

**PROBLEM RAZUMIJEVANJA VARIJANCE I KOVARIJANCE I POSTUPAKA
NJIHOVOG RAČUNANJA U PSIHOMETRIJI****Selman Repišti¹**

Sažetak: Matematičko obrazovanje je neizostavan dio studija psihologije, a naročito je bitno za pojedince koji će se baviti istraživačkim radom na ovom polju društvenih znanosti. Varijanca i kovarijanca su statistički koncepti važni, prije svega, u: analizi varijance, regresijskoj analizi, računanju koeficijenata pouzdanosti, kao i određivanju mjere variranja bruto rezultata u zadacima i cjelokupnom testu. Studenti psihologije nerijetko imaju poteškoća oko razumijevanja ovih pojmova, što se može poboljšati navođenjem praktičnih primjera u vidu pažljivo odabranih zadataka za vježbu i testove (provjere znanja). U ovom radu je navedena i kratka rasprava o statističkom rezoniranju.

Ključne riječi: psihometrija, mjerenje u psihologiji, varijanca, kovarijanca, testiranje.

Abstract: Mathematical education is essential for the study of psychology, and is especially important for individuals who will engage themselves in research work in this field of social sciences. The variance and covariance are statistical concepts which are important primarily in the analysis of variance, regression analysis, calculating reliability coefficients, as well as determining the extent of variation in the raw scores of the tasks and the overall test. Psychology students often have difficulties in understanding these concepts, which can be improved by providing practical examples in the form of carefully selected problems for exercise and for testing their knowledge. In this paper, it has also been given a short discussion about statistical reasoning.

Key words: psychometrics, measurement in psychology, variance, covariance, testing.

AMS Subject Classification (2010): 97B40, 97D50, 97D70, 97D80, 97K40, 97K80

ZDM Subject Classification (2010): B40, D50, D70, D80, K40, K80

Uvod

Na studiju psihologije se, pored ostalog, izučava tzv. *metodološka grupa predmeta*: statistika, metodologija psiholoških istraživanja i psihometrija [5]. Statistika u psihologiji traje dva semestra (u savremenim, bolonjskim programima, podijeljena je na Statistiku I i Statistiku II, odnosno ekvivalentne kolegije sa nešto drugačijim nazivima, ali sličnim kurikulumima). Ova grupa kolegija obuhvata teme koje se odnose na *deskriptivnu* statistiku (grafičko i tabelarno prikazivanje mjera centralne tendencije, varijabiliteta i sl.) i one koje se tiču *inferencijalne* statistike (statistike zaključivanja). Inferencijalna statistika odnosi se na:

- a) provjeravanje statističke značajnosti razlika u aritmetičkim sredinama između dvije grupe u vidu t-testova;
- b) ispitivanje statističke značajnosti razlika u aritmetičkim sredinama između više od dvije grupe na zavisnim varijablama, koje su pod uticajem određenih nezavisnih varijabli i njihovih interakcija

¹ Maršala Tita 31 / 2, 71000 Sarajevo, Bosna i Hercegovina, e-mail: selman9r@yahoo.com

(u prvom redu, izučavaju se jednofaktorska i dvofaktorska univarijatna analiza varijance-ANOVA);

- c) utvđivanje koeficijenata korelacije između dvije varijable, njihove značajnosti i pogreške prognoze u regresijskoj analizi.

Insistira se na usvajanju znanja iz *parametrijske* statistike, dok se *neparametrijska* većinom zanemaruje (izuzetak je χ^2 - test, koji je neizostavni dio statističke obrade podataka u frekvencijskim istraživačkim nacrtima).

Metodologija psiholoških istraživanja obično se izučava u dva dijela (sa pripadajućim nazivima kolegija): Metodologija eksperimentalne psihologije i Metodologija neeksperimentalne psihologije. Prvi dio se sastoji od usvajanja osnovnih koncepata metodologije (epistemologija nauke, vrste i nivoi mjerenja u psihologiji, Campbellova teorija mjerenja [v. 3], operacionalizacija, nezavisne i zavisne varijable, prediktori i kriteriji, vrste uzorka, sistematski i nesistematski faktori) i izučavanja različitih vrsta eksperimentalnih nacrti. Neeksperimentalna metodologija obuhvata: korelacijske nacрте (uz razmatranje medijatorskih, moderatorskih i supresorskih varijabli, te odnos korelacije i uzročno-posljedične veze) i kvalitativne tehnike (npr. analizu sadržaja i sekundarne građe). Prilikom izučavanja ovih kolegija, studenti shvataju da statistika dobija kontekst u kome se može primijeniti, odnosno dolaze do saznanja o njenoj praktičnoj upotrebljivosti.

Psihometrija se, u pravilu, izučava na drugoj godini studija psihologije. Može se odrediti kao problematika mjerenja u psihologiji, a objedinjuje statistička i metodološka znanja. Ova oblast je zanimljiva i zbilja relevantna u kontekstu društvenih procesa globalizacije, koji prije svega podrazumijevaju osmišljavanje efektivnih obrazovnih sistema, programa i treninga [12]. U okviru ovih edukacijskih razvojnih modela, nužno je razraditi instrumente praćenja i evaluacije sa adekvatnim *psihometrijskim karakteristikama*. Dakle, mjerenje u socijalnim znanostima mora biti objektivno, precizno i ponovljivo [3]. Njeno izučavanje odvija se u vidu dva jednosemestralna kolegija: Psihometrije I (Osnove psihološkog mjerenja/testiranja, odnosno, Uvod u psihometriju) i Psihometrije II. Teme koje se ovdje izučavaju su:

- osnove matričnog računa (ova saznanja su nužna za usvajanje kasnijih sadržaja predviđenih nastavnim planovima i programima);
- linearne kombinacije i transformacije (npr. pretvaranje ispitanikovog sirovog rezultata izraženog na T-skali /čija je aritmetička sredina $M = 50$, a standardna devijacija $s = 10$ / u rezultat izražen na skali devijacionih koeficijenata inteligencije /sa $M = 100$ i $s = 15$ / [11]);
- procjena pouzdanosti testova (najčešće preko: Cronbachovog α koeficijenta unutarnje konzistencije [7], KR-20 i KR-21 obrazaca, Spearman-Brownovog obrasca [1], te količnika varijance pravih i bruto rezultata u cjelokupnom testu);
- procjena objektivnosti testova (u vidu koeficijenata koji odražavaju stupanj slaganja među procjenjivačima [1] ili prostom inspekcijom testova od strane eksperata);
- procjena diskriminativnosti testova (vrši se na osnovu vrijednosti: koeficijenta point-biserijalne korelacije, biserijalne korelacije, tetrahoričnog koeficijenta, Φ -koeficijenta, koeficijenta kontingencije [4], indeksa diskriminativne valjanosti i Fergusonovog δ -koeficijenta);
- procjena sadržajne, kriterijske [v. 10] i konstruktne valjanosti testova (obuhvata sljedeće podteme: analizu sadržaja testova od strane stručnjaka, semiparcijalnu i parcijalnu korelaciju, ulogu i značaj standardiziranih regresijskih koeficijenata, procjenjivanje udjela objašnjene varijance kriterija na osnovu zajedničkog doprinosa seta kriterija, analizu glavnih komponenti /PCA/ i analizu zajedničkih faktora [8], multiosobinske-multimetodske matrice /MTMM/ [7]).

Petogodišnja praksa držanja privatnih instrukcija iz oblasti psihometrije i statistike, daje za pravo autoru ovog članka da zaključi kako je studentima psihometrija jedan od najtežih (ako ne i najteži) kolegija na studiju psihologije. Neposredno prije upisivanja studija na Odsjeku za psihologiju, uvjereni su da će "konačno" moći nastaviti obrazovanje bez matematike. Filozofski fakultet percipiraju kao visokoškolsku instituciju na kojoj nema prostora za izučavanje bilo kojeg aspekta ili discipline koja pripada području egzaktnih znanosti.

