MAT-KOL (Banja Luka)
XIII(1)(2007),

Elementaran pristup nekim ekstremalnim problemima

Sandra Kosić-Jeremić

Urbanističko-Građevinski fakultet Banja Luka

Ekstremne vrijednosti pojedinih funkcija mogu se odrediti i bez poznavanja njihovih izvoda. Za mladog matematičara srednjoškolca korisnije je da pomenute probleme rješava elementarnim metodama, jer mu one proširuju pogled na matematičku metodologiju, razvijaju logičko mišljenje i obogaćuju matematičku kulturu.

Veliki broj ekstremalnih problema može se prikladnim dosjetkama riješiti i elementarnim putem.

Ovdje ćemo navesti i dokazati rješenje važnog takozvanog **opšteg zadatka sa ekstremima**, te pokazati njegovu primjenu u elementarnom rješavanju zadataka sa maksimumom i minimumom. Tzv. opšti zadatak sa ekstremima i njegovo rješenje ćemo iskazati u obliku teoreme.

Ova teorema je jako korisna, jer se učenik srednje škole tek u četvrtom razredu susreće sa pojmom izvoda i metodama diferencijalnog računa.

U dokazu ćemo koristiti poznatu ***nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine n brojeva sa težinama***:

$$\textbf{(*)}\quad t_1^{p_1}\cdot t_2^{p_2}\cdot\ldots\cdot t_n^{p_n}\le\left(\frac{p_1t_1+p_2t_2+\ldots+p_nt_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}\right)^{p_1+p_2+\ldots+p_n}$$

Teorema 1: (a) Ako je $a_1x_1 + a_2x_2 +\ldots+ a_nx_n = S = \text{const.}$, *tada je najveća moguća vrijednost izraza*

$$x_1^{p_1}\quad x_2^{p_2}\quad\ldots\quad x_n^{p_n}=P\quad\left(x_k>0, p_k>0, k=1,2,\ldots,n\right)$$

postignuta za one vrijednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *za koje je*

$$\frac{a_1x_1}{p_1}=\frac{a_2x_2}{p_2}=\ldots=\frac{a_nx_n}{p_n}$$

(b) *Ako je* P *konstantno, tada* S *dostiže svoju najmanju vrijednost za*

$$\frac{a_1 x_1}{p_1} = \frac{a_2 x_2}{p_2} = \ldots = \frac{a_n x_n}{p_n}.$$

Dokaz: Na osnovu nejednakosti (∗) zaista dobijamo :

$$P = \left(\frac{p_1}{a_1}\right)^{p1} \left(\frac{p_2}{a_2}\right)^{p2} \cdots \left(\frac{p_n}{a_n}\right)^{p_n} \left(\left(\frac{a_1 x_1}{p_1}\right)^{p1} \cdot \left(\frac{a_2 x_2}{p_2}\right)^{p2} \cdots \left(\frac{a_n x_n}{p_n}\right)^{p_n} \right)$$

$$\leq \left(\frac{p_1}{a_1}\right)^{p1} \cdot \left(\frac{p_2}{a_2}\right)^{p2} \cdots \left(\frac{p_n}{a_n}\right)^{p_n} \left(\frac{p_1 \frac{a_1 x_1}{p_1} + p_2 \frac{a_2 x_2}{p_2} + \ldots + p_n \frac{a_n x_n}{p_n}}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} \right)^{p1+p2+\ldots+p_n}$$

$$= \left(\frac{p_1}{a_1}\right)^{p1} \cdot \left(\frac{p_2}{a_2}\right)^{p2} \cdots \left(\frac{p_n}{a_n}\right)^{p_n} \left(\frac{S}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} \right)^{p1+p2+\ldots+p_n} = K$$

Dakle, P je uvijek manje ili jednako od konstante K, a u slučaju kada je $\frac{a_1 x_1}{p_1} = \frac{a_2 x_2}{p_2} = \ldots = \frac{a_n x_n}{p_n}$, P je jednako konstanti K. To znači da u ovom posljednjem slučaju P ima najveću vrijednost.

