Matematički kolokvijum (Banja Luka)
XIII (1)(2007), 13- 25

DA LI POSTOJE PERSPEKTIVE ZA NOVA ISTRAŽIVANJA STARIH PROBLEMA FILOZOFIJE MATEMATIKE?

Daniel A. Romano

Prirodno-matematički fakultet
Banja Luka, Mladena Stojanovića 2.
E-mail: bato49@hotmail.com

Prema Rogeru Bishopu Jonesu [14], osnovni filozofski problemi matematike su: (1) Problemi značenja; (2) Ontološki problemi; (3) Epistemiološki problemi, (4) Problemi primjenljivosti; (5) Problemi zasnivanja matematike; i (6) Izračunljivost, u slijedećem smislu:

Matematičari koriste specijalne jezike za razgovor o stvarima koji se razlikuju od uobičajenih kojim se koristi većina stanovništva Svijeta. Da li to nešto znači?

Šta su te stvari o kojima matematičarti govore? Da li one stvarno postoje? Kako to možemo saznati? Šta je to u stvari?

Matematičari često ističu paradigmu preciznosti i sigurnosti, ali neki od njih sugerišu da je to iluzija. Kako možemo znati da li su matematičke tvrdnje istinite?

Kako možemo znanje o apstraktnoj matematici primjenjivati u realnom svijetu?

Matematika je visoko struktuirana logička nauka, ali ako dovoljno duboko kopamo naićićemo na pjesak. Pravljenje najboljih osnova za matematiku ima temelje u filozofiju.

Kakve su implikacije u matematici informatičke revolucije? Kako se matematika odnosi prema tome?

Uloga matematike u savremenoj nauci u stalnom je porastu, u smislu da bez matematičkih objašnjenja teško da bi bilo moguće dublje shvatanje velikog broja pojava. S druge strane, razvoj fizike, lingvistike, tehničkih i tehnoloških i nekih drugih nauka podrazumjeva korištenje raznih matematičkih alata. Postoji i druga strana ovog pitanja. Matematika je egzaktna opšteobrazovna nauka, čija je filozofska analiza veoma složena. Iako su posebnosti matematičkog znanja stalno pod pažnjom vodećih filozofa i matematičara tokom svih vremena razvoja matematike, mnogi metodološki problemi matematike ostali su nedovoljno razjašnjeni, što u znatnoj mjeri koči razvoj kako „čiste“ tako isto i primjenjene matematike, kao i drugih nauka koje se oslanjaju na matematiku, ali i same filozofije.

Filozofija u sferi matematike trebalo bi da omogućava adekvatno poimanje matematičkog znanja, rješavanje prirodnih pitanja o predmetu i metodama matematike. Realno filozofsko shvatanje matematike trebalo bi da omogućava da se matematika ne predstavi samo kao suma dedukcija, suma definicija, dobivenih na osnovu analize njenih različitih stanja uz primjenu prihvatljivih pravila izvođenja. Pravilno shvatanje matematike ne može biti dobijeno razmišljanjem o tome ili jednostavnim upoređuvanjem slučajeva, do kojih se dolazi poznatim intuitivnim predstavljanjem uz koristenje nekih postupaka objedinjavanja.

Matematičari su u više navrata pokušavali da iskažu svoja shvatanja o ovoj nauci uz prisustvo različitih prinudnih faktora koji su ih, u suštini, ometali u objektivnom sagledavanju (pogledati, na primjer, članke Jarosława Mrozeka „*The Problems of Understanding Mathematics*“ i Elaine Landry „*Semantic Realism: Why Mathematicians Mean What They Say*“). Drugim riječima, savremeno sagledavanje shvatanja matematike ne može biti formirano kao prost zbir postojećih intuitivnih predstava o toj nauci, niti može biti uzeto naposredno iz poznavanja većeg broja matematičkih teorija, tj. na osnovu zdravorazumskog shvatanja smisla matematike.

> U poznatoj knjizi „Filozofija matematike“ [2], Stefan Berker je napisao: „Poslednjih decenija filozofi su često pisali o matematici, a u nekim njihovim popularnim izlaganjima duboko su se uvrežila pogrešna uprošćavanja. Na primjer, često se tvrdilo da matematičke teoreme zato što su deduktivne moraju biti analizičke; često se tvrdilo da aksiome jednog formalnog sistema definišu njegove osnovne pojmove; često se tvrdilo da razvoj neeuklidske geometrije prostora pokazuje kako je Kantova filozofija prostora bila pogrešna; najzad, često se tvrdilo kako se matematička istina i matematičko postojanje svode samo na izvodljivost iz aksioma. Sve ove tvrdnje su pogrešna uprošćavanja...“
>
> Prema mišljenju Z. Šikića [12], filozofija matematike je problematizovanje matematike, dovođenje matematike u pitanje. Filozofija matematike je kritičko razmatranje matematike: problematizacija matematike je problematizacija matematičkog saznanja.
>
> Prema mišljenju O.S.Seline, iskazanom u referatu “Философские проблемы математики” saopštenog na St’Peterbuskoj katedri filozofija 1998. godine, slično kao što je osnovno pitanje filozofije odnos saznanja prema materiji, tako je pitanje filozofije matematike odnos pojmova matematike prema objektivnoj realnosti, tj. pitanje o realnom sadržaju matematičkog znanja.