Na prvoj godini se izučavaju kolegiji koji su povezani sa neuroznanostima (Anatomija i fiziologija centralnog nervnog sistema, Biološka psihologija i Neuropsihologija), koji se, usljed njihove zanimljivosti i uvriježenog mišljenja da je psihologija "znanost o mozgu", prihvataju i usvajaju na relativno zadovoljavajući način. Međutim, kada se studenti susretnu sa statistikom, njihova očekivanja od studija bivaju vidno poljuljana. Istraživanje provedeno u Hrvatskoj [18] pokazuje da je učinak na testu iz statistike u pozitivnoj korelaciji sa percepcijom ustrajnosti i kompetentnosti kod

studenata, dok ne postoji statistički značajna korelacija rezultata na testu iz statistike sa generaliziranom samoefikasnošću i potrebom za spoznajom. Nakon što studenti uvide da je psihometrija još složenija materija, koja zahtijeva bar prosječna predznanja iz statistike, njihova anksioznost raste do te mjere da počinju tvrditi kako, kada polože psihometriju, mogu računati da su "završili" cijeli studij.

Tokom pružanja instrukcija iz psihometrije, autor je primijetio da su studentima najteži oni dijelovi koji se temelje na nešto iscrpnijem matricnom računu (npr. računanje β -pondera i koeficijenta multiple korelacije za slučaj kada imamo tri ili više neortogonalnih prediktora [15], kao i određivanje centroidnih faktora metodom jednostavne sumacije [8]).

Jedna od značajnih poteškoća vezana je za razumijevanje i primjenu pojma varijance i kovarijance. Ovo su elementarni statistički koncepti, bez čijeg razumijevanja se usvajanje budućeg, složenijeg gradiva može pretvoriti u puko memorisanje alfanumeričkog materijala i mehaničko rješavanje karakterističnih tipova zadataka na vježbama i provjerama znanja.

Ovdje ćemo, osim iznošenja teorijskog materijala i pripadajućih objašnjenja, izložiti i riješiti petnaest zadataka koji su tipični za pomenute oblasti.

Usvajanje pojma varijance

Prije svega, studente treba podučiti da prave razliku između konstanti i varijabli. Za *konstante* im se navode sljedeći primjeri: brzina svjetlosti, Avogadrov broj, neki broj a kojim dosljedno vrednujemo tačan rezultat na određenom zadatku u testu znanja, inteligencije (npr. za svako tačno rješenje dobiva se po jedan bod) i sl. *Varijable* trebaju shvatiti kao svojstva predmeta, ljudi i pojava kojima, s obzirom na njihovu učestalost, trajanje ili intenzitet možemo pripisati različite vrijednosti. Neke pojave imaju širi raspon variranja u odnosu na druge, te im je i varijanca (koja će kasnije biti objašnjena) veća. Tako npr. dob svih ljudi u populaciji više varira od dobi (godina) penzionera, a upotreba riječi engleskog jezika više varira kod izvornog govornika ovog jezika, nego kod osobe koja ga tek počinje učiti (zato što ova prva ima bogatiji vokabular). Još jedan primjer: ukoliko u nekom dijelu svijeta postoji pleme čiji pripadnici imaju samo nijanse braon i crne boje kose, variranje boje kose je kod njih manje, nego kod opšte populacije, gdje su moguće i nijanse plave i narandžaste boje.

U kontekstu psihološkog testiranja, veliku ulogu imaju *individualne razlike*, te ukoliko one ne postoje, testovi bi bili suvišni, a donošenje odluka o položaju nečijeg testnog skora ili o predviđanju njegovog ponašanja, u najmanju ruku besmislene [17].

U literaturi se *varijanica* najčešće definira kao kvadrirana standardna devijacija (1), a standardna devijacija nije ništa drugo do korijen iz kvadriranog odstupanja rezultata ispitanika od aritmetičke sredine, podijeljenog ukupnim brojem ispitanika (umanjenim za 1, ukoliko su uzorci mali). Iz navedenog proizilazi formula (2).

$$v = \sigma^2 \quad (1) \quad \text{ili} \quad v = \sum(x - M)^2 / N \quad (2)$$

Studenti psihologije i pedagogije trebaju izvesti zaključak da varijanica nikada ne može biti negativan broj, te da, što je veća, to znači da se može napraviti više razlikovanja među ispitanicima po mjerenom svojstvu (bila to depresivnost, psihoticizam, makijavelizam, savjesnost, uradak u testu koji mjeri verbalni aspekt inteligencije ili slično).

Varijanca je pojam relevantan za utvrđivanje osjetljivosti (diskriminativnosti) testa. *Diskriminativnost* je važna metrijska karakteristika svakog psihološkog instrumenta (skale, upitnika, inventara ličnosti, testova mentalnih sposobnosti...), a određuje se kao stupanj u kome je dati test u mogućnosti da razlikuje ispitanike po onoj dimenziji koju mjeri. Ukoliko je test prelagan, ili pretežak, njegova varijanica je niska (ili ga svi rješavaju gotovo u cijelosti, ili skoro svi postižu izrazito niske rezultate). Tako, visoku diskriminativnost u pravilu imaju testovi na kojima raspodjela bruto rezultata ispitanika poprima formu platikurtične (spljoštene) distribucije [11], za razliku od leptokurtične (izdužene), kod koje je varijabilitet manji u odnosu na normalnu krivulju [4].

Koncept kovarijance

U prirodi postoje mnoge pojave koje su međusobno povezane. Korelacija je, dakle, sukladno variranje nekoliko pojava. Tako je primijećeno da je prisutna određena povezanost (korelacija) između tjelesne težine i visine. Ona je visoka i *pozitivna*, što znači da, što je netko viši, možemo pretpostaviti

da je i njegova tjelesna težina viša. Možemo rezonirati i ovako: što je netko niži, to mu je i težina niža. Kako korelacija između pojava ne implicira uzročno-posljedični odnos između njih, moguće je i sljedeće tvrđenje: što je nečija težina viša, to mu je viša i visina. Za primjer *negativne* korelacije uzmimo depresivnost i zadovoljstvo životom. Što je netko više depresivan, to je manje zadovoljan životom. Ili, što je netko manje zadovoljan životom, vjerojatnije je da je depresivniji. Koeficijent korelacije je viši što je ovaj obrazac pravilniji i dosljedniji (u slučaju negativne korelacije, $r = -0.50$ je više nego $r = -0.30$). *Kovarijanca* je upravo mjera ovakve povezanosti, s tim što bismo rekli da je ona "korelacija" izračunata na bruto rezultatima, te samim tim nije standardizirana (tj. svedena na skalu ili raspon koji je dio određene konvencije među statističarima i preduslov za kompleksnije analize, usporedbe i povezanosti između rezultata na različitim mjernim skalama). Korelaciju shvatamo kao standardiziranu kovarijancu, a kovarijancu kao nestandardiziranu korelaciju, odnosno umnožak koeficijenta korelacije i standardnih devijacija razmatranih varijabli (3).

$$\text{cov}_{xy} = r \sigma_x \sigma_y \quad (3)$$

Zadatak 1. Izračunati kovarijancu između rezultata na testu inteligencije i ocjene iz matematike kod učenika četvrtog razreda srednje škole, ako je standardna devijacija primijenjenog testa inteligencije $\sigma_x = 15$, a školskih ocjena $\sigma_y = 0.83$, te korelacija između njih $r = 0.6$.

Rješenje: Uvrstiti vrijednosti u obrazac (3): $\text{cov}_{xy} = 0.60 \cdot 15 \cdot 0.83 = 7.47$.

