

Matematičko modelovanje u osnovnoj školi¹

Ivana Stjepanović²

Sažetak: U ovom radu izložit ćemo specifičnosti matematičkog modelovanja u osnovnoj školi. Prije toga ćemo, naravno, govoriti o samom pojmu modelovanja i o njegovoj kompleksnosti. Osnovna pitanja na kojima se bazira ovaj rad su: „Šta je matematičko modelovanje?, Primjena modelovanja?, Kako razumjeti matematičko modelovanje?, Matematičko modelovanje u osnovnoj školi?“ Prilikom pisanja ovog rada oslonili smo se na mišljenja drugih autora koji su se također bavili ovom problematikom i dali doprinos u istraživanju matematičkog modelovanja.

Ključne riječi: matematičko modelovanje, matematičko obrazovanje, matematičko modelovanje u osnovnoj školi

Abstract: In this seminary we will expose specificity of mathematics modelling in primary school. Before that we will, of course, talk about concept of modelling and his complexity. Basic questions on which this work is based are: „What is mathematical modelling?, Applying models?, How to understand mathematical modelling?, Mathematical modelling in primary school?“ During the work on this seminary, we align on opinion of other authors who also were in this problem and gave their contribution on the research of mathematical modelling.

Key words and phrases: mathematical modelling, mathematical education and mathematical modelling in primary school

AMS Subject Classification (2011): **97D40, 97M10**

ZDM Subject Classification (2011): **D40, M10**

Uvod

Matematičko modelovanje je širok pojam i sastavni je dio matematičkog obrazovanja (što znači da je matematičko obrazovanje kompleksniji pojam). Analizirajući radove mnogih matematičara koji su se bavili matematičkim modelovanjem, stičem utisak da se matematičko modelovanje primjenjuje u osnovnoj, srednjoj školi i na fakultetima.

Međutim, primjena matematičkog modelovanja u našem školskom sistemu je na nezavidnom nivou. Veliki matematičari svijeta pokušavaju da uvedu modelovanje u nastavu matematike i povodom toga organizuju brojne kurseve. Međutim, zbog kompleksnosti matematičkog modelovanja teško je osposobiti nekoga da stvara matematičke modele, jer je to veoma složen proces koji je teško objašnjiv. U ovom radu upravo ćemo govoriti nešto više o matematičkom modelovanju u osnovnoj školi. Pri tome će nam pomoći istraživanja mnogih matematičara koji svojim radom doprinose da matematičko modelovanje uđe u okvire nastavnih planova i programa matematike u osnovnim školama.

Šta je matematičko modelovanje?

Matematičko modelovanje je veoma složen sistem, pa tako postoji i mnogo definicija koje o njemu govore. Jedna od najprihvatljivijih definicije jeste da je matematičko modelovanje proces izgradnje modela, idući od stvarne situacije do stvarnog modela, odnosno, bilo koji način spajanja

¹ Rad je preuređen moj seminarski rad koji sam radila u okvirima predmeta 'Metodika matematičkog modelovanja' na Pedagoškom fakultetu u Bijeljini školske 2011/12 godine.

² Pedagoški fakultet Bilejina, 76300 Bijeljina, Semberskih ratara bb., Bosna i Hercegovina

stvarnog (Marković, Z., 2011). Da bi se vršilo matematičko modelovanje polazi se od neke realne situacija (svakodnevne situacije, učenicima dostupne i poznate), a potom se ta situacija pomoću matematičkog jezika pretvara u matematičku situaciju, a pomoću odgovarajućeg modela se traži rješenje situacije (problema). Znači da je uloga modela (modelovanja) za rješavanje problema od presudnog značaja.

Primjena modelovnja

Matematičko modelovanje se primjenjuje u matematičkom obrazovanju. Cilj ovog jeste pomagati učenicima da usavrše modelovanje, a samim tim da rješavaju postavljene zadatke. Zbog toga možemo zaključiti da je modelovanje obavezno. Različiti autori navode da se modelovanje primjenjuje na različitim uzrasnim grupama. Neki ističu da je najbolje modelovanje koristiti od najmanjeg školskog uzrasta (Milinković, D.), dok drugi ističu da modelovanje treba primjenjivati na starijim uzrasnim grupama (Barbosa, J.C., 2006.).