1. Uvod

Filozofija matematike kao odvojena grana filozofije, pojavila se prije nešto više od sto godina. Istraživanja u oblasti osnova matematike i matematičke logike, koja su započeta krajem XIX i početlom XX vijeka, bila su u tijesnoj vezi sa grandioznim filozofskim programima: sa *logicizmom*, *intuicizmom* i *formalizmom*. Na početku se činilo da je ta veza potrebna, ali tokom vremena raslo je razočarenje u te programe, a tokom 60-tih godina, čini se, u nastojanjima matematičara i logičara počela se osječati zasićenost. U vezi sa prethodnim, interesantna je napomena Mostovskog, izložena u njegovom radu [18] - „Thirty years of foundational studies“: „Filozofski ciljevi tih triju škola nisu dostignuti, i, po svemu sudeći, nismo bliže ka potpunijem shvatanju matematike nego što su to bili osnivači tih škola“. Čak šta više, kako mnogi matematičati smatraju, ti programi nemaju realnih veza sa osnovama matematike i matematičke logike. Problemi koji su se u tim školama formirali, čini se, interesantni su samo filozofima i osnivačima tih škola. S druge strane, Mostovski je takođe primjetio u vezi sa prethodnim: „Ne treba odricati da su aktivnosti tih škola doprinjele ogromnom broju važnih rezultata i otkrića, koji su produbili naše znanje matematike i njen odnos prema logici. Često se dešavalo da su bočni rezultati važniji od polaznih namjera tih škola. “ Drugim riječima, pokazalo se da je filozofija matematike u dubokoj krizi, počevši sa 50-60-tim godinama prethodnog stoljeća, kada su bili iscrpljeni resursi tradicionalnih pristupa shvatanju matematike. Iako se prenošenju problema ovih oblasti filozofskih istraživanja sa tradicionalnih shvatanja na ta tri velika pokreta snažno opiralo, ostala je velika skepsa prema mogućnostima klasične filozofije matematike. Više od toga, po mišljenju većeg broja autoritarnih istraživača, filozofija matematika, kao disciplina je preživjela, budući da su stari problemi zamjenjeni novim.

Cilj ovog rada je analiza složene situacije u filozofiji matematike, i jedan pogled na perspektivu daljeg razvoja filozofije matematike u svjetlu ovih novih-starih problema.

2.

Tradicionalni način opisivanja problema filozofije matematike jeste opisivanje osnova matematike i njene filozofije koje se javlja kao prirodan završetak u pokušavanju prevladavanja krize u osnovama matematike. To je uglavnom hrestomativni materijal dobro poznat čitaocu (pogledati, na primjer, knjige [2],[3],[6],[12],[23]), kao i knjige koje ne govore o ogromnom broju tehničkih detalja kakve su na primjer knjige, “Uvod u filozofiju matematike” G.Lehmana (H.Lehman “Introduction to the philosophy of mathematics”) ili knjiga „Filozofija matematike“ S. Kornera (Korner S. “The philosophy of mathematics”). Postoji mnogo i drugih knjiga u kojima se izlaže materijal povezan sa dostignućima u matematićkoj logici i u osnovama matematike, i u svim tim knjigama figurišu jedna te ista imena i jedni te isti problemi: Fregeov i Raselov logicizam, Brauerov i Hejtingov intuicionizam, Hilbertov i von Nojmanov formalizam. Jedan znatan broj autora saglasan je sa mišljenjem A.Mostovskog, pomenutim u uvodu. Zato je u većini knjiga značajan dio posvećen, s jedne strane, izlaganju pogleda tih škola[1], a s

[1] H.Putnam daje kratki pregled starijih i novijih pogleda na filozofiju matematike:
- *logicizam* (matematika je dio logike);

druge strane – interesantnim "bočnim" rezultatima. Tako se formira iluizija da je filozofija matematike aktivan dio filozofije, iako je nedavno H. Putnam rekao da "… tri velike škole više ništa ne rade" [19]. U svijetlu prethodnog, kao potvrdu rečenog, trebalo bi pogledati članak Davida S. Rossa: "Foundations Study Guide: Philosophy of Mathematics" ili skriptu Carla Posya sa Duke University "Philosophy of Mathematics".

Odsustvo progresa često je objašnjavano time da problemi, koji su prethodno bili čisto filozofski, prestaju biti takvi - prešavši u klasu tehničkih problema – matematičkih ili logičkih. Može biti da istraživanja u oblasti filozofije matematike, tačnije, u oblasti osnova matematike, stvarno moraju biti više istraživana tehničkim sredstvima, pri čemu je samo pojavljivanje tradicionalnih klasičnih pravaca bilo povezano sa onim što su „očevi – osnivači" namjeravali da povežu - matematičke i filozofske probleme, kao na primjer, kako je uradio Rasel, povezavši pokušaje spasavanja logicizma od paradoksa u njemu.

Drugi, ne manje značajan razlog pojavljivanja stagnacije u filozofiji matematike - jeste ogromno uvažavanje autoriteta, koji su se suprostavljali normalnom procesu kritičkih razmatranja problema. Kao jedan takav tipičan primjer, može se navesti krajnji Gedelov platonizam po kojem je, ne gledajući na neplodnost platonizma, konstantno težio obnavljanju ili rehabilitaciju tvrdnji i pojmova iako su za interpretaciju i shvatanje veoma složeni. Riječ je o poznatim Gedelovim tvrdnjama o tome kako je matematičko postojanje dostupno intuiciji - kao što su fizički objekti dostupni fizičkom iskustvu. Tek se u poslednje vrijeme obnovio skeptičan odnos prema pokušajima da se da egzatniji smisao kao na primjer odgovarajućom tezama W.V. Quinea : da je logika drugog reda, u stvari, sakrivena teorija skupova.