U psihometriji se ističe važnost *kovarijancične matrice*, koja je po svojoj prirodi simetrična, a u čijoj su glavnoj dijagonali varijance testova (skala, subskala, varijabli, osobina, sposobnosti), a u gornjem i donjem trokutu njihove kovarijance. Kao istraživače, nekada nas zanima koliko je međusobno različitih kovarijanci među zadacima testa, odnosno, teorijski, koliko se razlikovanja može napraviti između njih [11]. To se računa po jednom od obrazaca u sklopu kombinatorike, koji se ovdje sastoji u utvrđivanju maksimalnog broja mogućih različitih parova zadataka, čiji je ukupan broj u nekom testu jednak k (4).

$$N_{\text{cov}} = k(k-1) / 2 \quad (4)$$

Naravno, po istom obrascu se računa i broj mogućih korelacija među ovim zadacima.

Zadatak 2. Izračunati broj različitih kovarijanci u testu koji se sastoji od deset zadataka binarnog tipa. Koliko je broj različitih korelacija između prvih četiri zadataka?

Rješenje: U prvom dijelu zadatka, studenti trebaju zanemariti podatak "binarnog tipa", jer je on ovdje u ulozi distraktora koji ih treba zbuniti, ukoliko nisu naučili kako se jednostavno računa broj kovarijanci, odnosno korelacija. Nakon toga, uvrštavaju broj zadataka ($k = 10$) u obrazac (4): $N_{\text{cov}} = 10(10-1) / 2 = 45$.

U drugom dijelu zadatka, trebaju zanemariti pojam "prva", jer je svejedno koji su zadaci u pitanju (prva četiri, srednja četiri ili posljednja četiri). Jedini važan podatak je da ih je četiri, s obzirom da rezultat u ovoj formuli zavisi jedino od parametra k : $N_{\text{corr}} = 4(4-1) / 2 = 6$.

Varijanca i kovarijanca u kontekstu linearnih transformacija i kombinacija

Prilikom dodavanja neke konstante a rezultatima ispitanika (npr. za svako tačno rješenje bilo kojeg zadatka, učenicima se na već osvojeni jedan bod pribroji još jedan, kao i onima koji nisu tačno riješili zadatak, kako bi se nagradio pokušaj njegovog rješavanja), dolazi do povećanja aritmetičke sredine datog zadatka za tu konstantu. Ukoliko dođe do oduzimanja konstante (npr. svakom studentu se oduzme određeni broj bodova za neki zadatak, zato što su na raspolaganju imali više vremena od predviđenog za njegovo rješavanje), i aritmetička sredina zadatka se smanji za istu vrijednost.

Ovi zaključci su studentima relativno shvatljivi. Međutim, kada im se kaže da prilikom dodavanja i oduzimanja konstante standardna devijacija i varijanca ostaju neizmijenjene, onda to postaje problem. U tom slučaju im se predoči dokaz koji se sastoji u uvrštavanju novih vrijednosti bruto rezultata ispitanika u formulu za izračunavanje standardne devijacije, tako da se rezultati izraze preko starih. Dokaz za neizmijenjenu varijancu ne mora im se posebno predočavati, ukoliko se prisjete jednog od prethodnih obrazaca (1).

Prilikom množenja i dijeljenja konstantom a , dolazi do promjene vrijednosti standardne devijacije i varijance. Predoči im se dokaz za promjenu standardne devijacije (gdje ona naposljetku biva uvećana a puta, odnosno $\sigma' = a \cdot \sigma$), a potom ih se podsjeti da za novu varijancu kvadriraju ne samo standardnu devijaciju, već i vrijednost konstante (5)

$$v' = (a \cdot \sigma)^2 = a^2 \cdot v \quad (5)$$

Da bi shvatili dijeljenje konstantom, ono im se predstavi kao logična veza sa postupkom množenja konstantom, samo što se u ovom slučaju upotrebljava druga operacija.

Zadatak 3. Test se sastoji od pet zadataka jednake varijance ($V_i = 4$), koji su međusobno u zanemarljivim ($r \approx 0$) korelacijama. Ako se za svako tačno rješenje zadatka dobija po tri boda, a za netačno nula, odredite varijancu svakog zadatka, njegovu standardnu devijaciju i varijancu cijelog testa. Koliko iznosi suma kovarijanci između zadataka?

Rješenje: Ovdje treba vidjeti da je u pitanju množenje konstantom 3. Za tačno rješenje bi bilo: $1 \cdot 3 = 3$, a za netačno $0 \cdot 3 = 0$. Stoga:

- varijanca svakog pojedinačnog zadatka je: $V_z = 3^2 \cdot V_i = 9 \cdot 4 = 36$
- standardna devijacija u ovom slučaju iznosi: $\sigma_z = \sqrt{36} = 6$
- test se sastoji od pet, međusobno nekoreliranih zadataka iste varijance, te je ukupna varijanca: $V_u = 5 \cdot V_z = 180$
- suma kovarijanci iznosi nula, zato što nema korelacije među zadacima.

Računanje varijance rezultata na testu (tj. ukupne varijance) u zadatku br. 3 predstavlja primjer diferencijalno ponderirane aditivne linearne kombinacije. Razmatranje o kovarijanci postaje značajno u slučaju da između zadataka u nekom testu postoji određena korelacija. Ukoliko ne primjenjujemo množenje ili dijeljenje konstantom, riječ je o *jednostavnim aditivnim ili suptraktivnim linearnim kombinacijama*, a ukoliko to činimo, u pitanju su *diferencijalno ponderirane aditivne ili suptraktivne linearne kombinacije* [11]. U slučaju da se ne množi, odnosno ne dijeli konstantom, za računanje ukupne varijance primjenjujemo obrazac (6), a ukoliko uključimo konstantu, koristimo obrazac (7).

$$V_u = \sum V_i + 2 \sum r_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (6)$$

$$V_u = \sum V_i a_i^2 + 2 \sum r_{ij} \sigma_i \sigma_j a_i a_j \quad (7)$$

Autor ovog članka je utvrdio da studentima ovi odnosi postaju jasniji kada se odmah uvede neki zadatak, na osnovu koga im se objasni praktični smisao obrazaca (6) i (7).

Zadatak 4. Kolika je varijanca testa koji služi za ispitivanje psihomotornih sposobnosti, ako varijanca svakog od dvanaest zadataka iznosi 2, a prosječna korelacija među zadacima 0.3? Kolika je ukupna varijanca ako svaki tačno urađen zadatak bodujemo sa 5, a netačan sa nula bodova?

Rješenje: U prvom dijelu zadatka je riječ o jednostavnoj aditivnoj linearnoj kombinaciji, a u drugom o diferencijalno ponderiranoj aditivnoj linearnoj kombinaciji. Treba odmah primijetiti da su varijance zadataka jednake, te da nam ne trebaju standardne devijacije za računanje kovarijanci, jer je njihov proizvod jednak varijanci zadatka ($\sigma_i \cdot \sigma_j = 2$). Također, broj kovarijanci je jednak $12(12-1) / 2 = 66$.

Prvi dio zadatka: $V_u = 12 \cdot 2 + 2 \cdot 66 \cdot 0.3 \cdot 2 = 103.2$

Drugi dio zadatka se svodi na množenje konstantom, odnosno njenim kvadratom:

$$V_u' = 12 \cdot 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 66 \cdot 0.3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2580 \text{ ili } V_u' = V_u \cdot 5^2 = 2580.$$

Relativno jednostavna vrsta zadatka, koja studentima ipak može stvoriti probleme (jer predstavlja transfer znanja na područje matrične algebre) je izračunavanje varijance i kovarijance iz kovarijancične matrice. Jednostavno, zbroje se sve vrijednosti i dobije se ukupna varijanca testa. Kovarijanca se dobija kada se saberu vrijednosti njenog gornjeg, odnosno donjeg trokuta.

