**ISSN (p) 2303-4890, ISSN (o) 1986–518X** ***ISTRAŽIVANJE MATEMATIČKOG OBRAZOVANJA***
http://www.imvibl.org/dmbl/meso/imo/imo2.htm
**Vol. VII (2015), Broj 12,** 17-23
*Stručni rad*

# GEOMETRIJSKE PARADIGME KATHERINE HOUDEMENT I ALAINA KUZNIAKA

**Snježana Jovičić**

Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Pedagoški fakultert Bijeljina,
76300 Bijeljina, Semberski ratari b.b, B&H
e-mail: snjezanajovicic@hotmail.com

**Sažetak:** Potreba za razumijevanjem geometrije u savremenom svijetu je poželjna, upravo zbog toga nastava matematike treba prvo nastavnicima, a zatim i učenicima da obezbijedi kvalitetna znanja iz oblasti geometrije. U radu je pokazano kako studenti koji se školuju za nastavnike rješavaju jedan zadatak iz geometrije. Predstavljene su tri različite paradigme, koje su formulisali K. Houdement i A. Kuzniak, na koje je podijeljena elementarna geometrija, a to su : prirodna geometrija (Geometrija I), prirodna aksiomatska geometrija (Geometrija II) i formalističko aksiomatska geometrija(Geometrija III). Navedene paradigme su upoređene i suočene sa Van Hiele-ovim pristupom geometriji, što je predstavljeno tabelom 2.

Ključne riječi i fraze: *geometrija, paradigme*

**Abstract.** The need to understand the geometry of the modern world is desirable precisely because mathematics teaching should first teachers, and students and to provide quality knowledge in the field of geometry. It is shown that students who are studying for teachers solve one task geometry. Presented three different paradigms, which are formulated Houdement K. and A. Kuzniak, which is divided into elementary geometry, namely: natural geometry (Geometry I), natural axiomatic geometry (Geometry II) and formalistic axiomatic geometry (Geometry III) . Listed paradigms are compared and confronted with the Van Hiele's approach geometry, which is presented in table 2.

Key words and phrases: *geometry, paradigms*

Math. Subj. Classification (2010): 96G50
ZDM Subject Classification (2010): G10, G80

## 1. Uvod

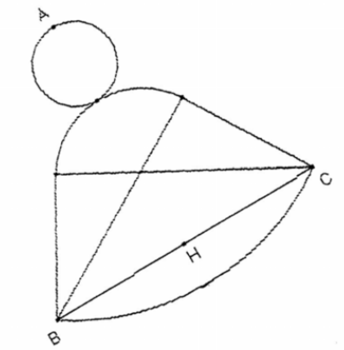
Tokom svog školovanja učenici se susreću sa različitim matematičkim svijetovima, najmanje sa numeričkim i geometrijskim. U svijetu brojeva, objekti tj. brojevi predstavljaju „apstraktne znakove“ koji dočaravaju količinu na koju se odnose. Nasuprot tome, u geometrijskom svijetu objekti često ostaju prostorni. I u stvari način je vrlo dug od pravog prostornog objekta do „figuralnog koncepta“ ( Fischbein, 1993).

Mnogi poznati istraživači, kao što je Van Hiele (1986), su bazirali pedagoški pristup geometrije na razvoj koncepcije figure i njegove obrade. Učenici shvataju da je globalni i perceptivni pristup jedan od strukturnih načina da spoznaju geometriju. Ključna tačka ovog razvoja je pojava dedukcije, koja omogućava prelaz sa „vidjeti u znati“ (Parzysz, 1988). K. Houdement i A. Kuzniak smatraju da je ovaj pristup geometriji u velikoj mjeri tačan, ali suviše strog, naročito zato što oni žele da razumiju prepreke koje postoje kod odraslih koji žele da postanu učitelji. Zaista, nekoliko mislioca je pokazalo iluzije naučnih koncepata iz matematike, a kulminacija tih konfliktnih pogleda istorije ideja je postignuta sa

Kunh-ovim radom. Za njega postoji naučna revolucija koja zamjenjuje stare paradigme sa novima.[1] K. Houdement i A. Kuzniak se vode tim radom, zadržavaju i razvijaju tu ideju različitih paradigmi za osnovnu geometriju. Prije nego što budu prikazane te paradigme, navešćemo primjer.

