Matematički kolokvijum (Banja Luka)
XIII (1)(2007), 1-11

Принципи наставне технологије укрупњавања дидактичкиј јединица

Синиша Црвенковић[1], Бранислав Праштало[2], Даниел А. Романо[2]

[1] Природно-математички факултет Нови Сад
Трг Доситеја Обрадовића 4, Нови Сад, Србија

[2] Природно-математички факултет Бања Лука
Младена Стојановића 2, Бања Лука, Б&Х
E-mail: bato49@hotmail.com

1 Увод

Наш интерес за поступак уопштавања, као методски поступак, произлази из тога што је тај поступак често интересантан и професионалним математичарима. Математичар не само да настоји да ријеши нека раније постављена питања, него и самостално поставља питања. При том није ријетак случај да у рјешавању неког задатака претходно треба извршити генерализацију проблема, а потом тако уопштени проблем ријештити. На тај начин, математичар, не само да рјешава проблеме, него проналази поступке разрјешавања класе проблема, т.ј. ради са аналогнмим задацима, изучава однос између њих, установљава потребне и довољне услове за егзистенцију једног или више својстава овог или неког другог факта. Математичар покушава да установи вриједност и обрнуте тврдње, и томе слично. Уопштено говорећи, математичар настоји да изврши уопштавање, колико је то могуће, и да установи када генералисани појам не задовољава постављене услове.

1986. године, у издању " Математическое Просвещение", публиковане су књиге: *„Укрупнение дидактических единиц в обучении математике: кн. для учителя"* и *„Укрупнение дидактических единиц в обучении математике*", а 1992. године, публикована је књига "*Укрупнение дидактических единиц как технология обучения*" аутора Пјурваја Мучкаевича Ердниева (Пюрвя Мучкаевич Эрдниев) (Прецизније: прве двије књиге аутори су: Эрдниев П.М. и Эрдниев Б.П.) У књигама су изложени резултати тридесетогодишњих истраживања; описана је конкретна технологија реализације неких методских јединица на часовима у средњим школама. У тим књигама посебно је показана реализација математичког система *Укрупњавање дидактичке јединице*.

Овдје изложени поступак базиран је на истраживањима П. М. Ерндијева и А. В. Јастребова. Према томе, требало би прихватити хипотезу да, тамо изложена метода "усложњавања дидактичкиј јединица", у току процесу предавања математике, омогућава постизање сагледавања дидактичког принципа генерализације. Према томе, Ерднијева теорија и теорија Јастребова "о сврсисходном моделирању базних особина научних истраживања у наставном процесу" су у сагласнсти. У нашој педагошкој литератури забиљежемо је неколико покушаја објашњавања метода аналогије и уопштавања. Погледати, на примјер, чланак [3] Бранислава Боричића и чланке [4] и [6].

2. Анализа

Активан процес информатизације ставља пред практичне дидактичаре посебан задатак: развој таквих наставних технологија који би требало да обезбиједе развој способности код ученика, на бази којих би требало да побољшају процес овладавања тим новим знањима и способностима. Ефективност обучавања зависи од степена развоја индивидуалних способности ученика, од њихове обучености, тј. способности усвајања нових знања, као и способност активности подучавања.

Један од стандардних захтијева у систему подучавања – учења, посматран кроз призму постављања питања, јесте захтијев потпуности. Појам потпуности у дидактици математике изучавало је више аутора, од којих је сваки давао посебан акцент неком посебном аспекту овог појма. Тако, П.М.Ерднијев је изучавао овај појам у оквирима његове концепције укрупњавања дидактичких јединица. Појам потпуности разматра се у вези са питањем избора питања у циљу досезања цјеловитости и индиректног усвајања знања. Говорећи о питањима, П.М.Ерднијев је увео појам *цикличке потпуности*. Под појмом цикличне потпиности подразумјева се таква организација система питања, када сваки улазни елемент датог питања (задатка) сукцесивно буде постављен у позицију тражене информације. П.М.Ерднијев је, такође, указивао на неопходност концентричне организације материјала, када се програм организује у форми спирале и при томе образује унутрашњу цјеловитост наставе теме. На примјер, требало би истовремено изучавати линеарне једначине, неједначине и идентитете које, опет доводе до линеарних једначина. Пролазећи датим полазним кругом не враћамо се на почетак већ долазимо до квадратне једначине.