Prevladavanje stagnacija u filozofiji matematike, u poslednjih dvadesetak

---

- *logički pozitivizam* (matematičke istine su istine blagodareći pravilima jezika);
- *formalizam* (teorija skupova i nekonstruktivna matematika su prosto "ideje" i, zato, sami po sebi besmisleni);
- *platonizam* (saglasno Gedelu, realno postoje matematički objekti a čovjekov um ima sposobnost da ih spozna);
- *holizam* (Quine je pretpostavljao da matematiku treba da posmatramo ne kao posebnu nauku već kao dio svih nauka i odvojenu posebnost);
- *kvaziempirijski realizam* (ideja da u "čistoj" matematici postoji nešto podložno ispitivanju analogno empirijskom ispitivanju);
- *modalizam* (klasična matematike se može preformulisati na takav način da umjesto razgovora o skupovima, brojevima i drugim matematičkim objektima utvrđujemo mogućnost ili nemogućnost postojanja određenih sturktura);
- *intuicionizam* (program prihvatanja matematičkih tvrdnji proizvod je ljudske intuicije a egzistencija matematičkih objekata obezbijeđena je misaonim konstrukcijama, i, pri tome, odustaje se od dvovalentne logike).
- *nominalizam* (H.Fieldov program);
- *strukturalizam* (S.Shapito, M.Resnik);
- *naturalizam* (program P.Meddy); i
- *predikativni konstruktivizam* (S. Feferman).

godina prošlog stoljeća, postignuto je u vezi sa opštefilozofskim tendecijama. Glavna okolnost u vezi sa tim leži u činjenici da je filozofija matematike, u svojoj biti, dio filozofije, i u njoj se odražavaju gotovo sve tendencije koje su svojstvene čitavoj filozofiji. Filozofija koja se odnosi na grane matematike je takva disciplina u kojoj su jasno sublimirane teorije o prirodi jezika, teorije dokaza i teorije o istini. Zapravo, ta promišljanja čine da su istraživanja u filozofiji matematike važne forme filozofskih istraživanja. U sadašnje vrijeme, postalo je očigledno da se tradicionalna filozofija matematike sudara sa dilemama prouzrokovanim savremenim teorijama saznanja, i, prema tome, pojavljuje se epistemiolški otklon u filozofiji matematike.

Moguće su dvije pretpostavke u vezi sa time šta se dešavalo u filozofiji matematike u poslednje vrijeme. Jedna je povezana sa pokušajima novih istraživanja u tradicionalnim pravcima – logicizmom, formalizmom i intuicionizmom, što predstavlja nove napore - kao reakciju prema tradicionalnom. Druga je povezana sa neposrednim epistemiološkim tendencijama, koje su se pojavile kao odraz postojanja dvaju dilema koje su izložene u Benacerrafovim radovima ([4], [5]): “What numbers could not be“ i „Mathematical truth”. Poreći ontologiju brojeva, smatra Benacerraf, znači pristati uz, najblaže rečeno, neprirodnu semantiku matematskog govora. Pristati pak uz ontologiju brojeva znači prizivati nerješive epistemološke poteškoće pitanja kako spoznajemo matematičke istine.

Poslednja četvrtina prethodnog stoljeća protekla je u pokušajima da se usaglase nastojanja na sastavljanju odgovora na teorijsko-spoznajnu dilemu, postavljenu u radu Pola Benacerrafa, „Matematička istina“. Dilema se može formulisati i na slijedeći način: Ako matematika jeste istraživanje objekata idejne bitnosti i ako kognitivne sposobnosti čovjeka omogućavaju saznanja samo iskustvenih objekata, kako on može saznavati matematičke objekte?

Poziv ka saznanju iskustvenih objekata podrazumijeva savršeno determinisanu koncepciju saznanja – takozvanu kauzalnu teoriju saznanja. Može se kazati da to nije jedinstvena teorija, i da tako dileme gube smisao. Međutim, može se preformulisati dilema na takav način da se ne naslanja na specifičnu teoriju saznanja. Dilema stavlja pred nas izbor: ili odricati da matematika govori o brojevima, ili pretpostavljati da čovjek posjeduje neke neiskustvene sposobnosti u sagledavanju informacija. Budući da obje mogućnosti ne izgledaju privlačno, poduzimali su se različiti pokušaji razješenja dileme. Mnogi istraživači su saglasni u tome da se, pri rješavanju glavnih epistemioloških problema, prelazi na rješavanje i glavnih ontoloških problema o egzistenciji matematičke stvarnosti, i da ih rješavati treba bez žrtvovanja standardne matematike - kao što se to radi u tradicionalnom nominalističkom pristupu.