## 1. Ruen-ovo zvono

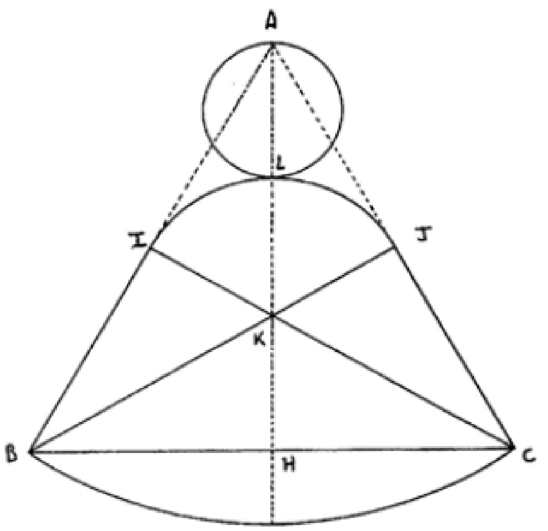
Problem je dat studentima koji se školuju za učitelje u Normandiji. Ovi studenti žele da postanu učitelji u osnovnoj školi, oni su završili studij, ali nisu nužno kompetentni u matematici.

<table>
<tr><td colspan="2">Zvono: Želimo da povećamo figuru (ABHC) u (A'B'H'C'), tako da dužina A'H' bude duplo veća od AB.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>1)Uradite ovo proširenje pomoću lenjira i kompasa. Ostavite linije gradnje vidljivima.<br><br>2)Neki učenici kažu da je područje finalne figure četiri puta veći od početne. Da li su u pravu? Opravdajte svoj odgovor.<br>Ako nisu u pravu, treba naći tačnu proporciju između dva područja.</td></tr>
</table>

Crtež dat na ispitu je napravljen sa CABRI[2], a studenti mogu da ga nacrtaju pomoću lenjira i kompasa na papiru.

### 1.1. Analiza figure

Hipoteze nisu eksplicitno date; učenici moraju naci svojstva potrebna za izgradnju u različitim skalama. Problem odmah zahtijeva perceptivnu analizu crteža, u prvom značenju zasnovan je na intuiciji odnosno shvatanju objekata putem vida. Ova intuicija se odnosi na prvu tipologiju geometrijskih objekata u zavisnosti od znanja pojedinosti koji se odvijaju u analizi. Neka nam je dat određen broj mogućih hipoteza. Neka I, J, K i L budu tačke na crtežu ispod ( nije dato na originalnoj slici) hipoteza. Neka I, J, K i L budu broj bodova u crtežu ispod (nije dato na originalnoj slici).

<table>
<tr><td>
</td><td>H1 A je na pravim linijama (BI) i (CJ)<br>H2 H je središte (BC)<br>H3 Uglovi IBC i JCB jednaki su 60°<br>H4 Uglovi BIC i CJB su pod pravim uglom<br>H5 Luk IJ je luk kruga centra K i radijus KI<br>H6 Krug prečnika AL i tangenta u L na luk IJ<br>H7 BC je luk kruga sa centrom A i radius AB.</td></tr>
</table>

[1] For the case of mathematics, see Gillies Ed (1992) *Revolutions in Mathematics*. Oxford University Press