У раду се анализира технологија укрупњавања дидактичкиј јединица (у даљем: УДЈ), чија примјена би требало да оспособи формирање навика самосталног рада, развој интересовања, способност усвајања нових знања, развој способности учења, и, сем тога, омогућава проширивање обима изучаваног материјала без оптерећивања ученика.

Принципи технологије УДЈ базирани су на одговарајућим закономјеростима а реализују се просредством сљедећих система правила:

- педагошки принцип прелаза са диригованог вођења ка самовођењу;
- педагошки принцип постављања обратног питања;
- принцип систематичности знања; и
- принцип генерализације информација.

(1) Принцип прелаза од дигованог вођења ка самовођењу у наставним активностима ослања се на слиједећу закономјерност: у развоју продуктивних способности ученика постиже се више ефективности што се више користе могућности и средства самовођења ученика.

Правила реализације овог принципа су:

1.1. све, што је ученик у наставном процесу у стању урадити без помоћи са стране, он треба да уради самостално;

1.2. ученик треба да учи самостално, састављајући и формирајући обрнуте задатке од унапријед заданих задатака, самостално рјешавати их, те самим тим форирати поступак рада са самопровјеравањем;

1.3. у процесу учења треба укључивати не само рјешавање задатака, него и самосталног постављања задатака по аналогији као и уз уважавање принципа усложњавања;

1.4. наставник има обавезу да се придржава систематског кориштења могућности самоорганизовања ученика као и преимућство ослањања на средства посредног и перспективног диригованог вођења процеса подучавања и учења (при томе, под посредним диригованим вођењем подразумјевама се активност ученика посредством избора система продуктивних задатака).

(2) Принцип постављања обрнутог питања базира се на закономјерости коју су установили физиолози: у основи свих психичких активности налазе се циклички процеси, тзв. спирални процеси, при чему проток информација тече по затвореним путевима ([1]). Принцип постављања обрнутог питања треба превасходно тумачити у смислу да треба обрнути структуру постављеног питања. То се реализује посредством следећих правила:

2.1. У систем питања треба укључити како деформисано питање тако и обрнути задатак;

2.2. Постављање обратних задатака при чему траженим елементом сукцесивно појављује се сваки параметар који је у унапријед датом задатку играо улогу улазног параметра.

(3) Принцип систематичности знања базира се на слиједећим закономјерностима: знања ученика попримају систематска својства, и не остају као неорганизовани скуп информација, ако се освојено знање оствари укрупњеним порцијама, а елементи тог знања образују укрупњену јединицу коју је требало да савладају само благодарећи вишефункционалним везама међу тим елементима.

Принцип систематичности знања реализује се следећим поступцима:

3.1. заједничко изучавање узајамно повезаних задатака, теорема, својстава, критерија;

3.2. изградња блока задатака на основу исте задане ситуације;

3.3. на часовима не употребљавати питања која се директно не односе на програмску јединицу и која немају логичких веза са претходним материјалом;

3.4. правити рекапитулацију кроз трансформацију проблема који се третирају као и кроз њихово укрупњавање;

3.5. искориштавање шема и планова да би се обазбиједило да ученици усваја нове информација.

(4) Принцип генерализације информација у продуктивном процесу учења у циљу саморазвоја продуктивних спсобности личности ученика. Будући да се број информација у свијету сваке године увеличава геомтријском прогресијом, то би требало да у сваком наставном процесу, а у том смислу и продуктивном, појави се потреба њиховог сажимања и генерализације.

Правила реализације овог принципа су:

4.1. посветити пажњу примјени општих умјећа, користећи опште способности у циљу рјешавања продуктивних задатака;

4.2. у поступку укрупњавања требало би да се придржавамо процеса постепеног прелажења од конкретног ка апстрактном уз примјену повезивања појмова и правила дате методске јединице са општом структуром знања;

4.3. искориштавање шема, планова и таблица.

Теорија УДЈ искористива је не само при наставном процесу подучавања и учења, него њен продуктивни потенцијал прераста у систем учења на високошколским установама. На примјер, према предлогу И.П. Подласова, у уџбенику за високошколске установе би требало материјал излагати уз уважавање принципа усложњавања дидактичких јединица: „таква структура – објашњава Подласов – омогућава да се сагледа и усвоји како логика тако и главне идеје излагане у изучаваном материјалу, те прихвати узрочно-последичност закључивања” ([4]).