Mnogi autori analizirali su metodološka i filozofska pitanja matematike. Ta, i mnoga druga, pitanja tradicionalno se odnose na sferu svjetonazora: još je V.I.Vernadskij, u knizi: „Философия и мировоззрение“ Mir, Moskva 1990, primjetio da je naučni metod osnovno oruđe naučnog svjetonazora; filozofija je naučna sistematizacija svjetonazora. Nešto više: metodologija i filozofija matematike čine fundament svjetonazorskih konstrukcija, koje imaju neposredan upliv na matematičko stvaralaštvo, tehnologije predavanja matematike i iskorištavanje matematičkih metoda u primjenama. Zapravo, zato te dvije grupe svjetonazorskih pitanja matematike su bile pod pažnjom folozofa. U daljem ću dati pregled drugih problema koji se odnose na realizaciju svjetonazirskih ideja matematike. Tim pitanjima su posvećene i knjige „Научное мировоззрение - основа духовного развития школьников", Saratov, 1994. (autora V.M. Medvjedeva i Ju.F. Fominiha) i „Математика и научная картина мира". Kijev, 1984. (autora G.M. Kleinera i L.M.Kleinera). Na prvom mjestu, trebalo bi nagovijestiti šta se podrazumjeva pod svjetonazorom i kakav odnos prema tome ima matematika. Prema mišljenju Fominiha, svjetonazor je sveukupnost individualnih predstava o svijetu i mjestu u tom svijetu posredstvom kojih čovjek pokušava determinisati svoje ponašanje, postupke, prema čemu fokusira svoje interese i aktivnosti.

3. Filozofija i matematika

Postoji više knjiga koje sveobuhvatno tretiraju odnos filozofije i matematike. Navedimo, kao ilustraciju, knjige: [2],[6],[12] i [21]. Ne mali broj međunarodnih konferencija posvećen je filozofiji matematike (као на примјер: Philosophy of Mathematics at the Twenthieth World Congress of Phislosophy in Boston, Massachusetts 1998, August 10-15), te, zato, postoji znatan broj članaka koji se mogu posmatrati kao istraživanja u filozofiji matematike (na primjer, radovi Celišćeva ([7]), Elaine Landry, Alana Weir, Jarmoa Pulkkineni, Jarosława Mrozeka - *The Problems of Understanding Mathematics*, i drugi). Na kraju, recimo da postoje naučni časopisi u kojima se tretiraju problemi filozofije matematike (kao, na primjer: *Bulletin* of the Canadian Society for History and Phislosohy of Mathematics ISSN 0835-5924, i „*Philosphy of Mathematics*" of the Brithish Society for Philosphy of Mathematics, ISSN 0031-8019).

Matematiku, kao i filozofiju, možemo shvatati kao sveopštu nauku. U stvari, ona se smatra sveopštom i apstraktnom naukom, budući da se matematički aparat, u principu, može koristiti u gotovo svim oblastima znanja. Sasvim opravdano se postavlja pitanje: U čemu se razlikuju filozofija i matematika? Da li za domen imaju istu realnost? Da li bi trebalo da su najopštiji odgovor na ova pitanja sastoje u slijedećem: filozofija i matematika koriste razne načine opisivanja objektivne realnosti na odgovarajućim jezicima? Da li u prvom slučaju, imamo posla sa prirodnim jezikom, a u drugom sa iskustvenim jezikom koji podrazumjeva postojanje formalno-logičkih metoda opisivanja realnosti ? Kao što je poznato, filozofija izučava sve pojave realnosti unutar sveopštih zakonomjernosti i daje, u biti, univerzalni metod saznanja i preobrazovanja prirodnog i socijalnog okruženja. Pri tome filozofija izučava količine, svojstva objekata, analizirajući ih prije svega, na planu najopštijih principa, znakova i kategorija.

Sasvim drugačije je sa matematikom. Njen zadatak se sastoji u opisivanju ovog ili onog procesa posredstvom nekog matematičkog aparata, tj. na formalno-logički način. Ali, na nivou ove konstatacije ne treba izvlačiti zaključak o udaljenosti matematike od filozofije. Ne treba, kako je to uobičajeno, posmatrati samo vanjsku stranu matematičkih objekata. Razvijena matematička teorija istražuje ne samo vanjsku stranu predmeta realnog svijeta, nego i značajan dio njene unutrašnjosti. Po mišljenju O.S. Seline, razlika između matematike i filozofije nalazi se ne u kategorijama forme i sadržaja, svojstava i količina, ili nekih drugih kategorija filozofije. Razlika među njima sastoji se u dvije odvojene tehnologije opisivanja, uz korištenje raznih jezika, u opisivanju procesa sveobuhvatnosti, i, u tom, da matematika u svakom slučaju pretpostavlja formalizaciju, u najširem smislu riječi, formalnih načina opisivanja izučavanjih pojava.

Ponekad, matematika vjerno i dublje prikazuje realnost, nego šro je to moguće u granicama drugih nauka. Preciznije, ima slučajeva kada matematički model daje više informacija o ovim ili onim procesima, nego je to moguće na verbalnbom nivou. Tako, ne gledajući na nivo sveopšteg karaktera, filozofija i matematika koriste različite funkcije i saznanja. Pri tome se filozofija manje razlikuje od ostalih posebnih nauka, nego matematika. Matematika zauzima poseban položaj, iako je upletena u ostale nauke više nego filozofija ili bilo koja druga nauka.

Pogledajmo detaljnjije funkcije matematike i filozofije.