[2] Maths sofware for students

### 1.2. Validnost/potvrđivanje

Kako se mogu potvrditi sve ove hipoteze? Susrećemo se sa dva nivoa koji se odnose na dva različita poimanja geometrije. U prvom nivou, dozvoljeno je koristiti mjerne alatke i eksperimentisati u razumnom svijetu. U drugom, obrazloženje se oslanja na matematičku osobinu apstraktnosti geometrijske figure. U osjetljivom svijetu sljedece alatke igraju glavnu ulogu: lenjir da provjeri kolinearnost, skup kvadrata (sa uglom od 90° i 60°) da provjeri mjeru uglova i kompas za potvrdu lukova krugova. U stvari, u posljednjem slučaju, korišćenje kompasa poništava H7: A nije centar luka od B do C, odgovarajući centar je središte segmenta AL.

U svijetu geometrijskih figura, imamo zajedničke konfiguracije kao jednakostranične trouglove, u ovom svijetu lenjir i kompas definišu skup figura, koji mogu biti izgrađeni. U osnovnoj školi ovaj skup nije baš veliki i daje važne informacije o odnosima u osnovi figura. U ovom primjeru, to dovodi do mišljenja da uglovi iznose 60° i da su krive u stvari lukovi krugova.

### 1.3. Konstukcija

Efektna konstukcija ovog crteža zavisi od alata koji se koristi. Ako zadržimo alate koji se koriste za provjeru hipoteze o uglovima i kolinearnosti, set kvadrata ima temeljnu ulogu. Zaista, lako je izgraditi zvono: nacrtati AH, onda normalna linija (AH) u H i prevući ugao od 60° datog kvadrata, i tako dobijemo jednakostranični trougao. U tom slučaju problem je riješen u homogenu paradigmu gdje svi uređaji djeluju u osjetljivom i svijetu mjerenja. To nazivamo prva paradigma, gdje je obrazloženje prirodno blizini iskustva i intuiciji: prirodna geometrija (Geometrija I).

Ali za ovu vježbu su nam bili potrebni lenjir i kompas. U tom slučaju, rezonovanje crteža nije dovoljno, moramo povezati brojke sa standardnim konstrukcijama koristeći matematičke osobine. Da bismo konstruisali, bilo bi neophodno sa se primjenjuje Talesova teorema ili svojstvo medijana u jednakostraničnom trouglu. Paradigma se promijenila i nova geometrija favorizuje različite načine rezonovanja i novu vrstu iskustva i intuicije. I mi ćemo ovu novu zvati prirodna aksiomatska geometrija. (Geometrija II)

U navedenom primjeru, razlika između paradigmi nije eksplicitna i izaziva neku vrstu nesporazuma. Problem je dat u Geometriji I i ono koji su dali test očekuju rješenje u Geometriji II. Ova razlika između dvije paradigme može biti ocigledna za stručnjaka, ali ne i za učenika, zato se smatra da je korisno da se objasni razlika između ove dvije geometrije, naročito za nastavnike, i zato su Katarina Houdment i Alain Kuzniak htjeli da pruže razumijevanje složenosti geometrija.

## 2. Tri geometrijske paradigme

U Francuskoj, termin geometrija je prisutan u svim programima matematike od vrtića i srednje škole, do univerziteta. Navedeno istraživanje ima za cilj da se bolje razumiju različita značenja determinisana istim terminom geometrija ( Houdement i Kuzniak, 2003). Oni su posmatrali samo elementarnu geometriju definisanu kao teorija prostora, koja teži da predstavi strukturne osobine realnog prostora. Njihovo istraživanje koristi dokaze tri različite paradigme, koje će biti predstavljene.