3. Примјери

3.1. Проведимо поступак етапног уопштавања и извршимо анализу састављања тог уопштавања на једном примјеру.

Задатак 1. *Израчунати граничну вриједност* $\lim \dfrac{\sin 3x}{x}$ (x → 0).

Рјешење: Рјешење овог задатка добија се на уобичајени начин трансформацијом функције, чија се гранична вриједност тражи, до функције $\dfrac{3\sin 3x}{3x}$ за коју знамо граничну вриједност у процесу $3x \to 0$. Дакле, одговор је

$$\lim \frac{\sin 3x}{x} = 3 \ (x \to 0). \quad (1)$$

Задатак 2. *Наћи функцију* f(x) *која задовољава једнакост*

$$\lim \frac{f(x)}{x} = 3 \ (x \to 0). \quad (2)$$

Навести што је могуће више примјера функција које задовољавају постављени услов.

Задаци 1. и 2. повезани су међусобно. Заиста, да би добили форму задатка 1. из познате тачне тврдње (1), треба сматрати десну страну једнакости (1) непознатом, а да би добили форму задатка 2. потребно је да сматрамо лијеву страну непознатом, прецизније – бројник разломка у процесу граничног приближавања.

Рјешење задатка није потпуно једноставно нити јединствено. Прво, трансформишимо једанакост (2) у другу форму - подијелимо лијеву и десну страну једнакости (2) са 3. Добијамо да су функција x и функција f(x)/3 еквивалентне бесконачно мале величине – бесконачно мале величине истог реда. Дакле, функција f(x)/3 се може се узети из бесконачног стандардног низа еквивалентних бесконачно малих:

$$x \sim \sin x \sim \mathrm{tg} x \sim \arcsin x \sim \mathrm{arctg} x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim \frac{1}{\alpha}\,((1+x)^{\alpha} - 1)$$

Добијамо прву серију одговора: $f_1(x)=3x,\ f_2(x)=3\sin x,\ f_3(x)=\sin 3x,\ f_4(x)=\ln(1+x),\ldots$ Међутим, могућа је и друга серија одговора. На примјер, оваква: $F_k(x) = f_k(x)\varphi(x) + \psi(x)$, гдје је $f_k(x)$ једна од функција претходне серије, функција $\varphi(x)$ задовољава услов $\lim_{x\to 0}\varphi(x)=1$, а функција $\psi(x)$ је бесконачно мала величина вишег реда од бесконачно мале величине x (у граничном процесу $x \to 0$). На тај начин, добили смо веома велики број одговора на постављено питање у задатку 2.

Напоменимо да смо, са формалне тачке гледишта, ријешили проблем постављен у Задатку 2. јер смо нашли тражену функцију. Међутим, потпуни опис фамилије функција које задовољавају постављени услов нисмо успјели прецизно да дамо. Чак, покушај описа те фамилије претвара се у самосталан и тежак задатак. Према томе, ми смо, полазећи од конвенционалног мишљења, повезаног са кориштењем егзактног одговора, прешли ка дивергентном мишљењу, повезаног са самосталном поставком и рјешењем новог проблема.

Задатак 3. *Формулисати и рјешити задатак аналоган задатку* 2.

Рјешение. Могућа је тривијална аналогија, у којој је једина разлика у односу на задатак број 2, функција која се појављује у именику претходног задатка. Тражена формулација гласи: "Нађите функцију g(x) која задовољава једначину

$$\lim\frac{\sin 3x}{g(x)} = 3 \ (x \to 0) \quad (3).$$

Наведите што је могуће више примјера таквих функција". Решење задатка 3. је аналогно рјешењу задатка 2. и, такође, доводи до отвореног проблема у описивању скупа $\{g(x)\colon \lim\frac{\sin 3x}{g(x)} = 3\ (x \to 0)\}$ као одговора на постављено питање у формулацији задатка 3. Ако једнакост (3) подијелимо са бројем 3, добијамо једнакост

$$(1/3)\cdot \lim \frac{\sin 3x}{g(x)} = 1 \ (x \to 0) \quad (3').$$

Одавде закључујемо да су функција sin3x и функција g(x) бесконачно мале величине истог реда. Дакле, за функцију g(x) можемо узети било коју функцију из горе наведеног низа функција.