Zaista, ako je $\frac{a_1 x_1}{p_1} = \frac{a_2 x_2}{p_2} = \ldots = \frac{a_n x_n}{p_n} = t \quad (t \in R)$, odavde imamo da vrijedi: $a_1 \cdot x_1 = p_1 \cdot t;\ \ a_2 \cdot x_2 = p_2 \cdot t; \ldots a_n \cdot x_n = p_n \cdot t$ ....(1) , pa je u tom slučaju $S = t \cdot (p_1 + p_2 + \ldots + p_n)$. Takođe, iz (1) je $\frac{p_1}{a_1} = \frac{x_1}{t};\ \ \frac{p_2}{a_2} = \frac{x_2}{t};\ \ \ldots \frac{p_n}{x_n} = \frac{x_n}{t}$, pa će iz posljednje nejednačine vrijediti sljedeće:

$$P \leq \left(\frac{p_1}{a_1}\right)^{p1} \cdot \left(\frac{p_2}{a_2}\right)^{p2} \cdots \left(\frac{p_n}{a_n}\right)^{p_n} \left(\frac{S}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} \right)^{p1+p2+\ldots+p_n} =$$

$$= \left(\frac{x_1}{t}\right)^{p1} \cdot \left(\frac{x_2}{t}\right)^{p2} \cdots \left(\frac{x_n}{t}\right)^{p_n} \cdot t^{p1+p2+\ldots+p_n} = \frac{x_1^{p1} \cdot x_2^{p2} \cdots x_n^{p_n}}{t^{p1+p2+\ldots+p_n}} \cdot t^{p1+p2+\ldots+p_n} =$$

$$= x_1^{p1} \cdot x_2^{p2} \cdots x_n^{p_n} = K$$

tj. vrijedi jednakost, odakle zaključujemo da, zaista, za $\frac{a_1 x_1}{p_1} = \frac{a_2 x_2}{p_2} = \ldots = \frac{a_n x_n}{p_n}$, P dostiže svoju najveću vrijednost.

(b) Dokaz je sličan dokazu pod (a):

$$S = \frac{a_1x_1}{p_1} \cdot p_1 + \frac{a_2x_2}{p_2} \cdot p_2 + ... + \frac{a_nx_n}{p_n} \cdot p_n$$

$$\overset{(*)}{\geq} (p_1 + p_2 + ... + p_n) \cdot \sqrt[p_1+p_2+...+p_n]{\left(\frac{a_1x_1}{p_1}\right)^{p_1} \cdot \left(\frac{a_2x_2}{p_2}\right)^{p_2} \cdots \left(\frac{a_nx_n}{p_n}\right)^{p_n}} =$$

$$= (p_1 + p_2 + ... + p_n) \cdot \sqrt[p_1+p_2+...+p_n]{\left(\frac{a_1}{p_1}\right)^{p_1} \cdot \left(\frac{a_2}{p_2}\right)^{p_2} \cdots \left(\frac{a_n}{p_n}\right)^{p_n} \cdot P} = \mathrm{L}$$

Dakle, S je uvijek veće ili jednako od konstante L, a u slučaju kada je $\frac{a_1x_1}{p_1} = \frac{a_2x_2}{p_2} = ... = \frac{a_nx_n}{p_n}$ S je jednako konstanti L. To znači da u ovom posljednjem slučaju S ima najmanju vrijednost. ♦

Slična tvrđenja važe i u slučaju kada umjesto proizvoda P stoji zbir recipročnih vrijednosti 1 / x_k ili kvadrata x_k^2 sa koeficijentima.

Pomoću Teoreme 1 ćemo rješavati sljedeće zadatke.

Primjer 1: Od svih trouglova datog obima odrediti onaj koji ima najveću površinu.

Rješenje: Površina trougla čije su dužine stranica a,b,c iznosi

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

gdje je $a + b + c = 2s$ (s-poluobim trougla). P ima najveću vrijednost kada i $P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$. Kako je zbir činilaca $s - a + s - b + s - c = s$ stalan, površina je najveća kada su svi činioci jednaki (Teorema 1-opšti zadatak sa ekstremima) tj. kada je $s - a = s - b = s - c$ tj. $a = b = c$.

Dakle, od svih trouglova datog obima najveću površinu ima jednakostraničan trougao. ♦

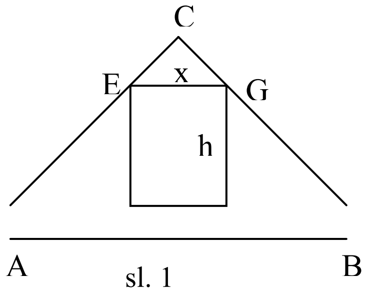
Primjer 2: U loptu poluprečnika R upisati kvadar najveće zapremine.