Zadatak 5. Data je kovarijancična matrica između četiri čestice (ajtema) skale koja mjeri ekstraverziju. Izračunati ukupnu varijancu ovog dijela skale koji se sastoji od četiri ajtema (oni su: društven, komunikativan, vedar i dominantan; u zaglavlju matrice su redom date pripadajuće skraćenice).

$$\mathbf{E} = \begin{array}{c|cccc} & \text{Dr} & \text{Ko} & \text{Ve} & \text{Do} \\ \hline \text{Dr} & 0.579 & 0.379 & 0.246 & 0.178 \\ \text{Ko} & 0.379 & 0.765 & 0.384 & 0.314 \\ \text{Ve} & 0.246 & 0.384 & 0.684 & 0.241 \\ \text{Do} & 0.178 & 0.314 & 0.241 & 1.019 \end{array}$$

Rješenje: Ovaj zadatak možemo riješiti na dva načina:

I način: Saberemo sve vrijednosti u matrici: $V_u = \sum e_{ij} = 0.579 + 0.379 + \dots + 0.241 + 1.019 = 6.531$;

II način: Koristimo formulu za računanje ukupne varijance: $V_u = \sum V_i + 2 \sum r_{ij} \sigma_i \sigma_j = \sum V_i$ (glavna dijagonala) + $2 \sum \text{cov}_{ij}$ (gornji i donji trokut) = $3.047 + 2 \cdot 1.742 = 6.531$.

Varijanca i računanje indikatora pouzdanosti

Pouzdanost testa definirana je kao njegova *preciznost* mjerenja, odnosno dosljednost i stabilnost dobivenih rezultata ispitanika u vremenu. Pouzdanost je uvjet za validnost testova, što joj svakako povećava značaj u mjerenju u psihologiji. Po klasičnoj testnoj teoriji (CTT), bruto (sirovi) rezultat ispitanika bi se mogao razložiti na *pravi* rezultat (istinski rezultat koji bi ispitanik postigao da je test maksimalno pouzdan) i dio rezultata koji je pod utjecajem *pogreške* [1], [3]. Drugačije rečeno, varijanca bruto rezultata jednaka je zbroju varijance pravog rezultata i varijance pogreške (8). Jedna od formulacija koeficijenta pouzdanosti (r_{tt}) je da je on jednak udjelu varijance pravih rezultata u varijanci bruto rezultata (9).

$$(\sigma_B)^2 = (\sigma_T)^2 + (\sigma_E)^2 \quad (8)$$

$$r_{tt} = (\sigma_T)^2 / (\sigma_B)^2 \quad (9)$$

Za kompletno izvođenje ovih formula, u kontekstu računanja pogreške mjerenja, vidjeti [3].

Zadatak 6. Ako je standardna devijacija bruto rezultata na nekom testu 9, a pravih rezultata 8, koliko iznosi pouzdanost tog testa?

Rješenje: Jednostavnim uvrštavanjem u obrazac (9), dobijamo: $r_{tt} = 8^2 / 9^2 = 0.79$.

Zadatak 7. Ako je varijanca pogreške 1, a varijanca bruto rezultata 5, koliki je koeficijent pouzdanosti?

Rješenje: Kako nemamo varijancu pravih rezultata, moramo je izraziti preko varijance bruto rezultata i pogreške, na osnovu obrasca (8): $(\sigma_T)^2 = (\sigma_B)^2 - (\sigma_E)^2$, te uvrstiti u obrazac (9): $r_{tt} = (\sigma_T)^2 / (\sigma_B)^2 = ((\sigma_B)^2 - (\sigma_E)^2) / (\sigma_B)^2 = 1 - ((\sigma_E)^2 / (\sigma_B)^2) = 1 - (1/5) = 0.8$.

U psihološkim istraživanjima, pouzdanost se najčešće izražava preko Cronbachovog alpha koeficijenta unutarnje konzistencije (10):

$$\alpha = (k / (k-1)) \cdot [1 - (\sum V_i / V_u)] \quad (10)$$

gdje je k – broj zadataka, pitanja, tvrdnji, ajtema u testu, $\sum V_i$ – zbroj varijanci zadataka, V_u – ukupna varijanca testa.

Zadatak 8. Na osnovu matrice iz zadatka br. 5 izračunati Cronbachov alpha koeficijent.

Rješenje: Broj ajtema je četiri, varijanca zadataka je zbroj vrijednosti u glavnoj dijagonali matrice, a V_u je ukupna varijanca. Prema tome: $\alpha = (4 / (4-1)) \cdot [1 - (3.047 / 6.531)] = 0.71$. S obzirom da je u pitanju test ličnosti (tačnije, skala ekstraverzije), te da ga čine samo četiri tvrdnje, u psihologiji se smatra da je u ovom slučaju veličina koeficijenta α zadovoljavajuća. Ovaj koeficijent daje informaciju o procentu zajedničke varijance između pravih i bruto rezultata (71%). Korjenovanjem koeficijenta pouzdanosti dobiva se indeks pouzdanosti, koji govori o veličini korelacije između pravih i bruto rezultata (r_{xT}).

Procenat objašnjene varijance u regresijskoj analizi

Ukoliko kvadriramo koeficijent korelacije, dobivamo koeficijent determinacije (r^2). Ako ga pomnožimo sa 100, dolazimo do procenta zajedničke varijance dvije varijable, odnosno objašnjene varijance za dati regresijski model [9]. Tako, npr. ukoliko je povezanost između depresivnosti i anksioznosti $r = 0.60$, možemo utvrditi da one dijele $0.60^2 \cdot 100 = 36\%$ varijance. Ako kvadriramo koeficijent multiple korelacije, dobivamo koeficijent multiple determinacije (R^2), koji nam govori koji udio varijance kriterija objašnjavaju svi prediktori uzeti zajedno. Ako su prediktori međusobno ortogonalni, ovaj koeficijent se dobiva zbrajanjem koeficijenata determinacije za svaki prediktor (11):

$$R^2 = \sum r_{iy}^2 = r_{1y}^2 + r_{2y}^2 + \dots + r_{py}^2 \quad (11)$$

gdje je r_{iy} korelacija između prediktora i i kriterija y , a p broj prediktora.

Ukoliko su prediktori u međusobnim korelacijama, koristimo obrazac dat u općem obliku:

$$R^2 = (\sum r_{iy}^2 - 2 \sum r_{ij} r_{iy} r_{jy}) / (1 - \sum r_{ij}^2) \quad (12)$$

gdje je r_{ij} korelacija između dva prediktora, a ostale oznake su iste kao u (11).

Kao što možemo zapaziti, brojnik razlomka u obrascu (12) podsjeća na obrazac (6), na šta treba upozoriti studente, kako bi mogli ostvariti adekvatan transfer znanja na naizgled različite problemske zadatke.

Zadatak 9. Povezanost srednjoškolske ocjene iz fizike i ocjene iz matematike je 0.5. Korelacija između uspjeha na studiju elektrotehnike i ocjene iz fizike je 0.4, a između ocjene iz matematike i uspjeha na studiju 0.45. Koliki procenat varijance uspjeha na studiju elektrotehnike objašnjavaju ocjene iz fizike i matematike zajedno?

Rješenje: Studenti prvo trebaju uočiti da imaju dva prediktora (srednjoškolske ocjene iz fizike i matematike) i jedan kriterij (uspjeh na studiju elektrotehnike). Također, trebaju primijetiti da su prediktori u međusobnoj korelaciji. Nakon toga, vrijednosti se uvrštavaju u obrazac (12): $R^2 = (0.4^2 + 0.45^2 - 2 \cdot 0.4 \cdot 0.45 \cdot 0.5) / (1 - 0.5^2) = 0.24$. To znači da ovi prediktori objašnjavaju 24 % varijance kriterija.