Задатак 4. *Формулисати и рјешити задатак који је уопштење задатка број* 3.

Рјешение. Једно од могућих уопштавања једнакости (3) састоји се у замјени вриједности граничне вриједности узимањем броја a умјесто броја 3. Формулација новог задатка гласи: "Предпостављајући да је a ≠ 0, наћи функцију h(x), која задовољава једнакост:

$$\lim \frac{\sin 3x}{h(x)} = a \quad (x \to 0).\text{”} \quad (4)$$

Ако једнакост (4) помножимо разломком 3/a, добићемо једначину

$$(3/a)\cdot \lim \frac{\sin 3x}{h(x)} = 3 \ (x \to 0). \quad (4')$$

што представља једанчину (3). Дакле, одговор на питање, постављено у задатку 3, у себи садржи одговор на питање постављено у овом задатку.

Конструишући задатке 1-4, ми смо постепено, у једанкости (1), умјесто конкретних података узимали варијабле. Уопштавање је могло ићи постепеније. На примјер:

Задатак 5. Наћи број b, за који вриједи једнакост

$$\lim \frac{\sin x}{x-b} = 1 \ (x \to b). \quad (5).$$

Рјешење: Пошто називник разломка тежи нули у процесу (x → b), а разломак има коначну граничну вриједност, мора бројник разломка тежити нули у процесу (x → b). Због непрекидности функције синус, добијамо да мора бити sinb = 0. Одавде, имамо да мора бити

$$b = n\pi, \ n \in \mathbf{Z}.$$

Директним провјеравањем добијамо да при непарним природним бројевима n вриједности броја b не задовољавају постављеном захтјеву, а да при парним природним бројевима n – задовољавају. Према томе, мора бити

$$b = 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z}.$$

Уопштење задатка 5 могуће је извршити на слиједећи начин:

Задатак 6. При каквим међусобним односима параметара a, b, c, d вриједи једнакост

$$\lim \frac{\sin cx}{ax-b} = d \ (x \to b/a). \quad (6)?$$

При томе предпостављамо да су параметри a и c различити од нуле.

Рјешење: Рјешење се може добити разматрањем аналогно оном које смо провели у рјешавању задатка број 5.

$$\begin{cases} d = (-1)^n c/a, \\ b = \pi n a/c, \end{cases} \text{ где } n \in Z.$$

Такође, могуће је примјенити снажније средство - Лопиталово правило.

Коментар: Није тешко видјети да поступак укрупњавања дидактичких јединица предпоставља примјену читавог комплекса узајамно допуњујућих мисаоних активности. Прво, рјешава се стандардни рачунски задатак (Задатак број 1). Он се употпуњује задатком, обрнутом задатку 1. Тако, задатке број 2. и број 3. можемо сматрати задацима обрнутим од задатка број 1. На основу ових задатака формулишу се задаци који самостално представљају сасвим друга и уопштена питања (Задаци број 3. и 4.). При том, први се посматра као задатак аналоган претходном (Задатке 2. и 3. сматрамо аналогним). Други задатак, задатак 4. сматрамо самостално формулисаним питањем – уопштењем раније разматраног питања.

3.2. Проведимо поступак етапног уопштавања на још једном примјеру. Подсјетимо се дефиниција парних и непарних функција: За функцију f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ кажемо да је парна ако вриједи

$$(\forall x \in \mathbf{R})(f(-x) = f(x)),$$

односно за функцију f кажемо да је непарна ако вриједи

$$(\forall x \in \mathbf{R})(f(-x) = -f(x)).$$

Појам парности и непарности функције можемо уопштити овако:

Дефиниција 1. За функцију f ћемо рећи да је парна ако вриједи

$$(\forall x \in \mathbf{R})(f(p-x) = f(x)),$$

гдје је p константа.

Дефиниција 2. За функцију f ћемо рећи да је непарна ако вриједи

$$(\forall x \in \mathbf{R})(f(p-x) + f(x) = q),$$

гдје су p и q константе.

Ове дефиниције садрже као специјалан случај познате дефиниције парности и непарности функције, када се узме да је p = q = 0. Није тешко видјети да је парна функција симетрична у односу на праву x = p/2, а непарна функција симетрична у односу на тачку T(p/2,q/2). Дефиниције 1. и 2. могуће је објединити у слиједећу дефиницију:

Дефиниција 3. За функцију f ћемо рећи да је класе ***S*** ако задовољава услов

$$(\forall x \in \mathbf{R})(f(p+\varepsilon x) + \sigma f(x) = q),$$

гдје су p и q константе, а $\varepsilon, \sigma \in \{-1,1\}$.