Za primjenu modelovanja neophodno je uzeti u obzir djecu starijeg uzrasta, jer su mnogo spremnija i kompatibilnija za razumjevanje modelovanja te primjenu istog u praksi.

Pod modelovanjem podrazumijevamo stvaranje novih modela za rješavanje zadataka, što podrazumijeva stvaranje modela od strane učenika, u isto vrijeme stvaranje modela od nastavnika i drugih odraslih ljudi. Najpogodnije „tlo“ za razvoj modelovanje jeste upravo školski sistem. Postoji veliki broj matematičara koji se bave modelovanjem, stvaraju nove modele, ali te iste modele primjenjuju u školstvu (što se opet odnosi na školski sistem). Da nema modelovanja, matematika bi se odnosila samo na mehaničku manipulaciju beznačajnih simbola, što govori da je primjena modelovanja u školstvu od višestrukog značaja.

Kako razumjeti matematičko modelovanje?

„Upuštajući se u matematičko modelovanje djeca identifikuju osnovne matematičke strukture kompleksnih fenomena“ (James J. Watters, Lyn English, and Sue Mahoney (2000).).

Proučavajući ovu definiciju dolazimo da zaključka da je matematičko modelovanje složen proces, i da bi neko proučavao matematičko modelovanje i stvarao modele potrebno je da ima određeni fond znanja, jer je nemoguće početi učiti složene elemente, a da prije toga nisu naučeni prosti elementi (npr. nemoguće je početi učiti složene matematičke funkcije, a da prije toga nemamo znanja o pojmu broja i koordinatnog sistema).

Složene sisteme (modelovanje), učenici ne mogu proučavati površinski, već se moraju dobro fokusirati na modelovanje i koristeći prethodno znanje i iskustvo, koristiti novi model.

Matematičko modelovanje u osnovnoj školi

Prateći zahtjeve, istraživanja i dostignuća u savremenoj metodici, svjesna aktivnost učenika u nastavi čini osnovu uspješnog učenja matematike. U tu svrhu neophodna je primjena modelsko-problemskog pristupa koji se zasniva na otkrivanju i primjeni teorijskih modela u praktičnim modelima. Postoji veliki broj matematičara koji potenciraju primjenu matematičkog modelovanja u osnovnoj školi (djece uzrasta od 8 godina), među tim matematičarima su i

James J. Watters, Lyn English, and Sue Mahoney (2000). Oni smataju da osnove matematičkog modelovanja treba primjenjivati kod djece mlađeg školskog uzrasta, ali i kod starijih učenika.

Jerome Bruner (1960), tvrdi: „Svaka ideja se može predstaviti pošteno i korisno u misaonoj formi djece školskog uzrasta, a te predstave kasnije mnogu olakšati na osnovu ranijeg stečenog znanja.“ Koristeći ovo ranije stečeno znanje studentima-učenicima je lakše da tumače složene situacije iz oblasti modelovanja. Samo modelovanje iziskuje veću aktivnost, jer učenici izvlače iz problema određene podatke i koristeći složene misaone procese stvaraju modele. Napomenuli smo da modelovanje trebaju primjenjivati i nastavnici. Za modelovanje u osnovnoj školi neophodno je znanje nastavnika iz ove oblasti da bi učenici shvatili modelovanje i bili u mogućnosti da stvaraju nove modele.

Da bi učenici shvatili modelovanje potrebno je da nastavnik kod učenika razvije posebne vještine, a to su (James J. Watters, Lyn English, and Sue Mahoney (2000).):

1. tumačenje matematičke i naučne informacije date u obliku teksta ili dijagrama,
2. čitanje jednostavnih tabelarnih podataka,

3. prikupljanje, analiziranje i predstavljanje podataka,
4. pripremanje pisanih izvještaja iz analize podataka,
5. rad u grupi na podacima,
6. stvarati modele sa vršnjacima putem verbalnih i pisanih izvještaja

Kada govorimo o prvoj vještini bitno je napomenuti da se učenicima daju zadaci iz realnog svijeta, tj. podaci koji su njima poznati. Ovo je posebno važno kod djece mlađeg školskog uzrasta, jer će učenici mnogo lakše prihvatiti podatke koji su njima poznati i razumljivi, nego podatke koji su im nepoznati (npr. podatke o nekoj životinji ili o poznatim likovima iz crtanih filmova).