**1. Geometriju I** (Prirodna geometrija). Objeki Geometrije I su materijalni objekti, grafičke linije na listu papira ili virtuelne linije na ekranu računara, odnosno linije su uvijek doslijedne prikazu stvarnosti. Objekti iz prostora mogu biti shematizovani u mikro-prostor (Barthelot i Salin, 1998) mrežom linija. Izabrani grafički objekti su veoma pogodni da opišu stvarnost, otuda i sam naziv Prirodna geometrija za Geometriju I. U ovoj paradigmi tehnike za crtanje su one tehnike koje su najuobičajnije, kao što su: lenjir, trougao, presavijanje i rezanje itd. Za proizvodnju znanja u ovoj paradigmi sve metode su dozvoljene: dokazi, stvarna i virtuelna iskustva, i naravno rezonovanje. Dokazivanje je povezano sa realnošću, na primjer dinamički dokazi su prihvaćeni u ovoj geometriji. Svi pokreti između modela i stvarnosti su permanentni i omogućuju da se dokaže tvrdnja: najvažnija stvar je uvjeriti se. To je zapravo geometrija koja dominira u osnovnim školama, odnosno geometrija koja je zastupljena u nastavi nižih razreda.

**2. Geometrija II** ili Prirodno- aksiomatska geometrija (jedan model je Euklidova geometrija) zasnovana na hipotetičko deduktivnim zakonima koji se odnose na postavljanje aksioma koji su, koliko je god moguće, bliski čulnoj stvarnosti, odnosno intuiciji. Sistem aksioma može biti nedovršen, ali demonstracija unutar sistema je neophodna za napredak. U ovoj paradigmi tekst igra važnu ulogu, jer svi objekti treba da budu definisani tekstvom, crteži su jedino ilustracije, pratnja tekstualnih stavova. Ovo je nivo na kome bi trebalo da su predavači u osnovnoj školi.

**3. Geometrija III** ( Formalističko aksiomatska geometrija). U ovoj geometriji se „siječe" veza između stvarnosti i aksioma, aksiomi nisu više bazirani na intuiciji. Sistem aksioma ne mora da bude ni u kakvoj vezi sa stvarnošću. Način razmišljanja je isti kao u Geometriji II, ali sistem aksioma je potpun i nezavisan od stvarnosti. Jedini kriterijum istine je konzistentnost, odnosno odsustvo protivriječnosti. Osnovni princip je da su paradigme homogene, odnosno da može da se razumije neki princip unutar jedne paradigme, a da se ne razumije priroda druge.

U sljedećoj tabeli sumirani su različiti aspekti ove tri geometrijske paradigme.

| | **Geometrija I** (Prirodna geometrija) | **Geometrija II** (Prirodna aksiomatska geometrija) | **Geometrija III** (Formalističko aksiomatska geometrija) |
|---|---|---|---|
| Intuicija | Osjećaj, povezan sa percepcijom, obogaćen eksperimentom | Povezan sa figurama | Interni u matematici |
| Iskustvo | Povezano sa mjerenjem | Zasnovano na realnim šemama | Logičko |
| Dokaz | Blizak realnosti I povezan sa eksperimentom | Demonstracija zasnovana na aksiomama | Demonstracija na osnovu kompletnog sistema aksioma |
| Prostor | Intuitivni i fizički prostor | Fizički i geometrijski prostor | Euklidov prostor |
| Status crteža | Objekt proučavanja i objekt potvrđivanja | Podrška za rasuđivanje i "figuralni concept" | Šema iz teorijskog objekta, heuristički pribor |
| Povlaštena gledišta | Samo-dokazi i konstrukcija | Svojstva demonstracije | Demonstracija i odnosi između objekata. Struktura |

## 3. Uloga crteža kroz tri navedene paradigme

Razmotrićemo poznati problem izgradnje trougla kroz sve tri geometrijske paradigme. Ako su date njegove tri strane, na primjer dužine su 4cm, 8 cm i 10 cm. Ovaj problem može se dati mlađim učenicima, ako imaju više štapića različite dužine. Prvo prirodno rješenje odvija se unutar geometrije I.