Sveobuhvatnoznačenjska funkcija filozofije uslovljena je činjenicom da se ona pojavljuje na osnovnom naučnom nivou. Ponekad, u funkciji društveno-istorijske prakse, filozofija nastupa u svojstvu fundamenta svih nauka. Sem toga, filozofija kao sistem disciplina indukuje formiranje kod čovjeka vrijednosne orijentacije, koje imaju presudno značenje u obrazovanju i vaspitanju, koje nisu samo nauka, već u posebnoj formi društvenog saznanja i ideologija u nekom smislu. Filozofija nije samo osnova svjetonazora nego i opšta metoda saznanja. Otuda metodološka funkcija filozofije. Slično, kao što u sistemu nauka, filozofija jeste sublimat sveg znanja, ona je istovremeno sveopšta metoda saznanja.

Na kraju, filozofija uvodi u nauke logičku funkciju. Ni u jednoj nauci se ne mogu vršiti ispitivanja, uopštavanja i ne mogu se dati podrobnija objašnjenja bez iskorištavanja filozofskih pojmova i predstava. Na taj način, filozofski principi imaju ogromno metodološko značenje; imaju snagu opšteg gledanja, te daju mogućnost intenzivnijeg razvoja specijalnih nauka.

Govoreći o predmetu i funkcijama matematike, očigledno je, da matematika sve više igra integrirajuću ulogu, budući da je ona, kao i filozofija, sveopšta naučna disciplina. Upoređujući matematiku sa filozofijom, neophodno je determinisati predmet matematičkog znanja. Determinacija ove ili one nauke, naravno, ne sadrži definiciju koja u potpunosti iscrpljuje karakter te nauke. Na primjer, Engles je determinisao matematiku kao nauku koja se bavi izučavanjem prostornih formi i brojevnih odnosima realnog svijeta. Budući da savremene najrazvijenije matematičke teorije imaju posla sa apstraktnim strukturama, sasvim opravdano je matematiku determinisati kao nauku o čistim apstraktnim strukturama.

Napomenimo još jednu osobenost matematike. Uobičajeno je da se predmet nauke razlikuje od njenih objekata. U slučaju matematike razlikovanje objekata od predmeta ne ogleda kao kod drugih nauka, ako se ima u vidu da pod predmetom nauke obično podrazumjevamo određenu sferu djelatnosti, posebnu bitnost i sistem posebnih zakonomjernosti koji izučavanju tu bitnost. Matematika, strogo govoreći, ne izučava zakone razvoja prirodne ili socijalne sredine. U stvari, opšti zakoni koji su sveprisutni u realnosti izučava filozofija, a u specijalnim slučajevima – posebne nauke. Matematika u tom smislu nema determinaciju. Ona nije posebna nauka u običnom smislu riječi. Prema mišljenju O.S.Seline, ona je poseban način teorijskog opisivanja realnosti. U tom smislu, ona bolje od drugih posebnih nauka, može da opiše proizvoljno okruženje, te predstavlja posebnu disciplinu. (Filozofija takođe nešto više od posebnih nauka opisuje realni svijet, ali u drugom smislu: ona je nauka i posebna forma apstraktnog saznanja koja sadrži elemente ideološkog karaktera.). Mogo bi se reći da je matematika jedna posebna kultura, ako citiramo mišljenje koje je iznio C. K. Raju u svom članku "Mathematics and Culture", publikovanog u „Filosophy of Mathematics Education Journal", u broju 11(1999).

Preciziranje predmeta matematike bi nam omogućilo da shvatimo kako se ona odnosi prema posebnim naukama, koje izučavaju odvojene fragmente prirodnog i socijalnog okruženja. Budući da matematike, po svojoj prirodi, predstavlja sveopšte i apstraktno znanje, ona se može i mora iskorištavati u svim drugim posebnim naukama. Specifičnost matematičkog prilaza izučavanju realnosti u mnogo čemu objašnjava posebnost kriterija istinitosti u matematici.

Sa ustanovljavanjem kriterija istinitosti u posebnim naukama stvar je manje ili više jednostavna, posebno ako se ne zaboravi da je primjenljivost te nauke najvažniji kriterij istinitosti. U matematici, kriterij istinitosti se iskazuje u posebnoj formi: ne može se dokazati istinitost matematičkih tvrdnji oslanjajući se samo na primjenljivost u praksi. Poseban kriterij istinitosti u matematici podvrgnut je, u pravilu, dvama posebnim zahtijevima – izvodljivosti i neprotivrječnosti. Udovoljavanjem tim posebnim kriterijima jeste potreban (ali, ne i dovoljan) uslov matematičkog postojanja. O problemu matematičkog postojanja govorio je, između ostalih, i R.L.Goodstein u njegovom izlaganju na konferenciji povodom sedamdesetog rođendana A.Heytinga 1968. godine u Amsterdamu (vidjeti članak: R.L.Goodstein: „Existence in Mathematics" u knjizi [12]).

Dakle, matematika je sveopšti način teorijskog opisivanja realnosti, oblast znanja, koji ima svoj poseban status u sistemu nauka. Predmet matematičkog opisivanja može biti bilo koji proces u realnosti, a objekti te oblasti znanja su prostorne forme i količinski odnosi realnosti, a u opštem slučaju – apstrantne matematičke strukture.