Kada govorimo o drugoj i trećoj vještini, ona podrazumjeva čitanje i analizu problema, što zahtjeva angažovanje misaonih procesa.

Autori rada „*Modelsko-problemski pristup u nastavi matematike*“, Petrović, N., Mrđa, M., Kovačević P., u svom radu navode da je potrebno da se utvrde odgovarajuće strukture za pripremu i obradu nastavne jedinice. Ovaj rad nam nudi i bliže određenje matematičko-kibernetičkog modela (spada u apstraktni model). Spomenuti matematičko – kibernetički model pomoću matematičko-logičkih simbola i relacija predstavlja stvarnost sa drugih aspekata i pomaže njenom razumjevanju u daljem proučavanju.

Osnovne faze matematičko-kibernetičkog modelovanja su:

1. određivanje originala,
2. analiza originala,
3. odluka o uvođenju modela,
4. izgradnja informacione baze za modelovanje,
5. definisanje modela,
6. ispitivanje na modelu,
7. prenos informacija sa modela na original,
8. verifikacija dobijenih informacija na originalu,
9. modifikacija modela.

Nakon određivanja originala i njegove analize, pristupa se otkrivanju osnovnih informacija o originalu. Ako dalje direktno ispitivanje originala nije dovoljno efikasno, potrebno je odlučiti se za uvođenje modela. Tu nastupa faza izgradnje informacione baze za modelovanje, gdje se sakupljaju neophodne informacije o originalu uz pomoć skupa matematičkih i logičkih relacija. Definisanje modela predstavlja najvažniju etapu u ovom procesu stvaranja modela, dakle vezan je sam izbor modela. Slijedi ispitivanje modela, što prati i njegovu praktičnu primjenu, na njemu se primjenjuju zakonitosti u oblasti modela, te se tako ispitivanje modela svodi na matematičko-logičke objekte, relacije i operacije.

Informacije koje se pri tome dobiju potrebno je transformisati na original, a zatim i verifikovati.

Za nastavu matematike u osnovnoj školi neosporan je značaj modelovanja. Za one učenike koji su savladali i usvojili određeni model, može se reći da lakše i brže usvajaju nova znanja, spretniji su i bolje se snalaze u različitim problemskim situacijama, imaju veću motivaciju za rad i sigurniji su pri samom davanju odgovora i izlaganju svojih znanja. Možemo se složiti sa stavom i mišljenjem profesora N. Petrovića koji smatra da ne možemo od učenika najmlađeg školskog uzrasta tražiti i očekivati da stvaraju i primjenjuju nove modele, ali od učenika osnovne škole možemo očekivati da istražuju, analiziraju, proučavaju zadatke (probleme), da na tom putu traganja za rješenjem postavljaju hipoteze, da ih provjeravaju i procjenjuju. Krajnje do čega učenici mogu doći na taj način je neobično ili naizgled nemoguće rješenje.

Ovakav rad učenika je nazvan stvaralački rad, kada učenici na primjerima primjenjuju svoje ranije stečeno znanje, iskustvo, aktivnosti, ulažu napore da osmisle način i dođu do rješenja problema. Stvaralački rad ne podrazumijeva davanje učenicima gotovih modela za rad, to bi zapravo značilo „gušenje“ i „potiskivanje“ učenčkih ideja i njihovog stvaralaštva, a uvođenje surovog i običnog ponavljanja prethodno učenog gradiva, ne podstičući pritom misaoni razvoj učenika.

Didaktičari smatraju da je veoma teško obučiti učenike da samostalno otkrivaju modele, ali je to istovremeno i veoma važno.

Učeničko mišljenje je to koje ima glavnu ulogu u stvaranju apstrakcija i pojmova, kao modela realnih pojava. Međutim, stručnjaci veliki značaj, osim misaonih aktivnosti, pridaju i grafičkim aktivnostima kojima se nerijetko može povezati konkretno sa apstraktnim (Milinković, D.)

Veliki broj misli može se formulisati i prilagoditi misaonoj formi koja je prihvatljiva djeci školskog uzrasta, i takve predstave kasnije mogu biti snažno i precizno olakšanje, smatra James J. Vatters. On takođe smatra da sa osnovama matematičkog modelovanja treba početi vema rano, kada djeca još grade temelje na kojima će se modelovanje kasnije razvijati. Upuštajući se u matematičko modelovanje u osnovnoj školi, učenici otkrivaju osnovne matematičke strukture složenih zadataka (npr. formule, odnosi između elemenata), a ne samo površinske detalje i podatke. Modelovanje u matematici pruža mogućnost učenicima da se uključe i na više načina tumače složeni problem ili složenu situaciju, to povlači i višestruk broj puteva i mogućnosti za sprovođenje svojih ideja, za traganje za rješenjem problema.