Rješenje: Neka su dimenzije kvadra x, y, z, tada je (2) $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$ i zapremina kvadra $V = xyz$. V dostiže maksimum kada i $V^2 = x^2y^2z^2$, pa prema

Teoremi 1 V će biti najveće za $x^2 = y^2 = z^2$ odnosno za $x = y = z$ (jer je zbir $x^2 + y^2 + z^2$ konstantan), pa iz (2) imamo $3x^2 = 4R^2 \Rightarrow x^2 = \frac{4R^2}{3}$ odnosno, $x = y = z = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Dakle, traženi kvadar je kocka ivice $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ čija je zapremina $V = \frac{8}{9} R^3 \sqrt{3}$. ♦

Primjer 3: Od svih valjaka upisanih u datu kupu naći onaj čiji omotač ima najveću površinu.
Rješenje: Posmatraćemo osni presjek kupe (sl.1.)



sl. 1

Trouglovi ABC i CEG su slični, pa vrijedi proporcija:

H : (H-h)=a : x

odakle je

H · x=a · (H-h).........(3)

gdje je H visina trougla ABC iz tjemena C, a h je visina upisanog valjka, a = AB je prečnik osnove kupe, x je prečnik osnove valjka.

Iz jednačine (3) možemo izraziti visinu valjka:

$$h = \frac{H \cdot (a - x)}{a} \quad ....(4)$$

Površina omotača valjka je $M = x \cdot \pi \cdot h$, pa, kada u M iz (4) uvrstimo h, dobićemo

$$M = \frac{\pi H \cdot (-x^2 + ax)}{a} \quad ....(5)$$

Kvadratna funkcija u brojniku postiže svoju najveću vrijednost u tjemenu tj. za x $= -\frac{b}{2a}$, odakle je $x = \frac{a}{2}$. U tom slučaju je $h = \frac{H}{2}$.

<u>**II način**</u> Površinu omotača iz (5) možemo i ovako napisati: $M = \frac{\pi H}{a} \cdot x \cdot (a - x)$.

Pošto je $\frac{\pi H}{a}$ konstanta, a zbir $x + (a - x) = a$, je takođe konstanta, iz Teoreme 1 zaključujemo da će proizvod $x \cdot (a - x)$ biti maksimalan za $x = a - x$, odakle dobijamo $x = \frac{a}{2}$.

Dakle, najveću površinu omotača imaće onaj valjak čiji je poluprečnik osnove jednak polovini poluprečnika osnove kupe, a visina valjka jednaka polovini visine kupe. ♦

Primjer 4: Od svih kutija bez poklopca oblika pravouglog paralelopipeda i date površine, naći dimenzije kutije maksimalne zapremine.

Rješenje: Označimo stranice kutije tj. pravouglog paralelopipeda sa x,y,z. Površina S je poznata i vrijedi S = xy+2xz+2yz. Iz Košijeve nejednakosti (nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine) slijedi:

$$\left(\frac{S}{3}\right)^3 = \left(\frac{xy+2xz+2zy}{3}\right)^3 \geq 4x^2y^2z^2$$

Zapremina kutije je $V = x \cdot y \cdot z$ tj. $V^2 = x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{S}{3}\right)^3$ odakle je

$$V \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{S}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Dakle, maksimalna zapremina se postiže za $xy = 2xz = 2zy$ (Teorema 1), jer je zbir S = xy+2xz+2yz konstantan, pa je x = y, y = 2z. Sada je

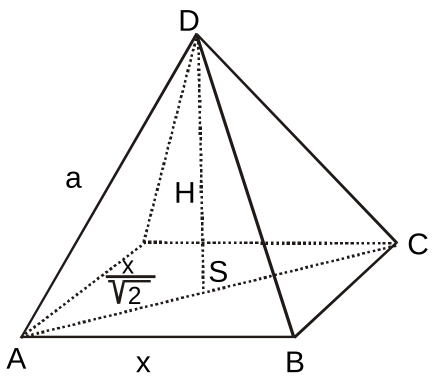
$$S = x^2 + 2x \cdot \frac{x}{2} + x^2 = 3x^2,$$

a odavde slijedi : $x = y = \sqrt{\frac{S}{3}}$; $z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{3}}$. ♦

Primjer 5: Koja od pravilnih četvorostranih piramida sa istom bočnom ivicom a ima najveću zapreminu?

Rješenje: Označimo sa x ivicu na osnovi.