.

Ова дефиниција садржи специјалне слућајеве: (а) Дефиницију 1, за $\varepsilon = -1$, $\sigma = -1$; (б) Дефиницију 2, за $\varepsilon = -1$, $\sigma = 1$. Интересантно би било анализирати функције у преосталим случајевима: (в) $\varepsilon = 1$, $\sigma = -1$ (Уз додатни услов $q = 0$, имамо дефиницију периодичних функција) и (г) $\varepsilon = 1$, $\sigma = -1$. О овим уопштавањима писали су М.Марић ([4]) и трећи аутор овог текста ([6]). Оставља се читаоцу да установи у односу на које операције је класа ***S*** затворена.

3.3. Разрадом захтјева потпуности за систем питања у вези са неким појмом (или задатком) у математици занима ли су се различити аутори (на примјер: П.М.Эрдниев, Ю.М.Колягин, Н.А.Сорокин, В.А.Онищук, В.В.Гузеев, А.Ф.Эсаулов и други). При томе већи дио њих допринјео је нашем бољем разумјевању дидактичког захтијева потпуности. У овом дијелу текста биће, као илустација, наведен један примјер како изгледа уважавање захтјева потпуности: Систем питања је на тему "екстрем фунције". Анализирање аспеката захтјева потпуности питања може бити разбијено на неколико група питања:

1. Математичка:
   1.1. Логичка: Појам, теорем, алгоритам, метод;
   1.2. Радна: знање и навике повезана са конкретним математичким објектом,
   општа знања (аналогија, употеђивање, анализа/синтеза, уопштавање);
2. Психолошка: левелна и профилна диференцијација, индивидуализација, конкретна диференцијација, психолошка удобност;
3. Организациона:
   3.1. Форма испољавања:
   3.2. Циљ испољавања:
   3.3. Форма организације рада

На Схема №1, преузетом из литературе, представљене су различите функције које имају локални минимум у тачки $x_0 = 0$. Овдје је делта - функција дефинисана са

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x = 0, \\ 0, & \text{если} \quad x \neq 0 \end{cases};$$

а $d(x)$ - је Дирихлеова функција.

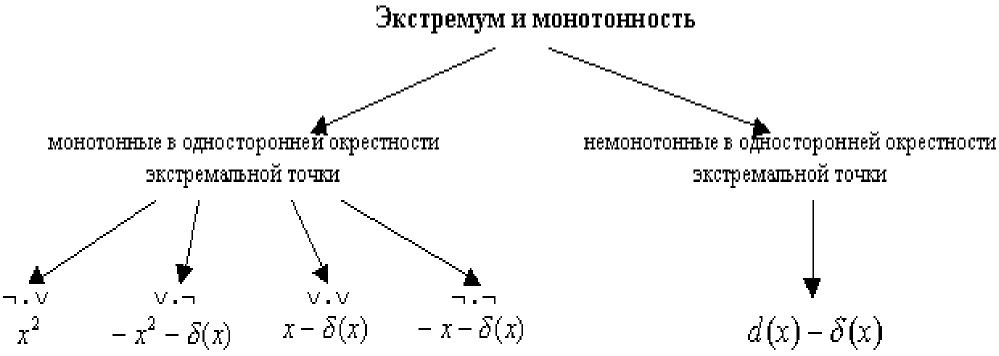
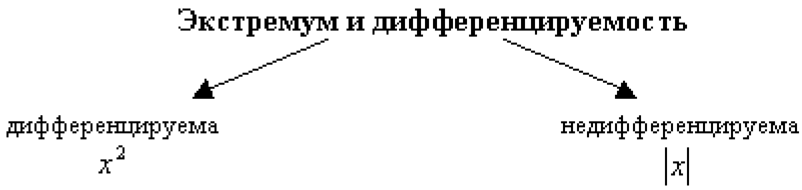


***Схема N°. 1*.**

Одступимо за тренутак од наше основне линије излагања и покажимо да посматрани примјер може послужити за показивање битних својстава изучаваних појмова. Схема №1 показује да монотоност функције у отвореној једностраној околини тачке, разматрана само по себи, без додавања допунских захтијева, није повезана са појмом екстрема. Аналоган закључак добијамо анализирајући појмове екстрема и непрекидности (схема №2), појмове екстрема и диференцијабилности (схема №3).