4. Zaključak

Ovdje ću naznačiti osnovne pravce u filozofiji matematike, unutar kojih se pokušavaju razriješiti problemi povezani sa epistemiološkim statusom matematičkih tvrdnji, i odgovarajućim ontološkim statusom matematičkih objekata. Kratak popis osnovnih alternativa uključuje nekoliko pravaca. Jedan od najuticajnijih je *strukturalizam*, prema kojem matematika govori ne o specigičnim matematičkim objektima, nego o strukturama.

Glavni predstavnici strukturalizma su P.Benacerraf, S.([4],[5]) Shapiro ([20]) i M.Resnik. Prema Benecerrafu, ontološka pitanja o postojanju matematičkih bitnosti mogu biti zaobiđena ako pojam matematičkog objekta zamijenimo pojmom mjesta u matematičkoj struturi. U već pomenutom radu „Šta brojevi ne treba sa budu?“, on je naveo primjer broja 2, koji bi trebalo shvatati ne kao nekakav apstraktni objekt, već nešto što stoji posle 1, a ispred 3. Drugim riječima, ukazivanje na apstraktni objekt 2 zahtijeva implicitno ukazivanje na svu strukturu prirodnih brojeva. Tako se odstranjuje potrebnost u semantičkoj shemi, prema kojoj matematičke tvrdnje, budući da su istinite, sadrže singularne terme, koji moraju upućivati na neki objekt.

Sada se težište prenosi na pojam strukture. Prije svega, prihvatamo da se matematika sastoji od sturktura. Ali šta je strukuta - sa ontološke i epistemiološke tačke gledišta? I, da li je taj pojam jednostavniji ili pogodniji, I da li je više fundamentalan, od pojma apstraktnog objekta? To je, u suštini, pitanje koji pokušavaju da razriješe Resnik i Shapiro u cijeloj seriji članaka i knjiga. Još je, svojevremeno, N. Burbaki pretpostavljao da je pojam strukture više fundamentalan od svih ostalih pojmova u matematici. Na sličan način razmišljaju Resnik i Shapiro. Ako se strukture shvataju kao domene objekata sa određenim odnosima među njima, tj. ako se shvataju kao strukture koje se izučavaju u matematičkoj logici, tada treba imati u vidu da se u matematičkoj logici strukture definišu u teorijsko – skupovnim terminima. No, u tom slučaju slijedi veoma radikalan zaključak da je teorija skupova disciplina u istoj ravni sa drugim granama matematike i ne nikako baza za čitavu matematiku. To znači da teorija skupova izučava jednu od mnoštva mogućih stuktura. Na primjer, aritmetika se ne bavi istraživanjem prirodnih brojeva, već „prirodnih struktura“. Sve ovo znači da u tom slučaju treba da determinišemo stukture, koje nisu teorijsko – skupovni pojmovi. Shapiro opisuje strukturu kao “mogući sistem objekata, koji se nalaze u specijalnim međusobnim odnosima, kada se zanemare svojstva objekata koja nisu bitna za te specijalne odnose“. Na primjer, u Zermelo-Frankelovoj aksiomatskoj teoriji skupova, ignoriše se sve sem odnosa članova u skupovima. Napomenimo da je to samo opis strukture, a ne definicija. Strukturalisti u filozofiji matematike izbjegavaju davati preciznije definicije, budući da sam pojam strukture ne liči baš na osnovni ontološki pojam – a da pri tome ne otklanjaju epistemiološke probleme. Pojam strukture ne rješava, već brže „rastjeruje“ te probleme u duhu vitgenštajnove terapije.

Ne gledajući na određeni radikalizam, strukturalizam u filozofiji matematike je samo modifikacija onoga što je Ch. Chihara [8] nazvao „ortodoksnom tačkom gledišta“. Ortodoksnost se sastoji u tome da se egzistencijalne matematičke tvrdnje ne razlikuju po svojoj strukturi od egzistencijalnih tvrdnji empirijskih nauka. Zasnovanost ove teze sastoji se u tome što se matematičke tvrdnje prave u terminima ekgistencijalnih kvantifikatora logike prvog reda, i, zato, bukvalno i direktno utvrđuju postojanje matematičkih bitnosti. I, budući da struktura matematičkih tvrdnji u poimanju strukturalista zapravo ostaje takva, pred nama se pojavljuju problemi koje bi oni radije vidjeli “rastjerane”. U stvari, ortodoksija takvih strukturalista, kao što je na primjer Resnik, sastoji se u slijedeće dvije ideje. Prvo, logička forma matematičkih tvrdnji treba se poimati bukvalno. Drugo, semantika matematičkih tvrdnji mora biti semantika prirodnih nauka. U protivnom slučaju, ne treba govoriti o istinitosti matematičkih tvrdnji, a bez toga nemoguće je bilo šta kazati o matematičkim objektima. Ovi problemi bi mogli biti ignorisani ako bi se odustalo od zahtjeva da su matematičke tvrdnje istinite. Orginalni radikalni pogled u tim relacijama jeste Fieldov nominalizam, koji je pretpostavaljao da su matematičke tvrdnje lažne. Drugi radikalan otklon od ortodoksije može se vidjeti u poziciji F. Kitchera [15], za koga su matematičke tvrdnje suština sveukupnosti operacija iskazanih idealnim subjetima.

H. Field ([10],[11]) pretpostavlja da matematički objekti ne postoje, da je standardna matematika neistinita, ali, pri tome, on nastoji da sačuva matematičku praksu. U tom cilju, on je snadbio fizičku realnost značajnim matematičkim strukturama i dao je opis fizikalne verzije analize. Matematičke tvrdnje, tipa 'hipoteze kontinuuma', u tom slučaju, postaju tvrdnje o prostoru i vremenu.