Tada je $a^2 = H^2 + x^2/2$ (iz pravouglog $\triangle$ASD) konstantna. Zapremina piramide je V = B•H / 3, je najveća kada je



$$3V = x^2 \cdot H = x^2 \cdot \left(H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

odnosno

pa je tada

$$a^2 = 3H^2 \Rightarrow H = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot x^2}{1} = \frac{1\cdot H^2}{\frac{1}{2}} \quad \text{tj.} \quad \frac{x^2}{2} = 2H^2$$

Kada H uvrstimo u (6) dobićemo da je $x = \frac{2}{\sqrt{3}}a$

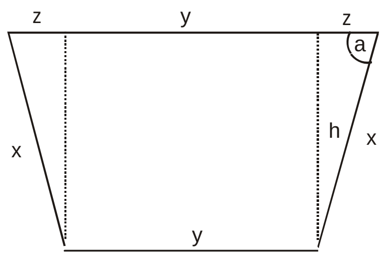
Dakle, zapremina pravilne četvorostrane piramide je najveća za $x = \frac{2}{\sqrt{3}}a$ i iznosi $V = \frac{4a^3}{27}\sqrt{3}$. ♦

Primjer 6: Iz pravougaone metalne ploče treba izraditi korito sa presjekom oblika jednakokrakog trapeza, tako da površina presjeka bude maksimalna.

Rješenje:

Ako je du`ina kraka trapeza x, a du`ina kra}e osnovice y, tada je

y + 2x = a = const.



sl.3

Površina presjeka je

$$\text{P} = \frac{(y+2z)+y}{2}\cdot h = (y+z)\cdot\sqrt{x^2-z^2} =$$

$$= (y+z)\cdot(x+z)^{\frac{1}{2}}\cdot(x-z)^{\frac{1}{2}}$$

Za faktore na desnoj strani važi:

2(y+z) + (x+z) + 3(x-z) = 4x + 2y =2a = const.

Dakle, P je najveće za:

$$\frac{2\cdot(y+z)}{1}=\frac{x+z}{\frac{1}{2}}=\frac{3\cdot(x-z)}{\frac{1}{2}} \text{ odakle je } \mathrm{x}=\mathrm{y}, \mathrm{z}=\frac{\mathrm{x}}{2}$$

pa je $\cos\alpha=\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{x}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60^{o}$

Trapez dobijen na ovaj način je, prema tome, "donja polovina" pravilnog šestougla.

♦

Sada ćemo, na nekoliko primjera, pokazati primjenu tzv.opšteg zadatka sa ekstremima tj. teoreme 1 na trigonometrijske funkcije:

Primjer 7: Odrediti maksimum funkcije:

$$y=1+\sin^2 x-\sin^4 x \qquad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

Rješenje: Kako je $\sin^2 x-\sin^4 x=\sin^2 x\cdot(1-\sin^2 x)$ (7) i kako je zbir $\sin^2 x+1-\sin^2 x=1$ konstantan, vidimo da izraz na desnoj strani jednačine (7) postiže maksimalnu vrijednost za $\sin^2 x=1-\sin^2 x$ tj. za $\sin^2 x=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ $x=45^0$. Zaključujemo da data funkcija postiže maksimalnu vrijednost za $x=45^0$ i ta vrijednost iznosi: $y_{\max}=\frac{5}{4}$. ♦

Primjer 8: Odrediti maksimum funkcije

$$y=\sin^p x\cdot\cos^q x \qquad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right) \quad (p>0\ ,\ q>0)$$

Rješenje: Napišimo datu funkciju ovako $y=(\sin^2 x)^{\frac{p}{2}}\cdot(\cos^2 x)^{\frac{q}{2}}$.

Prema Teoremu.1 funkcija y postiže maksimalnu vrijednost za $\dfrac{\sin^2 x}{\frac{p}{2}}=\dfrac{\cos^2 x}{\frac{q}{2}}$

(jer je $\sin^2 x+\cos^2 x=1$) tj. za

$\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{p}{q} \Rightarrow \sin^2 x = \dfrac{p}{q} \cdot \cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x = \dfrac{p}{q}(1 - \sin^2 x)$, pa nakon sređivanja

dobijamo kona~no da je $\sin x = \sqrt{\dfrac{p}{p+q}}$; $\cos x = \sqrt{\dfrac{q}{p+q}}$

$$y_{\max} = \left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{p}{2}} \cdot \left(\frac{q}{p+q}\right)^{\frac{q}{2}} = \sqrt{\left(\frac{p}{p+q}\right)^{p} \cdot \left(\frac{q}{p+q}\right)^{q}} .$$ ♦