Isti problem se može dati kasnije koristeći lenjir i kompas. Učenici stiču iskustvo u ravni i zadatak se postiže ako postoji trougao na stolu ili na papiru. Ako bliže pogledamo kombinaciju dužina, može se postaviti pitanje, da li se može nasrtati trougao čije su dužine stranica 4cm, 4cm i 10cm? Zašto je nemoguće nacrtati trougao tih dužina? U geometriji I zaključak može biti zasnovan na iskustvu, kojim će se riješiti pitanje: dužina strane je duža od zbira druge dvije. Prvo pitanje se odnosi na opšte pitanje postojanja trougla, zbog toga je potrebno da se uvede precizna definicija trougla. Opšti problem postojanja trougla sa svoje tri dužine možemo predstaviti ovako: Ako su A, B i C tri tačke u ravni, nejednakost $AB \leq AC + BC$ je uvijek istinita. Ovaj aksiom je polazna tačka u Geometriji II. Na ovaj način iskustvo u Geometriji I može dati smisao aksiomu u Geometriji II.

Druga interpretacija može biti ponuđena u Geometriji III i proizvesti Chasles-ovu teoremu (o sumi vektora): Ako su A, B i C tri tačke u ravni, tri vektora potvrđuju hipotezu $|AB| = |AC| + |CB|$. U ovom slučaju, navedena jednakost je posljedica matematičke analize u slučaju širokog spektra prostora i ne odnosi se na naš realni prostor. Ovakav fizički objekat, crtež trougla, nam dozvoljava različite vrste razmišljanja u zavisnosti od vrste pitanja, odnosno geometrijske paradigme, koja nam može pomoći pri odgovoru. Prva promjena paradigme, odlomak iz Geometrije I i Geometrije II je veoma osjetljiv, jer se po u prvi put u matematici mentalna perspektiva objekta drastično mijenja, bez vizuelne promjene i simbola.

## 4. Van Hiele-ovi nivoi i geometrijske paradigme

Da bismo pojasnili i produbili geometrijske paradigme korisno bi bilo da ih povežemo sa načinom na koji je geometriju vidio Van Hiele. Ukratko su predstavljeni Van Hiele-ovi nivoi ( Van Hiele, 1986):

Nivo 0, nivo vizuelizacije. Geometrijske figure se prepoznaju po svom obliku. Učenici mogu prepoznati geometrijske likove i uočiti njihove osobine, ali ih ne koriste za prepoznavanje i klasifikaciju. Oni uočavaju geometrijske objekte kao fizičke identitete, dakle uče geometriju samo u interakciji sa realnim objetima. Van Hiele govori o „prostornom razmišljanju".

Nivo 1, nivo analiziranja, opisni nivo. Učenici počinju da identifikuju osobine likova i uče kako da na pravilan način opišu povezanost osobina, ali ne prave veze između različitih oblika i njihovih osobina. Van Hiele govori o „geometrijskom prostornom razmišljanju".

Nivo 2, nivo neformalne dedukcije. Treći nivo je teoretski nivo gdje učenici spoznaju odnose među osobinama geometrijskih oblika i na osnovu toga odnose među samim geometrijskim oblicima. Za ovaj nivo potrebne su definicije, šta je potrebno, a šta dovoljno da se neki geometrijski lik opiše. Van Hiele govori o „matematičkom geometrijskom razmišljanju".

Nivo 3, nivo dedukcije. Ovaj nivo je logički formalan, proučavanje prirodnih odnosa između pojedinih teorema unutar aksiomatske teorije. Učenici su u mogućnosti da upotrebljavaju apstraktne i da izvode zaključke koji su zasnovani više na logici nego na intuiciji. Van Hiele govori o „logičkom matematičkom razmišljanju".

Nivo 4, strukturni novi. Na ovom nivou predviđene su različite aksiomatske strukture. Učenici su u mogućnosti da razumiju veze između sistema.