Takva pozicija je moguća pri nekoj snažnijoj verziji *nominalizma*. Tehničko sredstvo izražavanja takvog nominalizma jeste tzv. "teorema konzervativnosti", koja govori o tome da je proizvoljan nominalistički zaključak koji se može izdvojiti pomoću matematike nominalističke teorije: on može biti napravljen u matematici izgrađenoj samo pomoću logike. Na taj način, u matematičkoj praksi prave se tvrdnje o matematičkoj bitnosti, ali nije neophodno vjerovati u postojanje takvih stvari, budući da objekti takvog tipa ne trebaju istinite matematičke tvrdnje.

Dakle, Field predpostavlja da su matematičke teoreme lažne, a matematički objekti – korisne fikcije, i koje su, u teorijskom smislu, potpuno nevažne.

Fieldove teorija nije samo radikalna, već je u značajnoj mjeri paradoksalna; ona u sebi pokušava da ujedini logicizam i nominalizam. Logicizam se vidi u "teoremu konzervativnosti", prema kojem matematički izvod može biti zamjenjen dužim logičkim izvodom.

Pod nominalističkom teorijom, Field podrazumjeva teoriju u kojoj se promjenljive (na koje se mogu primjenjivati kvantifikatori) uzimaju iz nematematičkih domena. Drugim riječima, nelogički rječnik nominalističke teorije se ne presjeca sa rječnikom matematičkih teorija i, prema tome, apstraktni matematički objekti se izbjegavaju. Malo preciznije, neka je N nominalistička teorija prvog reda, a ZFU – Zermelo-Frankelova teorija sa Urelementom. Tada se može pokazati da

$$\mathrm{N} + \mathrm{ZFU} \vdash \mathrm{S} \Rightarrow \mathrm{N} \vdash \mathrm{S}\,.$$

(Riječima: ako je u sistemu N+ZFU izvodljiva, uz primjenju pravila izvođenja, formula S, tada je ona takođe izvodljiva uz primjenu istih pravila izvođenja is sistema N.)

U stvari, treba nam neka modifikacija teorije ZFU: treba joj dodati neki egzistencijalni aksiom i izmijeniti aksiom o partitivnom skupu, što omogućava povezivanje matematičke teorije sa nominalističkom teorijom.

F. Kitcher podrazumjeva da je matematika neprekidan niz konceptualnih konstrukcija i, u vezi sa tim, razvio je evolucioni model matematičkog znanja. Na taj način, ključnom disciplinom pri odgovarajućim ispitivanjima postaje istorija matematike, iz koje treba izvlačiti neke racionalne principe, koji upravljaju konceptualnim izmjenama u hodu razvoja matematike. Jasno je da T. Kunova filozofija zauzima u poziciji F. Kitchera najznačajnije mjesto.

Sem toga, Kitcher pribjegava, u objašnjavanju matematičkog saznjanja, razlozima Cohenovoj *teorije forsinga*, (nešto više o tome može se naći, na primjer, u knjizi [20]) prema kojoj se značenje termina nalazi praćenjem kroz niz izmjena ka nekom polaznom aktu upotrebljenih termina. Ranije ili kasnije taj niz se oslanja na perceptualno saznanje naših prethodnika. Pri tome, Kitcher, usvojivši važnu umješanost psihologije, odustaje od epistemiološke orjentacije u istraživanju prirode matematičkih istina. Ako se uobičejana pozicija u matematici sastoji u tome da treba objasniti značenje tih istina, Kitcher pretpostavlja da veliki broj ljudi prihvata značajan dio matematičkih istina, i da se zadatak filozofskih istraživanja sastoji u tome da se shvati kako se dolazi do tog znanja.

Treba napomenutu pokušaj Chihare da objasni matematičku bitnost ne terminima teorije skupova, već terminima teorije tipova. G. Hellman [13], i H. Field pribjegavaju, u cilju objašnjavanja matematičke bitnosti, ka modalnoj logici, pretpostavljajući više njihovu potencijalnost od aktuelnosti. Naša je epistemološka zagonetka, naravno, najvidljivija ako prihvatimo modalnu ontologiju kakvu predlaže David Lewis. Prema Lewisovu mišljenju, naši modalni misao i govor odnose se na bezbroj konkretnih prostora-vremena, koji zaslužuju biti nazvani 'zbiljskim' zbog činjenice da u njima živimo. Druge prostore-vremena 'zbiljskima' zovu oni koji žive u njima. Govor o stvarima kakve bi mogle biti ali za nas nisu, prema Lewisovu mišljenju, prosuđuje se kao istinit ili pak lažan s obzirom na stanja stvari na nekim drugim prostorima-vremenima gdje bića nama nalik žive nama slične živote, na upadljivo slične načine.

Najvažnija razmišljanjima pri tome su prihvatanje: da u osnovi pristupa leži apelacija ka perceptualnom opitu, shvatajući ga u najšitem smislu riječi. Čak pri Fieldeovom nominalizmu epistemiološki pristup oblasti prostor – vrijeme, u kojima žive matematičke stukture, pokazuju se perceprualno dostupnim na neki način. Najkarakterističniji u tom smislu je rad P. Maddyeve [16], [17]. Ona smatra da pretpostavljena platonistička bitnost može biti dostupna običnoj percepciji.