U matematičkom modelovanju postoje modeli koji se mogu uspješno primijeniti za rješavanje više različitih problema, ali je moguće i obratno-isti problem riješiti preko različitih modela. Da bi učenik bio uspješan u rješavanju nekog problema koristeći se metodom modelovanja, matematičari smatraju da on u svojoj memoriji pronalazi odgovarajuća matematička znanja, njih koriste i povezuju sa stvarnošću, na taj način on stvara pogodne modele i algoritme. Osim što se kod učenika razvija algoritamsko i kreativno mišljenje, smatramo da ovaj proces doprinosi podsticanju stvaralačkog rada kod učenika, podstiče ih na samostalan rad, logičko mišljenje, zapažanje i zaključivanje.

Analiza/Diskusija

U prilog tome da matematičko modelovanje ne treba zanemariti u nastavnim planovima i programima osnovne škole dodaćemo i podatke eksperimentalnog ispitivanja na uzorku učenika osnovnih škola Banja Luke (mr Kovačević, P.).

Ovo ispitivanje je započeto sa pretpostavkom da će modelsko-problemski pristup nastavu pozitivno uticati na uspjeh učenika u učenju. Po okončanju istraživanja, postavljena hipoteza je u potpunosti potvrđena.

Rezultati istraživanja svjedoče da su ispitanici eksperimentalne grupe postigli značajno bolji uspjeh od ispitanika kontrolne grupe. To potvrđuje da je modelsko-problemski pristup dao rezultate koji govore da je moguće podići obrazovne efekte nastave matematike na viši nivo. Ono što je, takođe, važno istaći, jeste da je ovo istraživanje donijelo i rezultate koji potvrđuju da je primjena modelskog pristupa u nastavi dala veće efekte u napredovanju učenika koji nisu naročito nadareni za rješavanje matematičkih problema.

Da bismo zaokružili ovu temu-matematičko modelovanje u osnovnoj školi, pozvaćemo se na istraživački članak „Modelske pristup diferenciranoj obradi zadataka“ u kome autor navodi nekoliko matematičko-kibernetičkih modela koji se postupno uvode u nastavu matematike u nižim razredima osnovne škole.

To su sljedeći modeli:

1. logičko-kombinatorni modeli,
2. modeli osnovnih računskih operacija,
3. modeli jednačina,
4. modeli nejednačina,
5. aritmetičko-logički modeli,
6. geometrijski modeli rješavanja problema,
7. modeli geometrijskih modela.

U četvrtom razredu se primjenjuju i sljedeći modeli značajni za nastavu matematike:

1. modeli problema mjerenja, vaganja i preliivanja,
2. modeli problema na kvadratnoj mreži,
3. modeli stohastičkih pojava.

Postoje podaci da je primjena matematičkog modelovanja u praksi u porastu, mada je i dalje prisutna praznina između samih istraživanja i razvoja obrazovanja, kao i modelovanje u praksi.

Zaključak

Matematičko modelovanje je temelj modernih naučnih istraživanja u različitim disciplinama, a osim toga, pruža i osnovne vještine da se izborimo sa svakodnevnim životom. Uvođenje matematičkog modelovanja, i u okviru toga, istraživanje i bavljenje temama koje interesuju djecu ima

potencijal da poboljša razumijevanje učenika vezano za matematiku, da podstakne njihove sklonosti da se uključe u matematiku, kao i životne vještine.

Učenicima ovaj proces rješavanja problemskih situacija može poslužiti da poboljšaju svoje sposobnosti i svoje znanje primjene i u realnom svijetu u rješavanju problema. Pritom će ove aktivnosti biti od pomoći ako se želi ustanoviti matematičko razmišljanje djece, kako se ono razvija.

Na osnovu dosadašnjih podataka, možemo zaključiti da nastava matematike može biti jednostavnija, praktičnija i interesantnija ukoliko se uvedu didaktički i funkcionalni modeli za rješavanje matematičkih problema.