Схема №2

Схема №3



Слично варирање небитних катактеристика омогућава снажније истицања оба појма и спрјечава појаву представа о тома да, на примјер, функција мјења карактер монотоности.

Вратимо се основној линији нашег излагања. У питањима је обавезно да се представе различити начини математичких активности са датим појмом: одређивање својстава тог појма, додавањем услова на неки објекат да би испуњавао захтијев да постане тражени објект, конструкција траженог објеката који припадају датом појму, оперисањем датим појмом при рјешавању задатака, и томе слично. Тако, у вези са појмом екстрема можемо казати слиједеће:

- Доказати да дата тачка је тачка у којој функција има екстрем (користећи се дефиницијом или довољним условима за егзистенцију екстрема);
- Испитивање функције ради утврђивања да ли постоји екстрем и, у том случају, установити карактер тог екстрема;
- Конструисати функцију са екстремом датог типа;
- Примјенити појам екстрема на рјешавање задатака из оптимизације, управљања и слично.

Разумије се, наведени списак може бити употпуњен.

4. Закључак

На примјеру једног познатог задатка израчунавања граничне вриједности, видимо да је могуће традиционални материјал из математичке анализе трансформисати у облик, уз удовољавањју захтијевима теорије и методике укрупљавања дидактичких јединица. Листа мисаоних активности, примјењених при раду са конкретним УДЈ, омогућава поновно стварање у процесу предавања важних својстава математичког истраживања. У закључку, напоменимо да способност састављања задатака (питања), варирањем компоненти датог задатка (питања) у зависности од конкретних математичких циљева, и осмишљавањем генерализација сматра се важним професионалним умјећем наставника независно од тога које се педагошке концепције он придржава. У другом примјеру, термини парност и непарност су генерализовани, што је омогућило даље уопштавање: увођење термина „функција класе ***S***„. Оставља се читаоцу да изврши провјере особина класе ***S***. У трећем примјеру појаказан је дидактички принцип „потпуност постављања питања“ .

5. Литература

коришчтена за припремање овог текста

[1] Андреев, В.И.: *Педагогика творческого саморазвития*. Казань, 1996.

[2] Бранислав Боричић: *О методу аналогије*; Настава математике (Београд), XLIII (4) (1998), 1-6.

[3] Маркова, А.К. и др.: *Формирование мотивации учения*. Математическое Просвещение, 1990.

[4] Марић, М.: *Неколико теорема о парним и непарним функцијама;* Настава математике и физике, XV-XVI (1966-1967), 103-107.

[5] Меньшикова, Е. А.: *О полноте систем упражнений по математическому анализу*; Ярославский педагогический вестник, 3-4 (2001)

[6] Подласый, И.П.: *Педагогика. Новый курс*: Учебник для студентов пед. вузов. В 2 кн. М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 2002. Кн. 1: *Общие основы. Процесс обучения.*

[7] Романо, Д.А.: *О генерализацији функцијских, парних, непартних и периодичних релација;* Bull.Soc.Math. Banja Luka 1(1994)

[7a] D.A.Romano: *Poopstenje parnih i neparnih relacija;* Math-Coll (Banja Luka), I(2)(1995)

[8] Ястребов А.В. *Об укрупнении дидактических единиц в преподавании математического анализа: асимптоты* ; Ярославский педагогический вестник, 1999, № 3-4, 179-184.

[8a] Ястребов А.В. *Об укрупнении дидактических единиц в преподавании математического анализа: первый замечательный предел;* Материалы конференции "Проблемы подготовки высококвалифицированных преподавателей математики", посвященной 65-летию со дня рождения профессора И.Д. Пехлецкого; 2003.

[9] Эрдниев П.М., Эрдниев Б.П. *Укрупнение дидактических единиц в обучении математике: кн. для учителя*. Математическое Просвещение, 1986.

[9a] Эрдниев П.М., Эрдниев Б.П. *Укрупнение дидактических единиц в обучении математике*; Математическое Просвещение, 1986.

[10] www.maa.org/t_and_l/sampler/research_sampler