Varijanca u kontekstu faktorske analize

Faktorska analiza se u psihologiji koristi kako bismo utvrdili *konstruktnu* (hipotetičku) valjanost naših testova, odnosno njihov pravi predmet mjerenja. Najveću primjenu nalazi u utvrđivanju strukture ličnosti i inteligencije [8]. Dakle, veliki broj *manifestnih varijabli* (čestica testa, indikatora nekih osobina) pokušavamo svesti na što manje *latentnih varijabli* (dimenzija), koje objašnjavaju što više varijance manifestnih varijabli.

Tipičan primjer iz psihologije može biti situacija u kojoj istraživač osmisli nekoliko tvrdnji (stavki, čestica, pitanja, indikatora), za koje pretpostavlja (shodno dostupnim definicijama i teorijskim modelima) da mjere crtu ličnosti poznatu kao neuroticizam. Ovdje su tvrdnje manifestne varijable, a neuroticizam bi bio pretpostavljena latentna varijabla (dimenzija). Drugi primjer je osmišljavanje nekoliko zadataka (pitanja), čiji bi sadržaj trebao upućivati na ispitivanje perceptivnog faktora inteligencije. Ovdje su zadaci manifestne varijable, a perceptivni faktor (P) hipotetizirana latentna varijabla (ili konstrukt). Ukoliko se faktorskom analizom ispostavi da ove tvrdnje, odnosno zadaci

mjere ono što se očekuje da mjere, onda kažemo da testovi koji se sastoje od njih imaju dobru hipotetičku valjanost.

Povezanosti manifestnih varijabli sa ekstrahiranim dimenzijama nazivaju se *faktorske saturacije* (zasićenja). One nam govore u kojoj mjeri su odabrani indikatori (pitanja, čestice) dobri reprezentanti latentne dimenzije (npr. koliko dobro pitanje: "Da li često osjećate krivicu bez vidljivog razloga?" mjeri neuroticizam kao crtu ličnosti). Ukoliko se po svakom faktoru (dimenziji) ove saturacije kvadriraju, pa saberu, dobijaju se karakteristični korijenovi (λ). Ako se karakteristični korijen odgovarajućeg faktora podijeli sa brojem manifestnih varijabli, te pomnoži sa 100, dobiva se procenat objašnjene varijance za dati faktor (13).

$$\% \text{ var.} = \sum r_{iF_n}^2 = [(r_{1F_n}^2 + r_{2F_n}^2 + \dots + r_{kF_n}^2) / k] \cdot 100 \quad (13)$$

Procenat objašnjene varijance je bitan u psihologiji, jer nam govori koje latentne varijable trebamo zadržati, a koje odbaciti. Naprimjer, ako se faktorskom analizom skupa tvrdnji za koje se pretpostavlja da mjere neke aspekte ličnosti izdvoji deset latentnih varijabli, s obzirom na određene kriterije (npr. Kaiser-Guttmanov kriterij: zadržati one varijable za koje je $\lambda > 1$), možemo zadržati, recimo, samo prvih pet. Drugim riječima, one koje objašnjavaju dovoljno varijance odabranih tvrdnji, s obzirom na odabrani kriterij.

Zadatak 10. Pretpostavimo da smo proveli faktorsku analizu pet zadataka iz određenog testa inteligencije i ekstrahirali dva faktora: numerički i verbalni. Faktorske saturacije su date u matrici faktorske strukture. Koji procenat varijance manifestnih varijabli objašnjava numerički faktor?

manif. var.	numerički f.	verbalni f.
1. zad.	0.800	0.100
2. zad.	0.750	0.150
3. zad.	0.700	0.180
4. zad.	0.200	0.850
5. zad.	0.120	0.760

Rješenje: % objašnjene varijance = $[(0.8^2 + 0.75^2 + 0.7^2 + 0.2^2 + 0.12^2) / 5] \cdot 100 = 0.349 \cdot 100 = > 34.9$ % varijance. Dakle, ukupni udio numeričkog faktora u ovih pet zadataka je nešto više od jedne trećine. Ostali dio varijance zadataka objašnjen je verbalnim faktorom i drugim specifičnim faktorima koji nam u ovom slučaju ne moraju biti bitni (jer je njihov doprinos zanemarljivo mali).

Ukoliko se traži procenat varijance koju ekstrahirani faktori objašnjavaju u nekom zadatku, kvadriraju se saturacije zadataka tim faktorima, te saberu (što se naziva komunalitet), pa se tako dobiveni rezultat pomnoži sa 100. Kada se varijanca svake tvrdnje standardizira, ona iznosi $V = 1$. Ta varijanca se može rastaviti na komunalitet (h^2) i unikvitet (u^2) (14). Komunalitet govori o udjelu zajedničkih faktora u varijanci zadatka [1], a unikvitet obuhvata onaj specifični dio varijance svake manifestne varijable (specificitet- s^2) i pogrešku (e^2) (15).

$$1 = h^2 + u^2 \quad (14)$$

$$u^2 = s^2 + e^2 \quad (15)$$

Komunalitet je u psihometriji bitan zato što govori o udjelu izdvojenih latentnih dimenzija u pojedinoj tvrdnji (zadatku). Ukoliko izdvojimo nekoliko dimenzija koje u određenoj čestici imaju mali udio, onda bi značilo da tu česticu (indikator, tvrdnju) trebamo izbaciti iz testa (ili psihološke skale), jer ona mjeri neki drugi faktor (osobinu, psihološki konstrukt) koji nam nije važan u datom razmatranju.

Inače, komunalitet je donja granica pouzdanosti date manifestne varijable ($r_{tt} \geq h^2$), a ukoliko mu se probroji specificitet, dobija se egzaktna pouzdanost pomenute varijable ($r_{tt} = h^2 + s^2$). Pouzdanost (relijabilnost) je važna metrijska karakteristika svakog psihološkog testa i zanimljivo je da se može procijeniti i na ovaj način. Studenti se trebaju potaći da naprave paralelu između razmatranja o koeficijentu pouzdanosti na osnovu obrazaca (8) i (9) i u kontekstu komunaliteta i specificiteta.

Zadatak 11. Koliku varijancu trećeg zadatka objašnjavaju verbalni i numerički faktor? Koliki je unikvititet varijable, a koliki specificitet, ako uzmemo da je varijanca pogreške 0.1?

Rješenje: % obj. var. 3. zad. = $(0.7^2 + 0.18^2) \cdot 100 = 0.52 \cdot 100 \Rightarrow 52\%$. Ostalo je neobjašnjeno 48% varijance, od čega, kako je zadato, na grešku otpada 10%. Dakle, na specificitet otpada 38 %, prema tome, $s^2 = 0.38$. Dakle, važno je da student razumije kako je specifičnim faktorima objašnjeno 38% varijance trećeg zadatka, dakle, on je zasićen još nekim faktorom koji prethodno nismo uzeli u obzir. Također, poželjno je da udio pogreške bude što manji.

Analiza varijance i prosječni kvadrati

ANOVA je skup postupaka (algoritama) koji predstavljaju možda najvažniju primjenu koncepta varijance. U proceduri ANOVA-e, varijabilitet zavisne varijable se razlaže na varijancu koja se može pripisati djelovanju nezavisne varijable i na rezidualnu varijancu, odnosno varijancu pogreške [5].

Varijance se ovdje zovu prosječni kvadrati (eng. *Mean Square*) i obilježavaju MS. Tako u jednofaktorskoj univarijantnoj ANOVA-i imamo MS_{bg} (varijancu između grupa) i MS_{wg} (varijancu unutar grupa). Cilj nam je da ova prva nekoliko puta nadmaši drugu, tako da vrijednost F-testa pređe određenu graničnu vrijednost, čime ćemo konstatovati prisutnost statistički značajnih razlika među grupama. MS se izračunava kao omjer sume kvadrata i stupnjeva slobode, a o cijelom postupku više u [4], [11] i [13]. Kod dvofaktorske univarijantne analize varijance, računamo prosječne kvadrate (varijancu) za svaku nezavisnu varijablu, njihovu interakciju i rezidual (pogrešku). Potom provodimo tri pripadajuća F-testa. U slučaju da želimo uraditi ANOVA-u za ponovljena mjerenja, npr. kod istih ispitanika koji su podvrgnuti trima vrstama tretmana glavobolje, u tom slučaju operiramo sa pojmovima prosječni kvadrat tretmana (MS_{tr}) i prosječni kvadrat reziduala (MS_{rez}). Njihov omjer bi trebao biti što veći (tj. veći od granične vrijednosti), da bismo mogli tvrditi kako postoji statistički značajna razlika u učinkovitosti različitih tretmana koji su primijenjeni u ovoj vrsti istraživanja.