Van Hiele-ove nivoe možemo koristi i van svoje teorije, kako bi nam dali dobre pokazatelje o nivoima matematičkog razmišljanja učenika. U stvari, to nam daje drugačiji pogled, možda čak i lakše prepoznatljiv, kao što su intuicija, eksperiment, dedukcija.
Neophodno je napraviti razliku između učenika koji postupno otkrivaju geometriju od odraslih osoba koji bi trebalo da su savladali sve nivoe. Ako je on(ona) stručnjak za nju(njega), upotreba određenog nivoa zavisi od problema koji se rješava i paradigme u kojoj je problem moguće riješiti. Da bismo savladali geometrijske paradigme i Van Hiele-ove novoe mora da se shvati uzajamna veza, odnosno interakcija između ovih paradigmi. Kako izgleda ta interakcija biće predstavljeno sljedećom tabelom.

<table>
<tr><td></td><td>Geometrija I</td><td>Geometrija II</td><td>Geometrija III</td><td></td></tr>
<tr><td>Nivo 0<br>Vizuelizacija</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3">Empirijsko polje<br>(Intuicija i eksperiment)</td></tr>
<tr><td>Nivo 1<br>Analiza</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Nivo 2<br>Neformalna dedukcija</td><td colspan="2">Prelaz</td><td></td></tr>
<tr><td>Nivo 3<br>Dedukcija</td><td></td><td colspan="2">Prelaz</td><td rowspan="2">Teoretsko polje<br>(Dedukcija)</td></tr>
<tr><td>Nivo 4<br>Strukturni</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tehnološki horizont Formalni hotizont

Ovu tabelu treba više posmatrati kao dinamički plan rada procesa, nego kao fiksnu tačku gledišta. Neophodno je objasniti značenje svakog polja tabele. Na primjer, nivo 4 nije dio Geometrije II, a nivo 1 kada se javlja u Geometriji I,, to je neka vrsta veoma prefinjene geometrije, gdje alati razvijeni u Geometriji II opravdavaju empirijsko iskustvo Geometrije I. Zaista postoje apstraktna dešavanja u Geometriji I koja nisu prikazana u školama, ali koja su bila predmet radova kao što je Geometrografija ( Houdement i Kuzniak, 2002).

Primjećujemo značajnu razliku između geometrijskih paradigmi i Van Hiele-ovih nivoa. Van Hiele-ovi nivoi predstavljaju 'hijerarhiju razmišljanja' dok se u geometrijskim paradigmama Houdement i Kuzniak pokušava održati koherentnost i one su zasnovane na homogenim teorijama.

Geometrije nemaju iste dugoročne ciljeve, njihovi horizonti su različiti, tehnološki horizont Geometrije I i formalni horizont Geometrije III. Geometrija I integriše nivo 1 i 2, pripada empirijskom polju, to je osjetljiva geometrija koja sadrži intuiciju, eksperiment i dedukciju materijalnih objekata, to znači posmatra samo fizički aspekt objekata. Geometrija II sadrži nivo 3. U njen sastav ulaze dedukcija i aksiomatski sistem. Ali nivo 3 ostaje nivo prelaza. Za Geometriju II stvarnost ostaje važna. Geometrija III sadrži nivo 4. Stvarnost više nije važna. Ali za mnoge od nas, nasuprot Van Hiele-u, figurativne predstave mnogo pomažu u istraživanju geometrije. U Geometriji I stručnost ide u našoj tabeli odozgo na gole, od empirijskog ka teoriji. U Geometriji II ide odozdo na gore, i empirijsko polje javlja se kao heurističko sredstvo. U školi, privilegovani način (ono što je markirano sivo u tabeli) do napredne matematičke i geometrijske misli je onaj koji donose nivoi prelaza dati u tabeli.