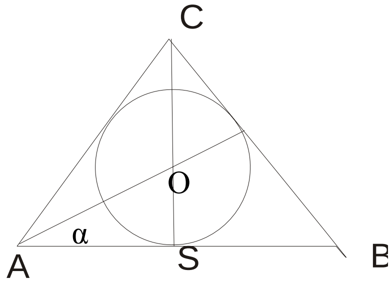
Primjer 9: Odrediti ekstremne vrijednosti funkcije :

$$y = tgx + ctgx \qquad (0 < x < 2\pi)$$

Rješenje: Data funkcija je definisana za $x \neq \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}$. Kako je $tgx \cdot ctgx = 1$, data funkcija poprima minimum za $tgx = ctgx$ odnosno za $tg^2 x = 1$. (Teorema1 (b)). Odavde zaključujemo da za $tgx = 1$ tj. za $x = \dfrac{\pi}{4}$ funkcija poprima maksimum 2, a za $tgx = -1$ tj. za $x = \dfrac{3\pi}{4}$ funkcija poprima minimum –2. ♦

Primjer 10: Oko lopte poluprečnika R opisati pravu kru`nu kupu najmanje zapremine.

Rješenje: Prema oznakama na slici , gdje je $|AB| = 2r$, $|CS| = h$, 2α su uglovi na osnovici, a tačka O (centar sfere) se nalazi na simetrali unutrašnjeg ugla kod tjemena A. Iz ΔASO nalazimo da je $ctg\alpha = \dfrac{r}{R} \Rightarrow r = R \cdot ctg\alpha$. Iz ΔASC je $tg2\alpha = \dfrac{h}{r} \Rightarrow h = r \cdot tg2\alpha$



iz posljednje jednakosti , nakon sređivanja, dobijamo $h = \dfrac{2R}{1 - tg^2\alpha}$, pa je zapremina kupe $V=\frac{2}{3}\cdot\frac{R^3\pi}{tg^2\alpha\cdot\left(1-tg^2\alpha\right)}$. Funkcija V dostiže najmanju vrijednost onda kada $tg^2\alpha\left(1-tg^2\alpha\right)$ ima najve}u vrijednost. Kako je $tg^2\alpha>0$, $1-tg^2\alpha>0$ za $0<\alpha<\pi/4$ i $tg^2\alpha+1-tg^2\alpha=1$, to prema Teoremi 1, izraz $tg^2\alpha\left(1-tg^2\alpha\right)$ dostiže najveću vrijednost ako je $tg^2\alpha=1-tg^2\alpha$, odakle je $tg^2\alpha=\frac{1}{2}$, odnosno $tg\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Odavde slijedi da je $r=R\sqrt{2}$ i $h=4R$. ♦

Literatura:

[1] V.Devide: *Zbirka elementarnih, ali težih matematičkih zadataka,* Matematička biblioteka 44, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva Srbije, Beograd

[2] I.Fenyö: *Elementarna rešenja nekih ekstremnih problema* , Uvođenje mladih u naučni rad VI, Matematička biblioteka 41, Zavod za izdavanje udžbenika Socijalističke Republike Srbije, Beograd, 1969.

[3] J.Aczel: *Nejednakosti i njihova primena u elementarnom rešavanju zadataka sa maksimumom i minimumom*, Uvođenje mladih u naučni rad I, Matematčka biblioteka 18, Zavod za izdavanje udžbenika Narodne Republike Srbije, Beograd, 1961.

[4] S.Škreblin: *Elementarno određivanje maksimuma i minimuma funkcija*; Nastava matematike i fizike VI 2, Savez društava matematičara i fizičara Jugoslavije, Beograd, 1957.

[5] S. Škreblin: *Elementarno određivanje maksimuma i minimuma funkcija*; U: B.Đerasimović: *O elementarnim metodama određivanja ekstremnih vrijednosti funkcija*, Nastava matematike i fizike VI 3-4, Savez društava matematičara i fiziara Jugoslavije, Beograd, 1957.

[6] Олег Мушкаров, Лъчезар Сторнов: ЕКСТРЕМАЛНИ ЗАДАЧИ В ГЕОМЕТРИЯТА, Държавно издателство "Народна просвета", София, 1989.

[7] Mr Miomir Anđić: *Rješavanje ekstremalnih zadataka elementarnim putem, I,* Nastava matematike, 1-2 (XLVII), Beograd, 2002.