Analiza varijance se u psihologiji najčešće koristi u sljedećim slučajevima:

a) uspoređivanje nekoliko skupina od kojih je svaka bila podvrgnuta različitom psihoterapijskom tretmanu (geštalt, psihoanalitičkom, kognitivno-bihevioralnom...), s obzirom na učinke (efekte) koje su imali od psihoterapije (nezavisna varijabla bi imala onoliko nivoa koliko je vrsta tretmana, a zavisna varijabla su efekti terapije);

b) uspoređivanje nekoliko skupina različitog spola i dobi (mlađi, odrasli, stariji) po rezultatu na skali socijalne prilagodbe (ovdje imamo dvije nezavisne varijable- spol i dob, te jednu zavisnu varijablu: rezultat na skali socijalne prilagodbe);

c) uspoređivanje istih sudionika istraživanja koji su u različitim vremenskim točkama podvrgnuti različitim eksperimentalnim tretmanima (primjer iz psihologije percepcije: dvadeset sudionika je u prvoj eksperimentalnoj situaciji bilo izloženo podražajima neutralnog tipa, u drugoj stimulusima koji izazivaju strah, u trećoj podražajima koji potiču bijes, a u četvrtoj stimulusima koji izazivaju tugu; pa se ispitalo postoje li statistički značajne razlike u fiziološkim parametrima sudionika s obzirom na izloženost različitim stimulusima).

Studenti većinom nisu u stanju povezati koncept varijance koji su učili iz deskriptivne statistike sa prosječnim kvadratima sa kojima se susreću u inferencijalnoj statistici. Jedan od razloga je što oni imaju različite oznake, pa to zna biti zbunjujuće. Zato im je na početku izučavanja postupka analize varijance najbolje predočiti sljedeću jednakost [4], koju smo nešto modificirali u didaktičke svrhe (16):

$$MS = SS / df = v = s^2 = \sum(x - M)^2 / N \quad (16)$$

Zadatak 12. Istraživanje je provedeno u cilju provjeravanja da li se studenti pet fakulteta razlikuju u izraženosti potrebe za moći. Npr. očekivano je da studenti sa medicinskog fakulteta pokažu veću potrebu za moći nego, recimo, studenti filozofskog fakulteta. Podaci su uneseni u program *SPSS for Win* i dobiven je ispis iz procedure ANOVA-e. Neke vrijednosti u tabeli su izostavljene. Dopuniti tabelu i odgovoriti na pitanje: kolika je varijanca unutar grupa?

izvor varijabiliteta	SS	df	MS	F	p
između grupa	5.241	4	?	?	.011
unutar grupa	89.503	?	0.391		
total	94.744	233			

Rješenje: Ovo je tipičan zadatak na testovima iz kolegija *Statistika u psihologiji*. Ono što se očekuje od studenta je savladana teorijska osnova vezana za izračunavanje F-testa. Nakon toga, treba identificirati redoslijed rješavanja zadatka, odnosno izračunavanja nedostajućih vrijednosti. Prvo treba dopuniti MS_{bg} (varijabilitet između grupa), koji je jednak sumi kvadrata (SS_{bg}) podijeljenoj sa stupnjevim slobode (df_{bg}), a što je vidljivo iz obrasca (16): $MS_{bg} = SS_{bg} / df_{bg} = 5.241 / 4 = 1.310$.

Drugi nedostajući podatak tiče se stupnjeva slobode unutar grupa (df_{wg}), što se lako izvodi iz obrasca (16): $df_{wg} = SS_{wg} / MS_{wg} = 89.503 / 0.391 = 229$. Inače, stupnjevi slobode se ovdje mogu izračunati i kao razlika df_{tot} i df_{bg} : $df_{wg} = 233 - 4 = 229$.

Bez prvog podatka ne bismo mogli izračunati F-omjer: $F = MS_{bg} / MS_{wg} = 1.310 / 0.391 = 3.352$.

Naposlijetku, varijanca unutar grupa iznosi (očitalamo iz tablice): $v_{wg} = MS_{wg} = 0.391$.

Važan koncept moderne statistike (pa i psihometrije) je *veličina efekta* (eng. *effect size*), koja bi se, pored standardnih statističkih indikatora, trebala navesti u prikazu rezultata psiholoških istraživanja [16]. U analizi varijance, ona obuhvata proporciju varijance zavisne varijable objašnjene pojedinačnim izvorima variranja (npr. faktorom A, faktorom B ili njihovom interakcijom u dvofaktorskoj ANOVA-i) u istraživačkom nacrtu [14]. Pri izvođenju statističkih i praktičnih zaključaka, studenti psihologije često miješaju pojam statističke značajnosti i veličine efekta. Tako, često kažu da je razlika među skupinama "značajnija" (pritom misleći, veća) ukoliko je kao nivo značajnosti odabrana vrijednost 0.01, nego u slučaju 0.05. Međutim, o veličini (magnitudi) razlike u prosječnim rezultatima između grupa, zaključuje se na osnovu veličine efekta, a ne odabranog nivoa značajnosti!

U slučaju ANOVA-e, kao indikator veličine efekta, može se računati tzv. eta-koeficijent koji predstavlja omjer sume kvadrata (SS) datog izvora variranja i sume kvadrata ukupnog izvora variranja. Za jednofaktorsku ANOVA-u, to je omjer sume kvadrata između grupa i ukupne sume kvadrata (17):

$$\eta^2 = SS_{bg} / SS_{tot} \quad (17)$$

Zadatak 13. Na osnovu tabele iz zadatka br. 12 procijeniti veličinu efekta nezavisne varijable "fakultet" na zavisnu varijablu (tj. na varijabilnost rezultata na skali koja mjeri potrebu za moći).

Rješenje: U obrazac uvrštavamo podatke iz kolone SS, odnosno računamo omjer sume kvadrata između grupa i sume kvadrata totala: $\eta^2 = SS_{bg} / SS_{tot} = 5.241 / 94.744 = 0.055$. To znači da ovaj faktor objašnjava oko 5.5 % varijance zavisne varijable, što spada u red srednje veličine efekta. Dakle, ovdje je bitan način procjene veličine efekta i njegova veličina (visina eta-koeficijenta), koja determinira kasnije izvođenje zaključaka u konkretnom psihološkom istraživanju.

Ukoliko je u ANOVA-u uključeno više od jedne nezavisne varijable, možemo procijeniti pojedinačne veličine efekata, preko parcijaliziranih eta-kvadrata (η_p^2). Ovi koeficijenti govore o procentu objašnjene varijance zavisne varijable svakim pojedinačnim izvorom variranja, kada se kontrolira efekat ostalih sistematskih izvora variranja u eksperimentalnom dizajnu [15]. Parcijalizirana eta na kvadrat može se npr. računati za fakultet (faktor A), spol (faktor B) i njihovu interakciju (A x B) u dvosmjernoj analizi varijance. Obrazac predstavlja omjer sume kvadrata za dati faktor (ili interakciju) i zbroja suma kvadrata za taj faktor i pogrešku (18):

$$\eta_p^2 = SS_F / (SS_F + SS_{error}) \quad (18)$$

gdje je SS_F suma kvadrata za datu nezavisnu varijablu (faktor), a SS_{error} suma kvadrata pogreške, odnosno suma kvadrata unutar grupa (SS_{wg}).

