razvojem. Ipak, zbog dužine Dokaza 2.3 ne bi bilo svrsishodno koristiti ju u dokazu Teoreme 2.