Literatura

- [1] Barbosa, J. C. (2006). *Mathematical modelling in classroom: a critical and discursive perspective*. ZDM, 38 (3), 293-301.
- [2] Barbosa, J. C.: *Mathematical Modelling, The Socio-critical Perspective and the Reflexive Discussion*, preuzeto sa <http://tsg.icme11.org/document/get/439>
- [3] Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1998). *Qualitative research for education: an introduction to theory and methods*. Needham Heights, MA: Ally & Bacon.
- [4] Charmaz, K. (2006). *Constructing grounded theory: a practical guide through qualitative analysis*. London: Sage.
- [5] D'Ambrósio, U. (2007). *The role of mathematics in educational systems*. ZDM, 39 (1-2), 173- 181.
- [6] Edwards, D. & Hamson, M. (1990). *Guide to mathematical modelling*. Boca Raton: CRC Press, 1990.
- [7] English, E. D. (2004): *Mathematical Modelling in the Primary School*, Conference Proceedings of MERGA, 207-214
- [8] Jablonka, E. & Gellert, U. (2007). *Mathematisation - demathematisation*. In: U. Gellert & E. Jablonka (Eds.). *Mathematisation and demathematisation: social, philosophical and educational ramifications*. Rotterdam: Sense Publishers, 1-18.
- [9] Hans-Wolfgang Henn: *Modelling in School . Changes and Obstacles*, The Montana Mathematics Enthusiast, Monograph 3, pp.125-138
- [10] James J. Watters, Lyn English, and Sue Mahoney (2000). *Mathematical Modeling in the Elementary School*. Queensland University of Technology, Brisbane, Australia
- [11] Johnson, D., Johnson, R., & Johnson-Holubec, E. (1993). *Cooperation in the classroom* (6th ed.). Edina, MN: Interaction Book Company.
- [12] Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). *A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education*. ZDM, 38 (3), 302-310.
- [13] Kaiser, G.; Sriraman, B.; Blomhøj, M. & Garcia, F. J. (2007). *Report from the working group modelling and applications – differentiating perspectives and delineating commonalities*. Dostupno na adresi: <http://www.erzwiss.uni-hamburg.de/Personal/Gkaiser/pdfpublist/> CERME 5 WG 13 _Introduction.pdf.
- [14] Marković, Z. (2011): *Matematičko modelovanje u matematičkom obrazovanju*, IMO, III, Broj 4, 35-50
- [15] Milinković, D.: *Modelski pristup diferenciranoj obradi problemskih zadataka*; Norma, IX(1), 143-153
- [16] N. Mousoulides, M. Pittalis, C. Christou, P. Boytchev , B. Sriraman & D.Pitta: *Mathematical Modelling Using Technology in Elementary School*, Preuzeto sa [http://www.elica.net/download/papers/](http://www.elica.net/download/papers/MathModTechElemSchool.pdf)
- [17] Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. (2007). *Introduction*. In: W. Blum, P. Galbraith, H. Henn & N. Mogens (Eds.). *Modelling and applications in mathematics education* , The 14th ICMI Study. New York: Springer, 3-32.
- [18] Petrović, N. Mrđa, M i Kovačević, P. (2004): *Modelsko-problemski pristup nastavi matematike*; Norma, X(1-2), 111-121
- [19] Romano, D.A. (2009): *Istraživanje matematičkog obrazovanja*; IMO, Vol. I, Broj 1, 1-10
- [20] Santos, M. A. (2007). *A produção de discussões reflexivas em um ambiente de modelagem matemática*. Unpublished master dissertation. Federal University of Bahia and State University of Feira de Santana
- [21] Schoenfeld, A. H. (2011): *Namjere i metode u istraživanju matematičkog obrazovanja*, IMO, III, Broj 4, 23-34
- [22] Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.
- [23] Skovsmose, O. (2006). *Challenges for Mathematics Education Research*. In: J. Maasz & Schloeglmann, W. (Eds.) *New mathematics education research and practice*. Rotterdam: Sense Publishers, 33-50.
- [24] Tuckman, B.W., & Jensen, M.A. (1977). *Stages of small group development revisited*. Group & Organization Studies, 2(4), 419-427.

Pristiglo u redakciju 16.12.2011. Revidirana verzija 13.01.2012. Dostupno na internetu od 16.01.2012.