Razumijevanje ovog postupka je nešto kompliciranije, ali, ukoliko studenti savladaju koncept dvosmjernje analize varijance, te postupke izračunavanja koji se u okviru nje koriste, onda shvatanje obrasca (18) nije toliki problem. Dakle, za parcijalni efekat, suma kvadrata za promatrani faktor (nezavisnu varijablu) bi trebala što više biti veća od pogreške (SS_{error}).

Zadatak 14. Procijeniti procenat varijance potrebe za moći koju možemo pripisati spolu i interakciji fakulteta i spola na osnovu ispisa iz ANOVA-e u vidu tabele.

izvor variranja	SS	df	MS	F	p
fakultet	3.996	4	0.999	2.568	0.039
spol	0.169	1	0.169	0.434	0.511
fakultet x spol	1.916	4	0.479	1.231	0.299
pogreška	86.364	222	0.389		
total	92.445	231			

Rješenje: Prvo ćemo procijeniti varijancu koju objašnjava spol (faktor B): $\eta_p^2 = SS_B / (SS_B + SS_{\text{error}}) = 0.169 / (0.169 + 86.364) = 0.002 \Rightarrow$ spol objašnjava 0.2 % varijance potrebe za moći. Ova veličina efekta je niža od preporučenog minimuma.

Potom računamo doprinos interakcije fakulteta i spola (A x B): $\eta_p^2 = SS_{AxB} / (SS_{AxB} + SS_{\text{error}}) = 1.916 / (1.916 + 86.364) = 0.022 \Rightarrow$ 2.2 % varijance otpada na interakciju. $\eta_p^2 = 0.022$ spada u red niskih veličina efekta.

Studente treba poticati da eta-koeficijente tumače onako kako se to radi sa koeficijentima determinacije, te ih informirati o referentnim vrijednostima veličine efekta, sa čijom usporedbom se dolazi do zaključka da li je on slab, osrednji ili visok.

Varijanca i kovarijanca dihotomnih zadataka (stavki)

Ukoliko imamo zadatak (pitanje, tvrdnju) u kome postoje dvije opcije: tačna i pogrešna, "da" i "ne", "slažem se" i "ne slažem" itd., riječ je o dihotomnim (binarnim) stavkama. Ovaj format stavki se pojavljuje relativno često u kontekstu psiholoških testova. Npr. Eysenckov upitnik ličnosti (EPQ) i njegove ravidirane verzije, sadrži pitanja dihotomnog formata. Također, uspješno riješen zadatak u testovima inteligencije se najčešće vrednuje jednim bodom, a netočno riješenom zadatku se pripisuje nula bodova. U kontekstu konstrukcije testova znanja, katkad se točno rješenje ponderira s obzirom na težinu problema (zadatka, pitanja), čime dolazi do povećavanja varijance i kovarijanca. Ukoliko imamo pitanja za koja postoji dovoljno velika vjerojatnoća da se odgovore ispravno i slučajnim pogađanjem, učenicima (studentima, ispitanicima) se mogu oduzimati bodovi za pogrešna rješenja. Zbog svega navedenog, varijanca i kovarijanca dihotomnih zadataka zauzima posebno mjesto pri konstrukciji psiholoških testova različite namjene.

Pretpostavimo da na pitanje: "Da li podržavate eutanaziju?" 50 ispitanika odgovara sa DA, a 150 sa NE. To bi značilo da je naš broj ostvarenih razlikovanja (BOR) [v. 11] između njih $50 \cdot 150 = 7500$. Varijanca se u ovom slučaju računa kao umnožak udjela onih koji su zaokružili opciju "da" i onih koji su odgovorili sa "ne". Prvi udio ćemo nazvati p , a drugi q . Tako je $p = 50 / (50 + 150) = 50 / 200 = 0.25$. Udio onih koji su protiv eutanazije je: $q = 150 / 200 = 0.75$. Primjećujemo da je zbroj ovih udjela jednak 1, jer je, na neki način, riječ o standardiziranim vrijednostima na ograničen raspon (od nula od jedan).

Drugi primjer može biti rješavanje zadatka na testu iz statistike i vjerovatnoće. Npr. 30 studenata određeni zadatak rješava tačno, a 60 netačno. U ovom slučaju, $p = 30 / (30 + 60) = 0.33$, a $q = 1 - 0.33 = 0.67$. Ovaj primjer je relevantan za psihometriju, a u tom slučaju p zovemo *indeks lakoće zadatka*, a q *indeks njegove težine*. Aritmetička sredina zadatka je upravo jednaka njegovom indeksu lakoće, a varijanca umnošku indeksa lakoće i težine [11] (19). U slučaju cijelog testa, aritmetička sredina je aditivna linearna kombinacija indeksa lakoće zadataka, a varijanca se izračunava kao zbroj sume umnožaka indeksa lakoće i težine i dvostruke kovarijanca (koja je jednaka umnošku koeficijenta korelacije i korjenovanih umnožaka indeksa lakoće i težine) (20).

$$v = p \cdot q \quad (19)$$

$$V_u = \sum p_i q_i + 2 \sum r_{ij} \sqrt{p_i q_i} \cdot \sqrt{p_j q_j} \quad (20)$$

Studenti trebaju uočiti da je (20) ništa drugo do poseban slučaj obrasca (6), odnosno njegova primjena na zadatke binarnog tipa. Naravno standardne devijacije su izražene kao korijen iz umnoška indeksa lakoće i težine.

Zadatak 15. U testu znanja iz psihometrije, za svaki od 12 zadataka se za tačan odgovor dobija jedan, a za netačan nula bodova. Također, pretpostavimo da svaki zadatak, od ukupno 80 studenata, tačno rješava njih 25. Izračunata je i prosječna korelacija između zadataka, koja iznosi $r = 0.25$. Kolika je varijanca, a kolika standardna devijacija ovog testa? Kolika bi bila varijanca testa kada bi se za tačno rješenje dobivalo po tri, a za netačno po nula bodova?

Rješenje: Prvo što studenti trebaju uvidjeti je da nemaju eksplicitno datu varijancu svakog zadatka, kao što je to bio slučaj u zadatku br. 4. Nadalje, trebaju uočiti da je riječ o binarnim varijablama (zadatak je ili riješen tačno ili netačno, odnosno dobija se ili 1 bod ili nula). Poslije toga, trebaju izračunati indeks lakoće zadataka (u ovom slučaju su indeksi lakoće svih zadataka jednaki): $p = 25 / 80 = 0.31$. Indeks težine se dobiva na sljedeći način: $q = 1 - p = 0.69$.

Sljedeći korak je računanje varijance zadatka pomoću obrasca (19): $v = p \cdot q = 0.214$.

Zadate i dobivene vrijednosti uvrstavamo u obrazac (20), gdje je važno primijetiti da su standardne devijacije svih zadataka jednake, pa je umnožak korijenova $\sqrt{p_i q_i} \cdot \sqrt{p_j q_j}$ za svaki par kovarijanci jednak varijanci koju smo već izračunali:

$$V_u = 12 \cdot 0.214 + 2 \cdot (12 \cdot 11 / 2) \cdot 0.25 \cdot 0.214 = 2.568 + 7.062 = 9.63.$$

Standardna devijacija iznosi $s_u = \sqrt{V_u} = 3.10$.

U slučaju da se tačna rješenja boduju s tri boda, opet dolazimo do množenja konstantom, pa možemo odmah pisati: $V_u' = 9.63 \cdot 3^2 = 86.67$.