## 5. Zaključak

Geometrijska znanja su veoma složena, ali su neophodna kako za učenike, tako i za nastavnike matematike. Zato i želimo ustanoviti koje su to poteškoće koje imaju učenici i nastavnici, i sta treba da se uradi kako bi se one prevazišle, radi što kvalitetnijeg obrazovanja iz geometrije u osnovnoj i srednjoj školi. Navedeni primjer Rouen-ovo zvono nam služi da vidimo kakve to poteškoće imaju ono koji se školuju za nastavnike matematike. Geometrijske paradigme su predstavljene kao osnove elementarne geometrije, koje mogu pomoći nastavnicima, a samim tim i učenicima. Predstavljena su dva prelaza, koji nisu iste prirode. Prvi prelaz od Geometrije I do Geometrije II se odnosi na prirodu predmeta i prostora, dok drugi od geometrije II do Geometrije III je više epistemiološkog karaktera. Prvi prelaz je svakako važniji za učenike osnovne škole, a nastavnici osnovne bi trebalo da su na drugoj paradigmi (Geometrija II), odnosno da su za jedan nivo više od učenika. Navedene geometrijske paradigme mogu biti veoma važne jer nastavnici mogu da razumiju unaprijed probleme i da prenesu kvalitetnija znanja učenicima. Tabela 2. nam nudi savjete za postupanje po znanju učenika, njom su predstavljeni i Van Hiele-ovi nivoi i geometrijske paradigme, kao dvije paradigme karakterističnih različitosti.

## Literatura:


[1] Brousseau, G. (1987). *Theory of Didactical Situations in Mathematics* (1970-1990). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[2] Chartier, G. (2002). Using "geometrical intuition" to learn linear algebra. In: Jarmila Novotná (ed.) *Proceedings of 2nd Conference of the European Soviety of Mathematics Education,* (pp. 533-541), Marianske Lazně, Czech Republic, Charles University, Faculty of Education, February 24 - 27, 2001, Prague: Charles University.

[3] Fischbein, E (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics,* 24(2), 139-162. Kluwer Academic Publishers.

[4] Houdement, C. and Kuzniak, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques,* 16(3), 289-322. Grenoble: La Pensée Sauvage.

[5] Houdement, C. and Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics* 40(3), 283-312.

[6] Houdement, C. and Kuzniak, A. (2002). Entre géométrie et mesure : le jeu de l'approximation. *Actes de la XIème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

[7] Houdement, C. and Kuzniak, A. (2003). Elementary Geometry Split into Different Geometrical Paradigms. In: Maria Alessandra Mariotti (ed.) *Proceedings of 3rd conference of the European Society for Mathematics Education,* (TG7, pp.1-10) 28 February 3 March 2003 in Bellaria, Italy

[8] Kuzniak, A. and Houdement, C. (2002). Pretty (good) didactical provocation as a tool for teachers' training in geometry. *Proceedings of CERME 2*, 292-304. Prague: Charles University.

[9] Kuzniak, A. and Rauscher, J. C.(2005). On the geometrical thinking of pre-service school teachers. In: Marianna Bosch (ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* (738-748), Sant Feliu de Guíxols, Spain – 17 - 21 February 2005

[10] Kuzniak, A., Gagatsis, A., Ludwig, M. and Marchini, C. (2007). From geometrical thinking to geometrical work. In: *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 955-962), Larnaca, Cyprus, 22-26 February 2007

[11] Parzysz, B. (1988). "Knowing vs Seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures. *Education Studies in Matematics*. 19(3), 79-92.

[12] Romano, D. A. (2009). Istraživanje matematičkog obrazovanja. *IMO, Broj* 1, 1-10.

[13] Romano, D. A. (2009). O geometrijskom mišljenju. *Nastava matematike*, LIV (2-3), 1-11.

[14] Rouandi, N. and Husni, N. (2014). Demonstration in Euclidean Geometry. *American International Journal of Social Science,* Vol. 3 No. 1., 130-138

[15] Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight. A theory of Mathematics Education*. Academic Press 1986. USA: Orlando.

Primljeno u redakciju 14.02.2015. Dostupno na internetu 23.02.2015.