Maddy smatra da je apstraktna bitnost matematike slična fizičkoj bitnosti, i, zato je moguća direktna perceptualnost te bitnosti. Mnoštvo fizičkih predmeta Maddy razlikuje od fizičke sveukupnopsti tih predmeta. Svaki pojedini predmet se odnosi ka fizičkoj sveukupnosti tih predmeta sasvim na dugačiji način u odnosu na to kako se taj predmet odnosi prema skupu tih predmeta. Fizička sveukupnost nema članova, dok se skup determiniše odnosima tih članova i, ne zaboravimo, incidencijom predmeta prema tom skupu. Zapravo, to je razlog, da na skup gledamo kao na apstraktan objekt, na koji možemo da gledamo kao lokalizaciju u prostranstvu, u kojem je lokalizovana fizička sveukupnost.

Treba još jednom napomenuti: da je odgovarajuće poimanje skupa moguće na račun epistemioloških shvatanja saznanja, koja se razvijaju u poslednje vrijeme, zasnovano na Kripkeovim idejama iznuđivanja. Tako, saglasno jednoj od definicija , subjekt P poprima značenje objekta K u mjestu H, ako i samo ako, prvo: postoji objekt, koji pripada klasi K u mestu H, i, drugo: P prima perceprualno znanje o klasi K, i, treće: objekt na mjestu H uključujen je u proces generisanja perceprualnih vjerovanja na odgovarajući način. Ne ulazeći u pojedinosti ovih definicija, napomenimo da je ono samo jedno od nekoliko načina pristupa definisanju perceptualnog saznanja, i nije jasno, u kom stepenu je Maddyino shvatanje skupova, kao perceptualno shvatanje objekata opravdano pri drugačijim poimanjima.

Ovako, kratko predočen, izgleda pregled osnovnih pravaca u filozofiji matematike danas. Nedostarak mjesta ne dozvoljava kritičku argumentaciju na svaki od ovih pozicija. Čini se da je epistemiološki izazov filozofiji matematike, iniciran Benacerrafom, prihvaćen kao lokalna paradigma u toj oblasti filozofije.

5. Literatura

korištena za pripremanje ovog teksta**:**

[1] Balaguer, M. *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*.; Oxford University Press, 1998.
[2] Barker, S.: *Filozofija matematike*; Nolit, Beograd 1973.
[3] Беляев, Е.А. В.Я.Перминов: *Философские и методологические проблемы математики*, МГУ, 1981.
[4] Benacerraf, P. *What Numbers Could Not Be*; Philosophy Review, 74 (1965), 47-73.
[5] Benacerraf, P.: *Mathematical Truth*; Journal of Philosophy, 70(1973)**,** 661-679.
[6] Božić, M.: *Pregled istorije i filozofije matematike*; Zavod za udžbenike i nastavne sredstva Srbije, Beograd 2002.
[7] Целищев, В.В : *Песпективе исследовании и философии математикич*; Философия науки**, 5(1999)**
[8] Chihara, Ch.: *Constructibility and Mathematical Existence*, Oxford University Press. 1990.
[9] Fang, J.: *Between philosophy and mathematics: The papallel on a "parallax"* Philosophua mathematica, Ser.2 (1989), IV(2)**,** pp 177.
[10] Field H. : *Realism, Mathematics and Modality*. Basil Blackwell. 1989.
[11] Field, H. *Science without Numbers*. Princeton University Press, 1980.
[12] Grupa autora (Priredio: Zvonimir Šikić): *Novija filozofija matematike*; Nolit, Beograd 1987.
[13] Hellman, G.*:* *Mathematics without Numbers*. Oxford University Press. 1989.
[14] Jones, R.B.: *Philosophy of Mathematics*; www.rbjones.com/rbjpub/philos/maths/
[15] Kitcher, Ph.: *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, 1983.
[16] Maddy, P.: *Realism in mathematics*. Clarendom Press. Toronto, 1990.

[17] Maddy, P. *Philosophy of Mathematics*: *Prospects for the 1990s*; Synthese, 88(1991), 155–164.
[18] Mostowski, A. *Thirty years of foundational studies*; Acta Philosophica Fennica, XVII., Helsinki, 1965.
[19] Putnam, H.: *Philosophy of mathematics – why nothing works?* ; Putnam H. Words and life. Harvard UP. P. 499–512.
[20] Romano, D.A.: *Osnove matematike, II dio: Teorija skupova, Knjiga 2: Zermelo-Frankelova aksiomatska teorija skupova*; MAT-KOL (Banja Luka), Posebna izdanja, 5(2007)
[21] Светлов В.А. *Философия математики: Основные программы обоснования математики XX столетия,* КомКнига, Москва, 2006.
[22] Shapiro, S:. *Foundations without Foundalism*. Oxford University Press, 1997.
[23] Жуков, Н.И : *Философские проблемы математики*, Минск, 1977.

Zahvala: Autor se zahvaljuje Ostoji Đukiću, profesoru Filozofsog fakulteta Univerziteta u Banjoj Luci, na korisnim sugestijam kojima je članak znatno poboljšan. Autor se, takođe, zahvaljuje Ani Romano, lektoru Skupštine grada Banja Luka, na uloženom trudu da ovaj tekst ima što je manje moguće jezičkih nedoumica.