Nekoliko napomena o statističkom rezoniranju

Jedan od ciljeva kolegija koji pokrivaju psihološku metodologiju je da kod studenata izgrade statističko-metodološki obrazac prilaženja problemima vlastite struke i sa njom povezanih oblasti. Ovaj obrazac je kamen-temeljac znanstvenom razmišljanju i pristupu, a nužan je pogotovo za one studente koji će se u svom daljem radu baviti istraživačkom djelatnošću.

U skladu sa suvremenim metodama nastave statistike, predavači i asistenti su dužni da kod svojih studenata pokušaju razviti statističku pismenost (deklarativno, proceduralno i konceptualno znanje ove oblasti), usko vezanu za statističko rezoniranje, odnosno mišljenje [6]. Proceduralne odrednice rješavanja zadataka iz ovog područja primijenjene matematike, trebale bi se eksplicitno podučavati, na adekvatnim primjerima. Studenti bi prvo trebali identificirati ključne elemente postavke zadatka, kako bi aktivirali "misaona oruđa" koja su im potrebna u postupku njegovog rješavanja. Potom, definirati generalnu strategiju rješavanja i njene pojedinačne korake, koji će u konačnici dovesti do tačnog rješenja [2]. U okviru ovog pristupa problemu, važno je pronaći njegov smisao i značenje, te ga povezati sa prethodno stečenim znanjima i iskustvom u rješavanju drugih zadataka sličnog sadržaja. Bitno je i svakog trenutka biti svjestan šta i koliko toga nedostaje do uspješnog finaliziranja zadatka [2].

U kontekstu mjera varijabilnosti, potrebno je koncipirati nastavu tako da studenti ne samo steknu saznanja o tome kako se rješavaju zadaci sa predavanja/vježbi, već i kako primijeniti novostečena znanja i vještine na tumačenje nalaza istraživačkih članaka. Također, i na životne situacije, koliko je to moguće, a svakako je poželjno s obzirom da je riječ o društvenim znanostima (psihologija, pedagogija, sociologija...). Ovakva primjena znanja je u psihologiji poznata kao pozitivni transfer, a ukoliko je efikasna, svjedoči o dobroj iskustvenoj i praktičnoj (kontekstualnoj) inteligenciji.

Zaključna razmatranja

Kao što smo mogli vidjeti, pojmovi varijance i kovarijance imaju široku primjenu u psihološkim istraživanjima, ali i u psihološkom testiranju. Metrijske karakteristike testova zavise od veličina koje, pored ostalog, zahtijevaju izračunavanje varijance i/ili kovarijance. Danas su ova

izračunavanja velikim dijelom olakšana upotrebom kompjutorskih statističkih paketa, ali znanja o upotrebi ovih paketa ne garantiraju nužno razumijevanje pomenutih koncepata.

U ovom radu je prikazano i 15 tipičnih zadataka, koji su dio provjera znanja (polusestrialnih i završnih ispita) iz oblasti statistike i psihometrije na psihologiji. Ono što bih preporučio je da nastavnici i asistenti koji sastavljaju testove uključe, u okviru svakog računskog zadatka, i pitanje otvorenog tipa, koje bi bilo dobar indikator razumijevanja i kapaciteta studenta za primjenu dobivenog rezultata (nalaza) u stvarnom, psihološkom kontekstu. Drugim riječima, za zaključivanje, koje bi objedinjavalo metodološka, statistička i užestručna znanja iz oblasti u okviru koje je problem (zadatak) i postavljen.

Već na prvim predavanjima i vježbama iz statističkih kolegija, studentima je tokom tematske jedinice koja pokriva mjere varijabiliteta, potrebno objasniti koliki je značaj varijance. Također, to treba naglašavati tokom predavanja narednih tematskih cjelina, uz inzistiranje na povezivanju novih sa prethodnim saznanjima (čime se smanjuje tendencija ka učenju napamet). Na prvom predavanju koje bude pokrivalo oblast korelacije i regresije, potrebno je uvesti pojam kovarijance i razmotriti njen odnos sa korelacijom, te napraviti distinkciju u odnosu na pojam varijance. Na početku kolegija koji pokrivaju područje psihometrije, nužno je podsjetiti studente na ova dva pojma i njihovo računanje, jer je nemoguće pratiti dalje gradivo ukoliko oni još uvijek nisu usvojeni. Mnoge teme iz kolegija koji se odnose na primjenu *multivarijantnih statističkih postupaka* u psihologiji (pretežno se izučavaju na poslijediplomskom studiju, premda u nekim slučajevima na diplomskom, pa čak i na dodiplomskom), također zahtijevaju znanja o objašnjenju varijanci i njenoj dekompoziciji na nekoliko dijelova u zavisnosti od istraživačkog dizajna i samih odnosa među razmatranim varijablama.

Upravo su navedeni određeni savjeti, koje ne treba shvatiti kao imperativ, već razmisliti o njima i, ukoliko nastavnik/suradnik prepozna da su od koristi, može ih primijeniti u svojoj pedagoškoj praksi. Naravno, u opticaju su i drugi sistemi podučavanja statistike i psihometrije, koji mogu polučiti jednake, a možda i bolje rezultate nego predložene metode.

Literatura

- [1] A. Bukvić: *Načela izrade psiholoških testova*; Zavod za udžbenike, Beograd, 2007.
- [2] C. Carvalho: *Solving Strategies in Statistical Tasks*, European Research in Mathematics Education III, 1-9.
- [3] N. K. Chadha: *Applied Psychometry*; SAGE Publications India, New Delhi, 2009.
- [4] Č. Dragičević: *Statistika za psihologe sa zbirkom zadataka*; Centar za primenjenu psihologiju, Beograd, 2005.
- [5] N. Đapo i R. Đokić: *Statistika u psihologiji: priručnik za studente*; Filozofski fakultet u Sarajevu, Sarajevo, 2012.
- [6] A. Eichler: *The Impact of a Typical Classroom Practice on Students' Statistical Knowledge*; CERME 5 (2007), 722-731.
- [7] S. Fajgelj: *Psihometrija: metod i teorija psihološkog merenja*; Centar za primenjenu psihologiju, Beograd, 2005.
- [8] A. Fulgosi: *Faktorska analiza*; Školska knjiga, Zagreb, 1988.
- [9] K. Košmelj: *Uporabna statistika*; Biotehniška fakulteta, Ljubljana, 2007.
- [10] A. Krković, K. Momirović i B. Petz: *Odabrana poglavlja iz psihometrije i neparametrijske statistike*; Društvo psihologa Hrvatske i RZZ SRH, Zagreb, 1966.
- [11] D. Ljubotina i A. Kulenović: *Zbirka zadataka iz psihometrije s pregledom osnovnih formula*; Odsjek za psihologiju, Zagreb, 1997.
- [12] W. Stout and ETS: *Psychometrics: From Practice to Theory and Back*; Psychometrika, LXVII (2002), no. 4, 485-518.
- [13] B. Petz: *Osnovne statističke metode za nematematičare*; Naklada Slap, Jastrebarsko, 2004.
- [14] J. T. Richardson: *Eta squared and partial eta squared as a measures of effect size in educational research*; Educational Research Review, (2011), br. 6, 135-147.
- [15] L. Tenjović: *Statistika u psihologiji- priručnik*; Centar za primenjenu psihologiju, Beograd, 2000.
- [16] L. Tenjović i S. Smederevac: *Mala reforma u statističkoj analizi podataka u psihologiji: malo p nije dovoljno, potrebna je i veličina efekta*; Primenjena psihologija, (2011), br. 4, 317-333.
- [17] S. Urbina: *Essentials of Psychological Testing*; John Wiley & Sons, New Jersey, 2004.
- [18] I. Vlahek: *Samoeфикаsnost, potreba za spoznajom i učinak na testu iz statistike* (diplomski rad); Odsjek za psihologiju Filozofskog fakulteta, Zagreb, 2008.

Pristiglo u redakciju 10.08.2012, revidirana verzija 22.11.2012;
dostupno na internetu od 03.12.2012